ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

DIONISIO TRISCARI

Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 17, nº 4 (1963), p. 349-371

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_4_349_0>

SULLE SINGOLARITÀ DELLE FRONTIERE ORIENTATE DI MISURA MINIMA (1)

Nota di DIONISIO TRISCARI (Messina)

Nella memoria [5] E. De Giorgi ha iniziato lo studio dei problemi di regolarizzazione delle frontiere orientate di area minima, ed ha stabilito che una parte della frontiera (*la frontiera ridotta*) è una ipersuperficie localmente regolare; (cfr. [5], Teor. VI, pag. 56).

In questo lavoro viene ripresa tale ricerca, dando alcune condizioni necessarie per l'esistenza di eventuali punti singolari. Il risultato principale è il Teorema XVIII in cui si prova che l'esistenza di punti singolari è legata a quella di coni singolari di misura minima.

1. — Per comodità del lettore vengono qui riportati teoremi e definizioni di [4], [5] cui si fa riferimento nella presente nota e sono stabilite alcune notazioni che saranno seguite in tutto il resto del lavoro.

Per ogni intero positivo n sarà indicato con R^n lo spazio euclideo n-dimensionale; in particolare $R = R^1$ denoterà la retta reale. Penseremo sempre lo spazio R^n dotato di struttura di spazio vettoriale: precisamente dati due punti $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ porremo:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$x - y = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n);$$

dati un punto $x = (x_1, \dots, x_n)$ ed un numero reale a porremo:

$$ax = (ax_1, \dots, ax_n);$$

Pervenuto alla Redazione il 30 Novembre 1963.

(1) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 9 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R., nell'anno accademico 1962-63.

dati due punti $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ indicheremo il loro prodotto scalare con il simbolo:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{h=1}^{n} x_h y_h ;$$

porremo infine:

$$| x | = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{h=1}^{n} x_h^2} .$$

Data una funzione $f(x)$ derivabile in un aperto $A \subset R^n$ porremo:

$$D_h f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_h}, \quad Df(x) = \operatorname{grad} f(x) = (D_1 f(x), \dots, D_n f(x)) ;$$

date due funzioni f, g definite in R^n indicheremo il loro prodotto di composizione con il simbolo:

$$f(x) * g(x) = \int_{R^n} f(x - \xi)\, g(\xi)\, d\xi .$$

Conformemente alle convenzioni usate in [2], [3] converremo che, ogni qualvolta si parlerà di insiemi contenuti in R^n e di funzioni ivi definite, intenderemo riferirci sempre ad insiemi di Borel ed a funzioni di Baire.

Per ogni insieme $E \subset R^n$ indicheremo con $\mathcal{F}E$ la sua frontiera e con $\overline{E} = (E \cup \mathcal{F}E)$ la sua chiusura; per ogni punto $x \in R^n$ e per ogni numero positivo ϱ, indicheremo rispettivamente con i simboli:

$$A_\varrho(x) , \qquad C_\varrho(x) = \overline{A}_\varrho(x)$$

l'ipersfera aperta e l'ipersfera chiusa di centro x e raggio ϱ. Se x coincide con l'origine delle coordinate, in luogo di $A_\varrho(x)$, $C_\varrho(x)$, scriveremo più brevemente A_ϱ, C_ϱ.

Detta mis E la misura secondo Lebesgue del generico insieme $E \subset R^n$, indicheremo con il simbolo:

$$\omega_n = \operatorname{mis} A_1 = \operatorname{mis} C_1$$

la misura dell'ipersfera di R^n di raggio unitario.

Dato un certo numero di relazioni $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ indicheremo con il simbolo:

$$\{ x : \alpha, \beta, \gamma, \dots \}$$

l'insieme degli elementi x che verificano queste relazioni; dati un insieme E ed una funzione $f(x)$ definita in E, indicheremo con il simbolo:

$$f(E) = \{ f(x) : x \in E \}$$

l'immagine di E mediante f, cioè l'insieme descritto da $f(x)$ al variare di x in E.

Per ogni insieme $E \subset R^n$ e per ogni intero $k > 0$, indicheremo con il simbolo $H_k(E)$ la misura k-dimensionale di Hausdorff dell'insieme E, che è data come è noto (cfr. [4], n^0 2, n^0 3) dalla formula:

$$(1.1) \quad H_k(E) = 2^{-k}\omega_k \liminf_{\varrho \to 0} \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} (\operatorname{diam} E_h)^k : E \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h,\ \operatorname{diam} E_h < \varrho \text{ per } h = 1, 2, \ldots \right\}.$$

La misura di Hausdorff è una funzione d'insieme completamente additiva e mai negativa (eventualmente infinita) e per $k = n$ coincide con l'ordinaria misura di Lebesgue.

Dalla (1.1) si vede poi subito che se per un certo k risulta finita la misura $H_k(E)$, allora:

$$H_{k+1}(E) = 0.$$

Si verifica altresì che per varietà sufficientemente regolari la misura di Hausdorff coincide con la misura elementarmente definita; precisamente se T è un intervallo chiuso di R^k, $f_1(y), \ldots, f_n(y)$ sono n funzioni definite in T ivi uniformemente Lipschitziane (ipotesi banalmente verificata quando le f sono continue con le derivate parziali prime) e la corrispondenza f che al generico punto $y \in T$ associa il punto $f(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y)) \in R^n$ è biunivoca, allora l'insieme $E = f(T)$ ha una misura di Hausdorff fornita dalla:

$$H_k(E) = H_k(f(T)) = \int_T \sqrt{\det \| g_{hi} \|}\, dy$$

ove gli elementi della matrice quadrata $\| g_{hi} \|$ sono dati dalla:

$$g_{hi} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial y_h} \frac{\partial f_k}{\partial y_i}.$$

Si definisce poi la misura $H_0(E)$ nel modo seguente: se E è formato da un numero finito di punti, $H_0(E)$ coincide con tale numero; altrimenti è: $H_0(E) = +\infty$.

Data una funzione vettoriale d'insieme:

$$\alpha(E) \equiv (\alpha_1(E), \dots, \alpha_n(E))$$

definita per ogni insieme di Borel di R^n, completamente additiva, limitata, la sua variazione totale:

$$\sigma(E) = \sup \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} | \alpha(E_h) | : E = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h \, , \ E_h \cap E_k = \varnothing \ \text{per} \ h \neq k \right\}$$

è pure una funzione di insieme completamente additiva e limitata; porremo per convenzione, per $E \subset R^n$ ed $f(x)$ definita in E:

$$\int_E | d\alpha | = \sigma(E); \ \int_E f d\sigma = \int_E f \, | d\alpha | \, .$$

Infine, per ogni insieme $E \subset R^n$, indicheremo con il simbolo $\varphi(x, E)$ la funzione caratteristica di E, cioè la funzione che vale 1 in E e vale 0 in $R^n - E$.

2. — Richiamiamo ora, con lievi ritocchi formali, alcune nozioni contenute in [2], [3], [7].

Sia $E \subset R^n$ e sia $n \geq 2$; per ogni numero positivo λ poniamo:

$$\varphi_\lambda(x) = (\pi\lambda)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{-|x|^2}{\lambda}\right] * \varphi(x, E); \tag{2.1}$$

esiste allora, finito o infinito, il limite:

$$P(E) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{R^n} | D \varphi_\lambda(x) | \, dx \tag{2.2}$$

detto perimetro di E.

Vale il seguente (2)

TEOREMA I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè $P(E)$ sia finito è che esista una funzione vettoriale di insieme completamente additiva e limitata $\alpha(B)$, definita per ogni insieme $B \subset R^n$, verificante le formule di Gauss-Green*

(2) Cfr. [2], Teoremi II e IV; [4], pag. 6, Teor. I.

generalizzate :

$$\int_E Dg\,dx = -\int_{R^n} g(x)\,d\alpha, \tag{2.3}$$

per ogni funzione $g(x)$ definita in R^n, ivi continua insieme alle derivate parziali prime ed a supporto compatto. In tal caso risulta :

$$P(E) = \int_{R^n} |\,d\alpha\,|\,. \tag{2.4}$$

La condizione (2.3) può esprimersi dicendo che la misura vettoriale α è il gradiente, nel senso della teoria delle distribuzioni, di $\varphi(x, E)$; esprimeremo questo fatto ponendo per convenzione:

$$\int_B D\varphi(x, E) = \alpha(B), \qquad \int_B f(x)\,D\varphi(x, E) = \int_B f\,d\alpha \tag{2.5}$$

$$\int_B |\,D\varphi(x, E)\,| = \int_B |\,d\alpha\,|\,, \quad \int_B f(x)\,|\,D\varphi(x, E)\,| = \int_B f\,|\,d\alpha\,| \tag{2.5'}$$

$$\int_B D_h\,\varphi(x, E) = \alpha_h(B), \qquad \int_B f(x)\,D_h\,\varphi(x, E) = \int_B f\,d\alpha_h\,, \qquad h = 1, 2, \ldots, n \tag{2.5''}$$

Il perimetro $P(E)$ è una funzione semicontinua rispetto alla convergenza in media ; precisamente vale il seguente [3]

TEOREMA II. *Sia E_h una successione di insiemi di R^h, E un insieme di R^n verificante la :*

$$\lim_{h \to \infty} \int_{R^n} |\,\varphi(x, E) - \varphi(x, E_h)\,|\,dx = \tag{2.6}$$

$$= \lim_{h \to \infty} (\mathrm{mis}\,(E - E_h) + \mathrm{mis}\,(E_h - E)) = 0.$$

---

(3) Cfr. [2], Teorema VII ; [4], pag. 7, Teor. II.

Allora si ha:

$$\min_{h \to \infty} \lim P(E_h) \geq P(E). \tag{2.7}$$

Fra le successioni approssimanti un insieme E hanno un particolare interesse quelle costituite da domini poligonali.

Precisamente, detto *dominio poligonale* ogni insieme $E \subset R^n$ che sia la chiusura di un aperto e la cui frontiera $\mathcal{F}E$ sia contenuta nell'unione di un numero finito di iperpiani di R^n, vale il seguente

TEOREMA III. *Se E ha perimetro finito, esiste una successione $\{E_h\}$ di domini poligonali verificanti le condizioni:*

$$P(E) = \lim_{h \to \infty} P(E_h), \qquad \lim_{h \to \infty} [\text{mis}(E - E_h) + \text{mis}(E_h - E)] = 0. \tag{2.8}$$

Gli insiemi approssimabili in media mediante domini poligonali aventi perimetro limitato sono stati introdotti da R. Caccioppoli in [1]; tali insiemi, per i teoremi II e III, sono tutti e soli gli insiemi di perimetro finito, che sono chiamati perciò *insiemi di Caccioppoli.*

Per le applicazioni al calcolo delle variazioni, oltre al teorema di semicontinuità II interessa il seguente teorema di compattezza (4):

TEOREMA IV. *Dati un insieme limitato $L \subset R^n$, un numero positivo p ed una successione $\{E_h\}$ di insiemi verificante le condizioni:*

$$E_h \subset L, \quad P(E_h) \leq p \qquad h = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

esistono un insieme $E \subset R^n$ ed una successione $\{E_{h_i}\}$, subordinata alla successione $\{E_h\}$, tali che risulti:

$$\lim_{i \to \infty} [\text{mis}(E - E_{h_i}) + \text{mis}(E_{h_i} - E)] = 0. \tag{2.10}$$

Nello studio delle proprietà locali delle frontiere di insiemi di Caccioppoli interessa il seguente (5)

TEOREMA V. *Sia $E \subset R^n$ un insieme di Caccioppoli e sia ξ un punto di R. Allora, per ogni numero positivo ϱ, l'insieme $E \cap A_\varrho(\xi)$ è un insieme di*

---

(4) Cfr. [3], pag. 98, Teor I; [4], pag. 8, Teor. IV,

(5) Cfr. [3], pag. 100, Lemma III; [4], pag. 9 Teor. V.

Caccioppoli e si ha inoltre, per ogni $B \subset R^n$ e per quasi tutti i numeri positivi ϱ:

$$(2\text{·}11) \qquad \int_B D\varphi(x, E \cap A_\varrho(\xi)) = \int_{B \cap A_\varrho(\xi)} D\varphi(x, E) + \int_{\mathcal{F}A_\varrho(\xi)} \varphi(x, E \cap B)\, \nu(x)\, dH_{n-1}$$

ove $\nu(x)$ è il versore della normale interna a $\mathcal{F}A_\varrho(\xi)$.

Notiamo che dalla (2.11) discende immediatamente:

$$(2.12) \qquad \int_B |D\varphi(x, E \cap A_\varrho(\xi))| = \int_{B \cap A_\varrho(\xi)} |D\varphi(x, E)| + \int_{\mathcal{F}A_\varrho(\xi)} \varphi(x, E \cap B)\, dH_{n-1}\,.$$

Alla (2.11) può darsi la forma più suggestiva:

$$(2.13) \qquad \int_B D[\varphi(x, E)\, \varphi(x, A_\varrho(\xi))] =$$

$$= \int_B \varphi(x, A_\varrho(\xi))\, D\varphi(x, E) + \int_B \varphi(x, E)\, D\varphi(x, A_\varrho(\xi)).$$

Con procedimento del tutto analogo a quello seguito per provare le (2.11), (2.12) si provano le:

$$(2.14) \qquad \int_B D\varphi(x, E - A_\varrho(\xi)) = \int_{B - A_\varrho(\xi)} D\varphi(x, E) - \int_{\mathcal{F}A_\varrho(\xi)} \varphi(x, E \cap B)\, \nu(x)\, dH_{n-1}$$

$$(2.15) \qquad \int_B |D\varphi(x, E - A_\varrho(\xi))| = \int_{B - A_\varrho(\xi)} |D\varphi(x, E)| + \int_{\mathcal{F}A_\varrho(\xi)} \varphi(x, E \cap B)\, dH_{n-1}\,.$$

Dal Teorema V segue pure facilmente, (cfr. De Giorgi [5], (57), pag. 16):

$$(2.16) \qquad \int_{C_\varrho} D\varphi(x, E) = -\int_{\mathcal{F}C_\varrho} \varphi(x, E)\, \nu(x)\, dH_{n-1}$$

per quasi ogni $\varrho > 0$.

Dato un insieme di Caccioppoli $E \subset R^n$, diremo *frontiera ridotta di* E ed indicheremo con il simbolo $\mathcal{F}^* E$ l'insieme dei punti ξ che verificano le condizioni seguenti:

1) per ogni numero positivo ϱ risulta:

$$\int_{A_\varrho(\xi)} | D\varphi(x, E) | > 0 ; \tag{2.17}$$

2) esiste determinato il limite:

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\int_{A_\varrho(\xi)} D\varphi(x, E)}{\int_{A_\varrho(\xi)} | D\varphi(x, E) |} = \nu(\xi) ; \tag{2.18}$$

3) risulta:

$$| \nu(\xi) | = 1. \tag{2.19}$$

Tra le proprietà della frontiera ridotta ricordiamo quelle fornite dai seguenti teoremi (6):

TEOREMA VI. *Per ogni insieme di Caccioppoli* $E \subset R^n$ *e per ogni punto* $\xi \in \mathcal{F}^* E$ *risulta*:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{1-n} \int_{A_\varrho(\xi)} | D\varphi(x, E) | = \omega_{n-1} , \tag{2.20}$$

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-n} \operatorname{mis}(A_\varrho(\xi) \cap E) = \lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-n} \operatorname{mis}(A_\varrho(\xi) - E) = \frac{\omega_n}{2} . \tag{2.21}$$

TEOREMA VII. *Per ogni insieme di Caccioppoli* E *e per ogni insieme* B *contenuti in* R^n, *risulta:*

$$\int_B D\varphi(x, E) = \int_{B \cap \mathcal{F}^* E} \nu(x)\, dH_{n-1} ; \quad \int_B | D\varphi(x, E) | = H_{n-1}(B \cap \mathcal{F}^* E) ; \tag{2.22}$$

$$P(E) = H_{n-1}(\mathcal{F}^* E)$$

ove $\nu(x)$ *è data dalla* (2.18).

(6) Cfr [4], pag. 11, Teor. VI, VII.

Per evitare di scrivere il limite (2.18) e gli analoghi limiti che ci danno le componenti $\nu_1(x), \dots, \nu_n(x)$ del vettore $\nu(x)$, porremo per convenzione:

$$\nu(x) = \frac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|}; \qquad \nu_h(x) = \frac{D_h\,\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} \tag{2.23}$$

per $h = 1, 2, \dots, n$.

Tale convenzione è giustificata osservando che dalle (2.22) segue sabito, per ogni B e per ogni funzione $f(x)$ tale che gli integrali seguenti abbiano senso:

$$\int_B f(x)\, D\varphi(x, E) = \int_{B \cap \mathcal{F}^* E} f(x)\, \nu(x)\, dH_{n-1} = \tag{2.24}$$

$$= \int_{B \cap \mathcal{F}^* E} f(x) \frac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} \cdot |D\varphi(x, E)| = \int_B f(x) \frac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} \cdot |D\varphi(x, E)|.$$

Notiamo inoltre che dalle (2.21) si deduce subito la:

$$\mathcal{F}E \supset \overline{\mathcal{F}^* E} \supset \mathcal{F}^* E. \tag{2.25}$$

3. — Diamo ora alcune definizioni e risultati relativi alle frontiere orientate di misura minima.

Conservando le notazioni introdotte in [4], consideriamo due insiemi E, L dello spazio R^n (con $n \geq 2$); supponiamo che E sia un insieme di Caccioppoli, cioè abbia perimetro $P(E)$ finito, ed introduciamo tre funzioni della coppia E, L di cui faremo uso nel seguito.

Poniamo per definizione:

$$Q(E, L) = \inf\{P(B) : B \subset R^n, B - L = E - L\}, \tag{3.1}$$

$$\vartheta(E, L) = Q(E, L) - \int_{R^n - L} |D\varphi(x, E)|, \tag{3.2}$$

$$\psi(E, L) = P(E) - Q(E, L). \tag{3.3}$$

Diremo che l'insieme E ha *frontiera orientata di misura minima* su L se risulta:

$$\psi(E, L) = 0$$

cioè :

$$P(E) = \min\{P(B) : B \subset R^n, B - L = E - L\}.$$

Dalle (3.1), (3.3) segue immediatamente, per $L \subset L'$, :

$$Q(E, L) \geq Q(E, L'), \tag{3.4}$$

$$\psi(E, L) \leq \psi(E, L') \tag{3.5}$$

e quindi, essendo evidentemente :

$$\psi(E, L) \geq 0$$

se un insieme E ha frontiera orientata di misura minima su L' ciò accade anche per ogni $L \subset L'$.

Dal teorema II, n^0 3 di [4] si deduce subito che, se l'insieme L è chiuso, risulta :

$$\vartheta(E, L) = \inf\left\{\int_L |D\varphi(x, B)| ; B \subset R^n, P(B) < +\infty, B - L = E - L\right\} \tag{3.6}$$

$$\psi(E, L) = \int_L |D\varphi(x, E)| - \vartheta(E, L). \tag{3.7}$$

Un teorema di esistenza di insiemi aventi frontiera orientata di misura minima è il seguente :

TEOREMA VIII. *Dati in R^n un insieme di Caccioppoli E ed un insieme limitato L esiste un insieme di Caccioppoli M verificante le condizioni :*

$$M - L = E - L, \qquad P(M) = Q(E, L) ;$$

l'insieme M ha frontiera orientata di misura minima su L.

I seguenti teoremi permettono di caratterizzare il comportamento delle frontiere di area minima nell'intorno di un loro punto.

TEOREMA IX [7]. *Dati in R^n due insiemi di Caccioppoli E, F si ha per quasi tutti i numeri positivi ϱ :*

$$\int_{\mathscr{F}C_\varrho} |\varphi(x, E) - \varphi(x, F)|\, dH_{n-1} \geq |\vartheta(E, C_\varrho) - \vartheta(F, C_\varrho)|. \tag{3.8}$$

(7) Cfr. [5], pag. 5, Teor. I.

TEOREMA X. (8) *Dato un insieme di Caccioppoli $E \subset R^n$ esiste un insieme $N \subset R$ di misura lineare nulla, tale che, se p, ϱ, r sono tre numeri verificanti le:*

$$(3.9) \qquad 0 < \varrho < r, \quad \varrho \in R - N, \quad r \in R - N, \quad p > \int_{C_r - C_\varrho} | D\varphi(x, E) |$$

si ha:

$$(3.10) \qquad r^{1-n} \vartheta(E, C_r) - \varrho^{1-n} \left(\vartheta(E, C_r) - \int_{C_r - C_\varrho} | D\varphi(x, E) | \right) \geq$$

$$\geq \frac{r^{1-n}}{2p} \left(\int_{\mathscr{F} C_\varrho} \left| \varphi\left(\frac{r}{\varrho} x, E\right) - \varphi(x, E) \right| dH_{n-1} \right)^2 .$$

TEOREMA XI. (9) *Sia E un insieme di Caccioppoli di R^n e siano r, p, ϱ, q, quattro numeri verificanti le:*

$$(3.11) \qquad 0 < \varrho < r < q, \quad p > \int_{C_r - C_\varrho} | D\varphi(x, E) |, \ \psi(E, C_q) = 0 ;$$

risulta allora:

$$(3.12) \qquad r^{1-n} \int_{C_r} | D\varphi(x, E) | - \varrho^{1-n} \int_{C_\varrho} | D\varphi(x, E) | \geq$$

$$\geq \frac{\varrho^{2(n-1)}}{2p\, r^{n-1}} \left| r^{1-n} \int_{C_r} D\varphi(x, E) - \varrho^{1-n} \int_{C_\varrho} D\varphi(x, E) \right|^2 .$$

TEOREMA XII. (10) *Sia E un insieme di Caccioppoli ed L un aperto di R^n, tali che risulti:*

$$(3.13) \qquad \psi(E, L) = 0.$$

---

(8) cfr. [5], pag. 14, Teor. V.
(9) Cfr. [5], pag. 15, Teor VI.
(10) Cfr. [5], pag. 17, Teor. VII.

Sia ξ un punto interno ad L. Allora, per ogni numero positivo ϱ minore della distanza di ξ da $R^n - L$, risulta :

$$\vartheta(E, C_\varrho(\xi)) = \int_{C_\varrho(\xi)} |D\varphi(x, E)| \leq \frac{n\omega_n \varrho^{n-1}}{2}, \quad (3.14)$$ [11]

se poi $\xi \in \overline{\mathcal{F}^* E}$, *oltre alla* (3.13) *vale la :*

$$\vartheta(E, C_\varrho(\xi)) = \int_{C_\varrho(\xi)} |D\varphi(x, E)| \geq \omega_{n-1} \varrho^{n-1}. \quad (3.15)$$

TEOREMA XIII. [12] *Sia E un insieme di Caccioppoli di R^n, (con $n > 2$), ϱ un numero positivo, ξ un punto di R^n; siano soddisfatte le :*

$$\psi(E, C_\varrho(\xi)) = 0, \qquad \xi \in \overline{\mathcal{F}^* E},$$

$$\int_{C_\varrho(\xi)} |D\varphi(x, E)| - \left| \int_{C_\varrho(\xi)} D\varphi(x, E) \right| \leq \sigma(n) \varrho^{n-1}, \quad (3.16)$$

ove $\sigma(n)$ è una costante dipendente solo dalla dimensione n dello spazio.

Risulta allora :

$$\mathcal{F}^* E \cap C_{2^{-n}\varrho}(\xi) = \overline{\mathcal{F}^* E} \cap C_{2^{-n}\varrho}(\xi), \quad (3.17)$$

ed il vettore:

$$\frac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} \quad (3.18)$$

è una funzione continua in:

$$\mathcal{F}^* E \cap C_{2^{-n}\varrho}(\xi).$$

4. — *Frontiera essenziale.* Dato un insieme $E \subset R^n$ diremo che un punto $\xi \in R^n$ appartiene alla frontiera essenziale di E, se vale la seguente relazione:

$$0 < \text{mis}(E \cap C_\varrho(\xi)) < \text{mis}\, C_\varrho(\xi), \qquad \forall\, \varrho > 0. \quad (4.1)$$

---

(11) Osserviamo che $n\omega_n$ è la misura $(n-1)$-dimensionale della frontiera della sfera unitaria di R_n.

(12) Cfr. [5], pag. 54, Teor. V.

Indicheremo con $\mathcal{F}_e E$ la frontiera essenziale di E.
Vale il seguente

TEOREMA XIV. *Se $E \subset R^n$ è un insieme di Caccioppoli, risulta:*

$$\overline{\mathcal{F}^* E} = \mathcal{F}_e E. \tag{4.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con il provare che:

$$\overline{\mathcal{F}^* E} \subset \mathcal{F}_e E. \tag{4.3}$$

Sia $\bar{x}$ un punto di R^n non appartenente ad $\mathcal{F}_e E$; esisterà allora un numero ϱ che verifica una delle due condizioni:

$$\text{mis}\,(A_\varrho(\bar{x}) \cap E) = 0 \tag{4.4}$$

$$\text{mis}\,(A_\varrho(\bar{x}) - E) = 0. \tag{4.5}$$

Nell'ipotesi (4.4) per ogni funzione $g(x)$ continua con le derivate parziali prime in R^n ed il cui supporto sia contenuto in A_ϱ risulta:

$$\int_{R^n} g(x)\, D\varphi(x, E) = \int_E Dg(x)\, dx = 0 \tag{4.6}$$

e quindi per l'arbitrarietà di $g(x)$, avremo:

$$\int_{A_\varrho} |\, D\varphi(x, E)\,| = 0. \tag{4.7}$$

Ricordando la definizione di frontiera ridotta [13] segue immediatamente la (4.3). In maniera analoga si procede nell'ipotesi (4.5).

Proviamo ora che:

$$\overline{\mathcal{F}^* E} \supset \mathcal{F}_e E. \tag{4.8}$$

Dato un punto $\bar{x}$ di R^n non appartenente ad $\overline{\mathcal{F}^* E}$ possiamo trovare un numero ϱ tale che:

$$A_\varrho(\bar{x}) \cap \overline{\mathcal{F}^* E} = 0\,; \tag{4.9}$$

---

[13] Cfr. (2.17), (2.18), (2.19).

allora, per ogni $g(x)$ continua in R^n con le sue derivate prime ed a supporto contenuto in $A_\varrho(\bar{x})$ avremo, ricordando le formule di Gauss-Green nella forma (2.24):

$$\int_E D\,g(x)\,dx = 0. \tag{4.10}$$

La (4.10) ci assicura che $\varphi(x, E)$ è in $A_\varrho(\bar{x})$ quasi ovunque uguale ad una costante e quindi il teorema è dimostrato.

5. — *Traslazione e dilatazione.* Dato un vettore $a \in R^n$ indicheremo con τ_a la trasformazione (traslazione) che al generico punto $x \in R^n$ associa il punto:

$$\tau_a\, x = x + a. \tag{5.1}$$

Dalle definizioni contenute in [4], [5] segue immediatamente che se E ha perimetro finito, ha pure perimetro finito l'insieme $\tau_a\, E$.

Si verificano subito le relazioni:

$$P(E) = P(\tau_a\, E), \tag{5.2}$$

$$Q(E, L) = Q(\tau_a\, E, \tau_a\, L), \tag{5.3}$$

$$\vartheta(E, L) = \vartheta(\tau_a\, E, \tau_a\, L), \tag{5.4}$$

$$\psi(E, L) = \psi(\tau_a\, E, \tau_a\, L), \tag{5.5}$$

$$\int_B D\varphi(x, E) = \int_{\tau_a B} D\varphi(x, \tau_a\, E), \tag{5.6}$$

$$\int_B |\, D\varphi(x, E)\,| = \int_{\tau_a B} |\, D\varphi(x, \tau_a\, E)\,|, \tag{5.7}$$

$$\mathcal{F}_e\, \tau_a\, E = \tau_a\, \mathcal{F}_e\, E, \tag{5.8}$$

$$\mathcal{F}^* \tau_a\, E = \tau_a\, \mathcal{F}^*\, E. \tag{5.9}$$

Dato un numero $\varrho > 0$ indicheremo con δ_ϱ la trasfomazione (dilatazione) che al generico punto

$$x \in R^n$$

associa il punto:

$$\delta_\varrho\, x = \varrho x.$$

Si verificano subito le relazioni:

$$\varrho^{n-1} P(E) = P(\delta_\varrho E), \tag{5.10}$$

$$\varrho^{n-1} Q(E, L) = Q(\delta_\varrho E, \delta_\varrho L), \tag{5.11}$$

$$\varrho^{n-1} \vartheta(E, L) = \vartheta(\delta_\varrho E, \delta_\varrho L), \tag{5.12}$$

$$\varrho^{n-1} \psi(E, L) = \psi(\delta_\varrho E, \delta_\varrho L), \tag{5.13}$$

$$\varrho^{n-1} \int_B D\varphi(x, E) = \int_{\delta_\varrho B} D\varphi(x, \delta_\varrho E), \tag{5.14}$$

$$\varrho^{n-1} \int_B |D\varphi(x, E)| = \int_{\delta_\varrho B} |D\varphi(x, \delta_\varrho E)|, \tag{5.15}$$

$$\mathcal{F}_e\, \delta_\varrho E = \delta_\varrho\, \mathcal{F}_e E, \tag{5.16}$$

$$\mathcal{F}^*\, \delta_\varrho E = \delta_\varrho\, \mathcal{F}^* E. \tag{5.17}$$

6. — Consideriamo un insieme di Caccioppoli $E \subset R^n$; diremo che un punto $x \in \mathcal{F}_e E$ è un *punto singolare* per la frontiera orientata di E se:

$$x \in \mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E. \tag{6.1}$$

Dalle (5.8), (5.9) segue che, se x è punto singolare per la frontiera orientata di E, $\tau_a x$ è punto singolare per la frontiera orientata di $\tau_a E$.

Vogliamo ora dare delle condizioni necessarie affinchè, dato un insieme di Caccioppoli $E \subset R^n$ ed un aperto $A \subset R^n$, l'intersezione $\mathcal{F}_e E \cap A$ contenga punti singolari. Possiamo supporre che uno di tali punti coincida con l'origine, poichè in tal caso possiamo sempre ricondurci mediante una traslazione.

Cominciamo con il provare i seguenti lemmi.

LEMMA I. *Dato un insieme di Caccioppoli $E \subset R^n$ per ogni ϱ risulta:*

$$P(E \cap C_\varrho) \leq \int_{C_\varrho} |D\varphi(x, E)| + n\omega_n\, \varrho^{n-1}. \tag{6.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teor. V, esiste una successione di numeri positivi $\{\varrho_h\}$ verificante le:

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \dots > \varrho_h > \dots ; \lim_{h \to \infty} \varrho_h = \varrho \tag{6.3}$$

$$P(E \cap A_{\varrho_h}) = \int_{A_{\varrho_h}} |D\varphi(x, E)| + \int_{\mathscr{F} A_{\varrho_h}} \varphi(x, E)\, dH_{n-1} \leq \tag{6.4}$$

$$\leq \int_{A_{\varrho_h}} |D\varphi(x, E)| + \omega_n n \varrho_h^{n-1}.$$

Dalle (6.3), (6.4) e dal Teor. II, segue la (6.2). c.v.d.

LEMMA II. *Sia E un insieme di Caccioppoli, A un aperto di R^n contenente l'origine e sia:*

$$\psi(E, A) = 0. \tag{6.5}$$

Sia $\{\varrho_h\}$ una successione di numeri positivi verificante la condizione:

$$\lim_{h \to \infty} \varrho_h = +\infty. \tag{6.6}$$

Risulta allora, per ogni $\tau > 0$,

$$\max \lim_{h \to \infty} P[(\delta_{\varrho_h} E) \cap C_\tau] \leq \frac{3n\, \omega_n\, \tau^{n-1}}{2}. \tag{6.7}$$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con l'osservare che per l'ipotesi $\psi(E, A) = 0$ e per la (5.13) abbiamo:

$$\psi(\delta_{\varrho_h} E, \delta_{\varrho_h} A) = 0. \tag{6.8}$$

Essendo $\lim_{h \to \infty} \varrho_h = +\infty$ ed essendo l'origine interna ad A, per h abbastanza grande [14] avremo:

$$C_\tau \subset \delta_{\varrho_h} A. \tag{6.9}$$

---

[14] Dire che una proprietà è verificata per h abbastanza grande significa che esiste un intero ν tale che la proprietà è verificata per ogni $h > \nu$.

Dalla (6.9) e dalla (6.8) e tenendo conto della (3.14) del Teor. XII si ha:

$$\int_{C_\tau} | D\varphi(x, \delta_{\varrho_h} E) | \leq \frac{n\omega_n \tau^{n-1}}{2} \tag{6.10}$$

e quindi per il Lemma I segue:

$$P[(\delta_{\varrho_h} E) \cap C_\tau] \leq \frac{3\, n\omega_n \tau^{n-1}}{2}. \tag{6.11}$$

da cui la (6.7). c.v.d.

Dal Lemma II, per il Teor. IV, segue

LEMMA. III. *Sia E un insieme di Caccioppoli di R^n, A un aperto di R^n contenente l'origine e sia:*

$$\psi(E, A) = 0.$$

Sia $\{\varrho_h\}$ una successione di numeri positivi verificante la condizione:

$$\lim_{h \to \infty} \varrho_h = +\infty.$$

Sia $\tau > 0$; esiste allora una successione $\{\varrho'_h\}$ subordinata alla successione $\{\varrho_h\}$ tale che la successione di insiemi

$$\{ C_\tau \cap \delta_{\varrho'_h} E \}_h \tag{6.12}$$

converga in media (cioè convergano in L_1 le rispettive funzioni caratteristiche).

7. — Vogliamo ora studiare le proprietà del limite della successione (6.12). A tale scopo supporremo, in tutti i teoremi seguenti, che E sia un insieme di Caccioppoli, A un aperto di R^n, $\{\varrho_h\}$ una successione di numeri positivi verificante la condizione:

$$\lim_{h \to \infty} \varrho_h = +\infty; \tag{7.1}$$

sia inoltre:

$$\psi(E \cap A) = 0. \tag{7.2}$$

Esista il limite L della successione $\{ C_\tau \cap \delta_{\varrho_h} E \}_h$, cioè si abbia:

$$\lim_{h \to \infty} [\text{mis}\, L \cup (C_\tau \cap \delta_{\varrho_h} E)] - \text{mis}\, L \cap (C_\tau \cap \delta_{\varrho_h} E) = \tag{7.3}$$

$$= \lim_{h \to \infty} \int_{R^n} | \varphi(x, L) - \varphi(x, C_\tau \cap \delta_{\varrho_h} E) |\, dx = 0.$$

Supporremo inoltre che l'origine 0 dello spazio R^n verifichi la condizione:

$$0 \in (\mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E) \cap A. \tag{7.4}$$

Proviamo ora i seguenti teoremi.

TEOREMA XV. *Dalla successione* $\{\varrho_h\}$ *può estrarsi una successione subordinata* $\{\varrho'_h\}$ *tale che, per quasi tutti i numeri positivi* $t < \tau$ *risulti:*

$$\lim_{h \to \infty} \int_{\mathcal{F} C_t} | \varphi(x, \delta_{\varrho'_h} E) - \varphi(x, L) | \, dH_{n-1} = 0 \tag{7.5}$$

$$\lim_{h \to \infty} \psi(\delta_{\varrho'_h} E, C_t) = \psi(L, C_t) = 0 \tag{7.6}$$

$$\lim_{h \to \infty} \int_{C_t} | D\varphi(x, \delta_{\varrho'_h} E) | = \int_{C_t} | D\varphi(x, L) | . \tag{7.7}$$

DIMOSTRAZIONE. Per le (7.3) può trovarsi una successione subordinata $\{\varrho'_h\}$ verificante le:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \int_{R^n} | \varphi(x, \delta_{\varrho'_h} E \cap C_\tau) - \varphi(x, L) | \, dx < +\infty. \tag{7.8}$$

Integrando per serie (la cosa è possibile trattandosi di termini non negativi) si ha: ([15])

$$\int_{R^n} \sum_{h=1}^{\infty} | \varphi(x, \delta_{\varrho'_h} E \cap C_\tau) - \varphi(x, L) | \, dx < +\infty. \tag{7.9}$$

([15]) Per funzioni reali estese non negative $f(x)$, l'integrale $\int_{R^n} f(x)\, dx$ è definito dalle:

$$\int_{R^n} f(x)\, dx = \int_{R^n - N} f(x)\, dx \qquad \text{se mis } N = 0$$

$$\int_{R^n} f(x)\, dx = +\infty \qquad \text{se mis } N \neq 0$$

ove si è posto:

$$N = \{x ; f(x) = +\infty\}.$$

Dalla (7.9) segue:

$$\int_0^{+\infty} dt \int_{\mathcal{F}C_t} \sum_{h=1}^{\infty} |\varphi(x, \delta_{\varrho'_h} E \cap C_\tau) - \varphi(x, L)| \, dH_{n-1} < +\infty \tag{7.10}$$

e quindi per quasi tutti i numeri $t < \tau$,

$$\int_{\mathcal{F}C_t} \sum_{h=1}^{\infty} |\varphi(x, \delta_{\varrho'_h} E) - \varphi(x, L)| \, dH_{n-1} = \tag{7.11}$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \int_{\mathcal{F}C_t} |\varphi(x, \delta_{\varrho'_h} E) - \varphi(x, L)| \, dH_{n-1} < +\infty.$$

Ne segue immediatamente la (7.5).

Inoltre, dalla (7.5) segue pure per il Teor. IX:

$$\lim_{i \to \infty} \vartheta(\delta_{\varrho_i} E, C_t) = \vartheta(L, C_t). \tag{7.12}$$

Dalle (7.3) e dal Teorema di semicontinuità segue poi:

$$\min_{h \to \infty} \lim P[\delta_{\varrho'_h}(E \cap C_t)] \geq P(L \cap C_t). \tag{7.13}$$

Tenendo conto della (2.12), si trova:

$$\int_{C_t} |D\varphi(x, L)| \leq \min_{i \to \infty} \lim \int_{C_t} |D\varphi(x, \delta_{\varrho'_i} E)|. \tag{7.14}$$

D'altra parte, per le (7.1), (7.4), (7.2), si ha:

$$\lim_{h \to \infty} \psi(\delta_{\varrho'_h} E, C_t) = 0. \tag{7.15}$$

Confrontando le (7.14), (7.12), (7.15) e ricordando le (3.4) e (3.5), si ha:

$$\psi(L, C_t) = 0. \tag{7.16}$$

Confrontando infine le (7.12), (7.15), (7.16) con le (3.4) e (3.5) si ottiene il teorema. c.v.d.

TEOREMA XVI. *Nelle ipotesi già enunciate all'inizio del* n. 7, *l'origine* 0 *dello spazio* R^n *è punto singolare della frontiera orientata di* L, *cioé :*

$$0 \in \mathcal{F}_e L - \mathcal{F}^* L = \overline{\mathcal{F}^* L} - \mathcal{F}^* L. \tag{7.17}$$

DIMOSTRAZIONE. Per le (3.16) e per la (7.4), se è verificata la condizione :

$$\psi(E, C_\varrho) = 0 \tag{7.18}$$

deve essere :

$$\int_{C_\varrho} |D\varphi(x, E)| - \left| \int_{C_\varrho} D\varphi(x, E) \right| \geq \sigma(n)\, \varrho^{n-1} \tag{7.19}$$

ove $\sigma(n)$ è una costante che dipende solo dalla dimensione dello spazio. Dato ora un numero positivo $t \leq \tau$, per le (7.1), (7.2) avremo :

$$\psi(\delta_{\varrho_h} E, C_t) = 0 \tag{7.20}$$

per h abbastanza grande.

Dalle (7.19) si deduce allora, sempre per h abbastanza grande :

$$\int_{C_t} |D\varphi(x, \delta_{\varrho_h} E)| - \left| \int_{C_t} D\varphi(x, \delta_{\varrho_h} E) \right| \geq \sigma(n)\, t^{n-1}. \tag{7.21}$$

Dalla (7.21), ricordando le (7.5), (7.7) del Teorema XV e la formula (2.16), si ricava :

$$\int_{C_t} |D\varphi(x, L)| - \left| \int_{C_t} D\varphi(x, L) \right| \geq \sigma(n)\, t^{n-1} \tag{7.22}$$

per quasi ogni t positivo $< \tau$.

Dalle (7.22) segue subito la (7.17); infatti, se l'origine non appartenesse ad $\mathcal{F}_e E$, avremmo :

$$\lim_{t \to 0} t^{1-n} \int_{C_t} |D\varphi(x, L)| = 0 \,; \tag{7.23}$$

se l'origine appartenesse ad $\mathcal{F}^* E$ avremmo:

$$\lim_{t\to 0} t^{1-n} \int_{C_t} |D\varphi(x, L)| = \lim_{t\to 0} t^{1-n} \left| \int_{C_t} D\varphi(x, L) \right| = \omega_{n-1}. \qquad \text{c.v.d.} \tag{7.24}$$

TEOREMA XVII. *Nelle ipotesi già enunciate all'inizio del* n^0 7, *esiste un insieme* $N \subset R$ *di misura lineare nulla tale che, nell'ipotesi:*

$$0 < \varrho < \tau, \quad 0 < r < \tau, \quad \varrho \notin N, \; r \notin N. \tag{7.25}$$

sia:

$$\int_{\mathcal{F}C_\varrho} \left| \varphi\left(\frac{r}{\varrho} x, L\right) - \varphi(x, L) \right| dH_{n-1} = 0. \tag{7.26}$$

DIMOSTRAZIONE. Detto t un numero positivo tale che sia verificata la:

$$\psi(E, C_t) = 0 \tag{7.27}$$

e posto, per $0 < z < t$:

$$g(z) = z^{1-n} \int_{C_z} |D\varphi(x, E)| \tag{7.28}$$

per il Teor. XI, avremo che $g(z)$ è una funzione non decrescente e quindi esiste il

$$\lim_{z\to 0} z^{1-n} \int_{C_z} |D\varphi(x, E)| = b. \tag{7.29}$$

Ricordando la (7.7) e la (5.15) si trova:

$$b = t^{1-n} \int_{C_t} |D\varphi(x, L)| \tag{7.30}$$

per quasi tutti i numeri positivi $t < \tau$.

Dalla (7.30) e dal Teor. X segue la (7.26) che dimostra il teorema. c.v.d.

La (7.26) ci assicura che L è, a meno di insiemi di misura nulla, l'intersezione di un cono con vertice nell'origine e di una sfera di centro nell'origine; infatti L è equivalente all'insieme L^* ottenuto fissando un numero

ϱ che verifica le (7.25) e ponendo:

$$\varphi(x, L^*) = 0 \qquad \text{per } |x| > \tau, \tag{7.31}$$

$$\varphi(x, L^*) = \varphi\left(\frac{x}{|x|}\varrho, L\right) \qquad \text{per } 0 < |x| < \tau, \tag{7.32}$$

$$\varphi(0, L^*) = 0. \tag{7.33}$$

Possiamo perciò concludere con il seguente:

TEOREMA XVIII. *Se E è un insieme di Caccioppoli di R^n, A è un aperto, ξ è un punto di R^n, e sono verificate le:*

$$\psi(E, A) = 0, \quad \xi \in A \cap (\mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E) \tag{7.34}$$

allora esiste un insieme L^*, intersezione di un cono con il vertice nell'origine e di una sfera di centro nell'origine e di raggio positivo τ, tale che, per $t < \tau$ risulti:

$$\psi(L^*, C_t) = 0, \tag{7.35}$$

ed inoltre l'origine sia punto singolare per la frontiera orientata di L^*, cioè:

$$0 \in \mathcal{F}_e L^* - \mathcal{F}^* L^*. \tag{7.35}$$

In successivi lavori mostreremo come questo teorema permette di escludere, in molti casi interessanti, la esistenza di punti singolari di frontiere orientate di misura minima.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. CACCIOPPOLI: *Misura ed integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati.* Rend. Acc. Naz. dei Lincei, VIII, vol. 12, fasc. 1-2 (1952).

[2] E. DE GIORGI: *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio ad* r *dimensioni.* Annali di Matematica. Serie IV, Vol. 36, (1954).

[3] E. DE GIORGI: *Nuovi teoremi relativi alle misure* $(r-1)$*-dimensionali in uno spazio ad* r *dimensioni.* Ricerche di Matematica. Vol. IV, (1955).

[4] E. DE GIORGI: *Complementi alla teoria della misura* $(n-1)$*-dimensionale in uno spazio* n*-dimensionale* Seminario di Matematica. Scuola Normale Superiore di Pisa (1960-61).

[5] E. DE GIORGI: *Frontiere orientate di misura minima.* Seminario di Matematica. Scuola Normale Superiore di Pisa (1960-61).

[6] H. FEDERER: *Measure and area.* Bull. of the Am. Math. Soc. Vol. 58 (1952) pag. 306-378.

[7] H. FEDERER: *A note on the Gauss-Green theorem.* Proc. of the Am. Math. Soc. Vol. 9, (1958).

[8] H. FEDERER - W. H. FLEMING: *Normal and Integral Currents.* Annals of Mathematics, Vol. 72, n^0 3, (1960).

[9] E. R. REIFENBERG: *The Plateau Problem.* Acta Mathematica, 104: 1, 2 (1960).

[10] W. H. FLEMING: *On the oriented Plateau Problem.* Amer. Math. Soc. Vol. 8, n^0 3, (1961).