ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. TOGNOLI

Osservazioni sulle applicazioni continue fra varietà topologiche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 1 (1964), p. 67-85
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_1_67_0>

OSSERVAZIONI SULLE APPLICAZIONI CONTINUE FRA VARIETÀ TOPOLOGICHE (*)

di A. TOGNOLI (Pisa)

INTRODUZIONE

Il presente lavoro è dedicato allo studio di alcune proprietà delle applicazioni continue fra varietà topologiche.

Date due varietà siffatte V e W ed un'applicazione continua f di V su W, che sia un omeomorfismo fuori da un insieme $S \subset V$, studieremo i legami fra i gruppi di omologia di V e di W in relazione ad S.

Tale studio è stato intrapreso da A. Aeppli in [1] nel caso in cui V e W siano varietà triangolabili compatte e l'insieme dei punti singolari di f sia un sottocomplesso di V.

In tali ipotesi egli riesce ad esplicitare tali legami ed a caratterizzare f dal punto di vista omologico.

In questo lavoro, sfruttando l'omologia definita da Borel-Moore ed alcuni risultati ad essa inerenti, si provano — anche nel caso in cui le varietà siano non compatte e l'insieme dei punti singolari sia un retratto assoluto di intorni — formule analoghe a quelle date da Aeppli.

Per mezzo di queste relazioni dedurremo risultati di due tipi:

1⁰) alcune condizioni cui deve soddisfare la codimensione dell'insieme S dei punti singolari dell'applicazione $f: V \longrightarrow W$, di rango 1, fra varietà topologiche.

2⁰) data una successione $V_0, V_1 \dots V_n \dots\dots$ di spazi complessi e di applicazioni olomorfe $V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1}$ si determinano delle condizioni sufficienti affinchè, da un certo indice in poi, le f_i siano omeomorfismi.

Pervenuto alla Redazione il 29 Agosto 1963.

(*) Lavoro eseguito nel Gruppo di Ricerca n. 35 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, per l'anno 1962-63.

Nel § 1 ricorderemo alcune proprietà dei gruppi di omologia definiti da Borel-Moore. Nel § 2 stabiliremo, sotto ipotesi generali, le relazioni fra i gruppi di omologia e coomologia che utilizzeremo nel seguito.

Nel § 3 troveremo alcuni criteri sufficienti per la validità delle ipotesi introdotte nel § 2.

Infine nel § 4 dimostreremo i risultati sopra enunciati.

1. — NOTAZIONI

Sia V uno spazio topologico. Se $S \subset V$ indicheremo con $\overline{S}$, $\mathring{S}$ e ∂S rispettivamente la chiusura, la parte interna e la frontiera di S.

Con la notazione $H_n(V)$ o $H^n(V)$ indicheremo rispettivamente l'ennesimo gruppo di omologia o di coomologia singolare di V a valori nel gruppo additivo Z degli interi.

Noteremo con $H_n(V, K)$ o $H^n(V, K)$ l'ennesimo gruppo di omologia o di coomolagia singolare di V a valori in un corpo K. Indicheremo con $H_*(V)$, $H^*(V)$, $H_*(V, K)$, $H^*(V, K)$ le somme dirette dei gruppi sopra definiti.

Diremo che l'omologia dello spazio V è di tipo finito, rispetto al corpo K, se $\dim_K H_*(V, K) < \infty$.

Dati due spazi topologici V, W ed un'applicazione continua $f\colon V \longrightarrow W$, indicheremo con $f_q\colon H_q(V) \longrightarrow H_q(W)$ ed $f^q\colon H^q(W) \longrightarrow H^q(V)$ gli omomorfismi indotti da f e con f_*, f^* le loro somme dirette.

Useremo gli stessi simboli per gli omomorfismi indotti sui gruppi dell'omologia e coomologia a coefficienti in un corpo.

§ 1. L'omologia di Borel-Moore.

2. Per comodità del lettore ricordiamo, in questo primo paragrafo, alcune proprietà dei gruppi di omologia definiti da Borel-Moore in [4].

Indichiamo con $H'_*(V, K) = \bigoplus\limits_n H'_n(V, K)$ e $H_c^*(V, K) = \bigoplus\limits_n H_c^n(V, K)$ i gruppi di omologia di Borel-Moore e di coomologia a supporti compatti, a valori nel corpo K.

Vale la seguente

PROPOSIZIONE 1. *Se gli spazi in questione sono localmente compatti si ha:*

1) *Ogni applicazione continua e propria* $f\colon V \longrightarrow W$ *induce un omomorfismo* $f_*\colon H'_*(V, K) \longrightarrow H'_*(W, K)$. *Se* $g\colon W \longrightarrow T$ *è un'altra applicazione continua e propria risulta* $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

2) *Data un'applicazione continua e propria* $f: V \to W$, *sia* $A \subset W$ *un chiuso di* W *ed* $S = f^{-1}(A)$. *Si ha il diagramma a righe esatte e quadrati commutativi:*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\to H'_q(S,K) & \to & H'_q(V,K) & \to & H'_q(V-S,K) & \to & H'_{q-1}(S,K) & \to \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\to H'_q(A,K) & \to & H'_q(W,K) & \to & H'_q(W-A,K) & \to & H'_{q-1}(A,K) & \to
\end{array}
$$

3) *Sia* $F: V \times I \to W$ *un'applicazione continua e propria. Posto*

$$f_0 = F|_{t=0}, f_1 = F|_{t=1} \text{ vale } (f_0)_* = (f_1)_* .$$

4) *Se* $V = V_1 \cup V_2$ *e* V_1, V_2 *sono chiusi in* V, *si ha la successione esatta (di Mayer-Vietoris):*

$$\to H'_q(V_1 \cap V_2, K) \to H'_q(V_1, K) \oplus H'_q(V_2, K) \to H'_q(V, K) \to$$

$$\to H'_{q-1}(V_1 \cap V_2, K) \to$$

5) *Se* V *è uno spazio triangolabile, compatto risulta* $H'_*(V,K) \simeq H_*(V,K)$.

6) *Se* $\dim_R V = q$ *risulta* $H'_p(V,K) \simeq \{o\}$ *per* $p > q$.

7) *Se* V, W *sono varietà orientabili di dimensione* n, *esistono degli isomorfismi naturali* $\sigma_q : H'_q(V,K) \to H_c^{n-q}(V,K)$, $\sigma_q: H'_q(W,K) \to H_c^{n-q}(W,K)$. *Se* $f: V \to W$ *è un'applicazione continua, propria di grado* p, *l'omomorfismo*

$$f_q \circ \sigma_{n-q}^{-1} \circ f^{n-q} \circ \sigma_q$$

coincide; a meno della costante moltiplicativa p *con l'omomorfismo identico* $H'_q(W,K) \to H'_q(W,K)$.

8) *Se* V *è uno spazio metrico, compatto e localmente contrattile, si ha:* $\dim_K H'_*(V,K) < \infty$.

9) *Se* V *è un insieme analitico reale di dimensione* n *allora* $H'_n(V, Z_2) \neq \{o\}$; *se* W *è un insieme analitico complesso, di dimensione reale* n, *risulta anche* $H'_n(W,R) \neq \{o\}$.

Per la dimostrazione di 1), 2), 3), 4), 5), 6), 8) vedasi [4];

7) è dimostrato in [2], teorema 2.2, e 9) in [3].

Proprietà duali valgono per la coomologia a supporti compatti.

Sarà utile per il seguito la seguente

OSSERVAZIONE. Sia $f: V \to W$ un'applicazione continua, propria, fra spazi topologici localmente compatti.

Sia $A \subset W$ un chiuso, tale che $f|_{V-f^{-1}(A)}$ sia un omeomorfismo. Posto $S = f^{-1}(A)$, si ha il diagramma a righe esatte e quadrati commutativi:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\rightarrow H'_q(S, K) & \rightarrow & H'_q(V, K) & \rightarrow & H'_q(V - S, K) & \rightarrow & H'_{q-1}(S, K) & \rightarrow \\
\downarrow & & \downarrow & & g_q \downarrow & & \downarrow & \\
\rightarrow H'_q(A, K) & \rightarrow & H'_q(W, K) & \rightarrow & H'_q(W - A, K) & \rightarrow & H'_{q-1}(A, K) & \rightarrow
\end{array}$$

in cui g_q è un isomorfismo.

Analogo risultato vale per la coomologia a supporti compatti.

§ 2. Il caso dell'omologia singolare.

3. Nel seguito (§ 3) studieremo le applicazioni continue surgettive $f: V \rightarrow W$, fra spazi compatti, metrizzabili, per le quali esiste un chiuso, non denso, $A \subset W$ tale che, detto $S = f^{-1}(A)$, $f|_{V-S}$ sia biunivoca ed esista un intorno U_S di S contrattile su S.

In questo paragrafo considereremo le applicazioni continue $f: V \rightarrow W$ per cui siano verificate le seguenti condizioni più deboli. Esiste un chiuso $A \subset W$ tale, detto $S = f^{-1}(A)$:

α) A possiede in W un intorno U_A per cui, posto $U_S = f^{-1}(U_A)$, le inclusioni naturali $i: A \rightarrow U_A$, $j: S \rightarrow U_S$ inducono degli isomorfismi i_*, j_*, i^*, j^* fra i corrispondenti gruppi di omologia e coomologia

β) gli omomorfismi f_* ed f^* indotti dalle restrizioni $f: U_S - S \rightarrow U_A - A$, $f: V - S \rightarrow W - A$ sono isomorfismi

LEMMA 1. *Sia data un'applicazione continua $f: V \rightarrow W$; sia $A \subset W$ un chiuso per cui siano verificate le ipotesi α), β) e sia $S = f^{-1}(A)$. In queste ipotesi gli omomorfismi indotti da f;*

$$g_*: H_*(V \bmod S) \rightarrow H_*(W \bmod A)$$

$$g^*: H^*(W \bmod A) \rightarrow H^*(V \bmod S)$$

sono isomorfismi.

PROVA. Consideriamo il diagramma a righe esatte e quadrati commutativi:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\rightarrow H_q(S) & \rightarrow & H_q(V) & \rightarrow & H_q(V \bmod S) & \rightarrow & H_{q-1}(S) & \rightarrow & H_{q-1}(V) & \rightarrow \\
\downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & \downarrow \gamma & & \downarrow i_3 & & \downarrow i_4 & \\
\rightarrow H_q(U_S) & \rightarrow & H_q(V) & \rightarrow & H_q(V \bmod U_S) & \rightarrow & H_{q-1}(U_S) & \rightarrow & H_{q-1}(V) & \rightarrow
\end{array}$$

Per le ipotesi fatte i_1, i_2, i_3, i_4 sono isomorfismi, quindi, per il lemma dei « cinque », l'omomorfismo γ, indotto dalle immersioni $S \to U_S$, $V \to V$ è un isomorfismo.

Analogamente si prova che $\gamma' : H_*(W \bmod A) \to H_*(W \bmod U_A)$, indotto dalle immersioni $A \to U_A$, $W \to W$, è un isomorfismo.

Per il tearema di excisione si hanno gli isomorfismi:

$$\varepsilon : H_*(V - S \bmod U_S - S) \to H_*(V \bmod U_S)$$

$$\varepsilon' : H_*(W - A \bmod U_A - A) \to H_*(W \bmod U_A).$$

In virtù degli isomorfismi dell'ipotesi β), applicando ancora il lemma dei « cinque », si prova che l'omomorfismo indotto da f:

$$\sigma : H_*(V - S \bmod U_S - S) \to H_*(W - A \bmod U_A - A)$$

è un isomorfismo.

Si è dunque provato che:

$$\gamma'^{-1} \circ \varepsilon' \circ \sigma \circ \varepsilon^{-1} \circ \gamma : H_*(V \bmod S) \to H_*(W \bmod A)$$

è un isomorfismo.

Poichè $\gamma, \gamma', \varepsilon, \varepsilon'$ sono indotti dall'applicazione identica e σ è indotto da f, tale isomorfismo composto coincide con g_*.

Analoga è la dimostrazione nel caso della coomologia.

4. Osserviamo che, dato il diagramma commutativo, a righe esatte, di moduli su un anello A:

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\alpha_{q+1}} & B_q & \xrightarrow{\alpha_q} & B_{q-1} & \xrightarrow{\alpha_{q-1}} \\ & \downarrow g_q & & \downarrow g_{q-1} & \\ \xrightarrow{\alpha'_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\alpha'_q} & C_{q-1} & \xrightarrow{\alpha'_{q-1}} \end{array}$$

se g_q e g_{q-1} sono isomorfismi, allora $\operatorname{im} \alpha_{q-1} \simeq \operatorname{im} \alpha'_{q-1}$, $\operatorname{im} \alpha_{q+1} \simeq \operatorname{im} \alpha'_{q+1}$.

Sia data un'applicazione continua $f : V \to W$, esista un chiuso $A \subset W$, tale che, essendo $S = f^{-1}(A)$, siano verificate le ipotesi α), β).

Consideriamo il seguente diagramma a righe esatte e quadrati commutativi:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \to H_{q+1}(S) & \xrightarrow{i_{q+1}} & H_{q+1}(V) & \xrightarrow{p_{q+1}} & H_{q+1}(V \bmod S) & \xrightarrow{\delta_q} & H_q(S) & \xrightarrow{i_q} & H_q(V) & \xrightarrow{p_q} & H_q(V \bmod S) \to \\ \downarrow & & \downarrow f_{q+1} & & \downarrow g_{q+1} & & \downarrow & & \downarrow f_q & & \downarrow g_q \\ \to H_{q+1}(A) & \xrightarrow{i'_{q+1}} & H_{q+1}(W) & \xrightarrow{p'_{q+1}} & H_{q+1}(W \bmod A) & \xrightarrow{\delta'_q} & H_q(A) & \xrightarrow{i'_q} & H_q(W) & \xrightarrow{p'_q} & H_q(W \bmod A) \to \end{array}$$

PROPOSIZIONE 2. a) *nella successione* $H_q(S) \xrightarrow{i_q} H_q(V) \xrightarrow{f_q} H_q(W)$ *risulta:* $\operatorname{Ker} f_q \subset \operatorname{im} i_q$; *se inoltre* $H_q(A) \simeq \{o\}$ *la successione è esatta.*

b) *Se* $H_{q+1}(S) \simeq \{o\}$, f_{q+1} *è iniettivo; se* f_{q+1} *è un isomorfismo ed* $H_q(A) \simeq \{o\}$, *si ha* $H_q(S) \simeq \operatorname{Ker} f_q$.

PROVA. a) Per il lemma 1, g_q e g_{q+1} sono isomorfismi.

Se $x \in \operatorname{Ker} f_q$ si ha $g_q(p_q(x)) = p'_q(f_q(x)) = 0$; essendo g_q un isomorfismo, quanto detto implica $p_q(x) = 0$ e perciò, per l'esattezza delle righe, $x \in \operatorname{im} i_q$. Si è così provato che $\operatorname{Ker} f_q \subset \operatorname{im} i_q$.

Se $H_q(A) \simeq \{o\}$, preso $x \in \operatorname{im} i_q$ si ha: $p'_q(f_q(x)) = g_q(p_q(x)) = 0$ in quanto le righe sono esatte. Essendo $H_q(A) \simeq \{o\}$ p'_q è iniettivo. Quindi da $p'_q(f_q(x)) = 0$ si deduce $f_q(x) = 0$, e questo prova che $\operatorname{Ker} f_q = \operatorname{im} i_q$.

b) Sia $H_{q+1}(S) \simeq \{o\}$ allora $\operatorname{Ker}(g_{q+1} \circ p_{q+1}) \simeq \{o\}$, ma $g_{q+1} \circ p_{q+1} = p'_{q+1} \circ f_{q+1}$ e quindi $\operatorname{Ker} f_{q+1} \simeq \{o\}$.

Se f_{q+1} è un isomorfismo, per l'osservazione che precede la proposizione si ha: $\operatorname{im} \delta_q \simeq \operatorname{im} \delta'_q$. Se $H_q(A) \simeq \{o\}$ ne segue $\operatorname{im} \delta_q \simeq \{o\}$, e quindi si ha la successione esatta:

$$0 \longrightarrow H_q(S) \xrightarrow{i_q} H_q(V) \xrightarrow{f_q} H_q(W) \text{ che prova la tesi.}$$

Passando alla coomologia, supponendo ancora che $f: V \longrightarrow W$, $A \subset W$ e $S = f^{-1}(A)$ soddisfino le ipotesi α) e β), consideriamo il diagramma a righe esatte e quadrati commutativi:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\longrightarrow & H^q(W \bmod A) & \xrightarrow{i^q} & H^q(W) & \xrightarrow{p^q} & H^q(A) & \xrightarrow{\delta^q} & H^{q+1}(W \bmod A) & \xrightarrow{i^{q+1}} & H^{q+1}(W) & \xrightarrow{p^{q+1}} & H^{q+1}(A) & - \\
& \downarrow g^q & & \downarrow f^q & & \downarrow & & \downarrow g^{q+1} & & \downarrow f^{q+1} & & \downarrow & \\
\longrightarrow & H^q(V \bmod S) & \xrightarrow{i^{q'}} & H^q(V) & \xrightarrow{p^{q'}} & H^q(S) & \xrightarrow{\delta^{q'}} & H^{q+1}(V \bmod S) & \xrightarrow{i^{q+1'}} & H^{q+1}(V) & \xrightarrow{p^{q+1'}} & H^{q+1}(S) & -
\end{array}$$

Vale la:

PROPOSIZIONE 2'. a) *Nella successione* $H^q(W) \xrightarrow{f^q} H^q(V) \xrightarrow{p^{q'}} H^q(S)$ *vale* $\operatorname{Ker} p^{q'} \subset \operatorname{im} f^q$; *se di più* $H^q(A) = \{o\}$, *allora la successione è esatta.*

b) *Se* $H^{q+1}(S) \simeq \{o\}$, f^{q+1} *è surgettiva; se* f^{q+1} *è un isomorfismo ed* $H^q(A) \simeq \{o\}$ *allora* $H^q(S) \simeq H^q(V)/\operatorname{im} f^q$.

La dimostrazione è del tutto analoga a quella della proposizione 2.

5. Se V^n è una varietà compatta, orientabile, di dimensione n si hanno gli isomorfismi di Poincaré: $\sigma_q : H_q(V, R) \longrightarrow H^{n-q}(V, R)$.

Se $f: V^n \longrightarrow W^n$ è un'applicazione continua di grado p fra varietà orientabili, compatte, di dimensione n si può definire lo Umkehrung homomorphismus di Hopf:

$$H_q(W, R) \xrightarrow{\sigma_q} H^{n-q}(W, R) \xrightarrow{f^{n-q}} H^{n-q}(V, R) \xrightarrow{\sigma_{n-q}^{-1}} H_q(V, R)$$

e si prova che l'omomorfismo $f_q \circ (\sigma_{n-q}^{-1} \circ f^{n-q} \circ \sigma_q)$ coincide a meno della costante moltiplicativa p con l'omomorfismo identico $H_q(W, R) \longrightarrow H_q(W, R)$.

Noi diremo che l'applicazione $f: V \longrightarrow W$ verifica la proprietà γ) nella dimensione n, rispetto al corpo K, se:

γ) sono definiti degli isomorfismi

$$\sigma_q : H_q(V, K) \longrightarrow H^{n-q}(V, K), \qquad \sigma_q : H_q(W, K) \longrightarrow H^{n-q}(W, K)$$

tali che l'omomorfismo $f_q \circ \sigma_{n-q}^{-1} \circ f^{n-q} \circ \sigma_q : H_q(W, K) \longrightarrow H_q(W, K)$ coincide, a meno di una costante moltiplicativa $p \neq o$, con l'identità.

PROPOSIZIONE 3. *Se $f: V \longrightarrow W$ verifica la proprietà γ), nella dimensione n rispetto al corpo K:*

i) $f_* : H_*(V, K) \longrightarrow H_*(W, K)$ *è surgettiva*

ii) $f^* : H^*(W, K) \longrightarrow H^*(V, K)$ *è iniettiva*

iii) *se le omologie di V e W sono di tipo finito rispetto a K, si ha:*

$$\operatorname{Ker} f_q = H^{n-q}(V, K)/\operatorname{im} f^{n-q}$$

iv) *nelle ipotesi di* iii): *f_q è un isomorfismo se, e solo se, f^{n-q} è un isomorfismo.*

Prova i) Posto $\chi_q = \sigma_{n-q}^{-1} \circ f^{n-q} \circ \sigma_q$, $\chi_q : H_q(W, K) \longrightarrow H_q(V, K)$, se $x \in H_q(W, K)$ si ha: $x = f_q\left(\frac{1}{p} \cdot \chi_q(x)\right)$.

ii) $\chi = \bigoplus_q \chi_q$; si ha: $\operatorname{Ker} \chi \simeq \{o\}$, in quanto $\frac{1}{p}(f_* \circ \chi) = id.$ Per definizione $\chi = \sigma^{-1} \circ f^* \circ \sigma$, ed essendo σ un isomorfismo, si deduce $\operatorname{Ker} f^* \simeq \{o\}$.

iii) Per quanto visto in i) si ha la successione esatta:

$$H_q(V, K) \xrightarrow{f_q} H_q(W, K) \longrightarrow O \text{ onde}: H_q(V, K)/\operatorname{Ker} f_q \simeq H_q(W, K) = \operatorname{im} f_q .$$

Ne consegue che $\operatorname{Ker} f_q \simeq H_q(V, K)/\operatorname{im} f_q$. Applicando l'isomorfismo σ_q si ottiene

$$\operatorname{Ker} f_q \simeq \sigma_q(H_q(V, K))/\sigma_q(\operatorname{im} \chi_q) = H^{n-q}(V, K)/\operatorname{im} f^{n-q}$$

e ciò conclude la dimostrazione.

iv) Per i) f_q è un isomorfismo se, e solo se, Ker $f_q \simeq \{o\}$; per iii) Ker $f_q \simeq H^{n-q}(V, K)/\mathrm{im} f^{n-q}$; l'annullarsi del secondo membro è, per ii), la condizione necessaria e sufficiente affinchè f^{n-q} sia un isomorfismo e da ciò segue la tesi.

COROLLARIO 1. *Supponiamo che l'applicazione continua $f: V \to W$ sia tale che il chiuso $A \subset W$ ed $S = f^{-1}(A)$ verifichino le ipotesi α), β).*

Supponiamo inoltre che f soddisfi la proprietà γ) nella dimensione n, rispetto al corpo K e che le omologie di V, W siano di tipo finito. In queste ipotesi se f_{q+1}, f_{q-1} sono isomorfismi ed $H_q(A, K) \simeq H^{n-q}(A, K) \simeq \{o\}$, risulta $H_q(S, K) \simeq H^{n-q}(S, K)$.

PROVA. Se $H_q(A, K) \simeq \{o\}$ e f_{q+1} è un isomorfismo si ha, per la proposizione 2, *b*): $H_q(S, K) \simeq$ Ker f_q e quindi, per la proposizione 3, iii): $H_q(S, K) \simeq H^{n-q}(V, K)/\mathrm{im} f^{n-q}$. Essendo f_{q-1} un isomorfismo tale è anche f^{n-q+1}; essendo poi $H^{n-q}(A, K) \simeq \{o\}$, per la proposizione 2′ b), si ha: $H^{n-q}(S, K) \simeq H^{n-q}(V, K)/\mathrm{im} f^{n-q} \simeq H_q(S, K)$.

COROLLARIO 2. *Nelle stesse ipotesi del corollario 1, detto η: $H_q(S, K) \to H_q(A, K)$ l'omomorfismo indotto da f, se* Ker $\eta \neq \{o\}$ *allora $H^{n-q}(S, K) \neq \{o\}$.*

PROVA. Consideriamo il diagramma a righe esatte e quadrati commutativi:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\to & H_{q+1}(V, K) & \xrightarrow{p_{q+1}} & H_{q+1}(V \bmod S, K) & \xrightarrow{\delta_q} & H_q(S, K) & \xrightarrow{i_q} & H_q(V, K) & \to & H_q(V \bmod S, K) & \to \\
& \downarrow f_{q+1} & & \downarrow g_{q+1} & & \downarrow \eta & & \downarrow f_q & & \downarrow g_q & \\
\to & H_{q+1}(W, K) & \xrightarrow{p'_{q+1}} & H_{q+1}(W \bmod A, K) & \xrightarrow{\delta'_q} & H_q(A, K) & \xrightarrow{i'_q} & H_q(W, K) & \to & H_q(W \bmod A, K) & \to
\end{array}$$

Per il lemma 1 g_q e g_{q+1} sono isomorfismi, per la proposizione 3, i) f_q e f_{q+1} sono surgettivi.

Dimostriamo che, se f_q è un isomorfismo, si ha Ker $\eta \simeq \{o\}$.

Sia $x \in$ Ker η. Per la commutatività $f_q(i_q(x)) = 0$, quindi, per l'iniettività di f_q, risulta $i_q(x) = 0$ e perciò, per l'esattezza delle righe $x = \delta_q(y)$ con $y \in H_q(V \bmod S, K)$.

Si ha $\delta'_q(g_{q+1}(y)) = 0$, quindi $g_{q+1}(y) \in \mathrm{im}\, p'_{q+1}$. Poichè f_{q+1} è surgettivo esiste $W \in H_{q+1}(V, K)$ tale che

$$\delta_q(g_{q+1}^{-1}(p'_{q+1}(f_{q+1}(w)))) = x = \delta_q(p_{q+1}(w)) = 0$$

Si è così provato che nelle nostre ipotesi deve essere Ker $f_q \neq \{o\}$ il che implica, per la proposizione 3, iii) che f^{n-q} non è surgettiva e perciò, per la proposizione 2', a): $H^{n-q}(S, K) \neq \{o\}$. Ciò conclude la dimostrazione del corollario.

§ 3. Alcuni criteri topologici per riconoscere la validità delle ipotesi α), β).

6. *Tutti gli spazi topologici di cui tratteremo in questo paragrafo sono supposti metrizzabili, a base numerabile e connessi per archi.* Data un'applicazione continua surgettiva fra spazi topologici $f: V \to W$, diremo che un chiuso $A \subset W$ verifica l'ipotesi β') se la restrizione:

β') $$f: V - f^{-1}(A) \to W - A \text{ è biunivoca.}$$

Osserviamo subito che, se V è compatto, β') implica β); in questo caso infatti, posto $S = f^{-1}(A)$, se U_S è un aperto contenente S, per un noto teorema di topologia $f: V - U_S \to W - f(U_S)$ è un omeomorfismo. Per l'arbitrarietà di U_S si può concludere che $f: V - S \to W - A$ è un omeomorfismo.

Dimostreremo, (lemma 2), che, data $f: V \to W$, se V è compatto ed A verifica β'), la proprietà α) vale non appena esiste un intorno U_S di S contrattile su S. Il nostro problema si riduce così a trovare delle condizioni che garantiscano l'esistenza di un intorno di S in V che sia contrattile su S.

Lemma 2. *Sia data l'applicazione continua $f: V \to W$ fra spazi topologici compatti, siano $A \subset W$ ed $S = f^{-1}(A)$ dei chiusi per cui sia verificata l'ipotesi β'). Se U_S è un intorno di S, $f(U_S)$ è un intorno di A; se inoltre U_S è contrattile su S, $f(U_S)$ è contrattile su A.*

Prova. Sia, per assurdo, A non interno a $f(U_S)$, allora esiste un $x \in A$ a cui converge una successione $\{x_i\}$, $x_i \notin f(U_S)$. Valendo la proprietà β'), i punti $y_i = f^{-1}(x_i)$ di $V - S$ sono univocamente determinati. Per la compattezza di V esisterà una sottosuccessione $\{y_{i_j}\}$ di $\{y_i\}$ convergente ad un punto y di V. La f è continua, quindi $f(y) = x$ e perciò $y \in S$; ma questo è impossibile perchè $y = \lim_{i_j \to \infty} y_{i_j}$ ed $y_{i_j} \notin U_S$. Si è così provato che $f(U_S)$ è un intorno di S.

Sia $F: U_S \times I \to U_S$ una contrazione di U_S ad S; cioè

$$F_{|t=0} = id, \quad F(U_S \times 1) = S, \quad F_{|S \times t} = id \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Definiamo $G: f(U_S) \times I \to f(U_S)$ nel seguente modo: $G(x \times t) = f(F(\delta(x) \times t))$ ove $\delta(x)$ è uno dei punti di U_S per cui $f(\delta(x)) = x$.

G è ben definita e verifica le condizioni: $G_{|t=0} = id$,

$$G(f(U_S) \times 1) = A, \quad G_{|A\times t} = id \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Per provare il lemma basta dimostrare che G è continua, cioè, che per ogni successione convergente $\{x_i \times t_i\}$ di $f(U_S) \times I$, si ha:

$$\lim_{i\to\infty} G(x_i \times t_i) = G(\lim_{i\to\infty} x_i \times t_i) \tag{1}$$

Sia $\bar{x} \times \bar{t} = \lim_{i\to\infty} x_i \times t_i$; se $\bar{x} \times \bar{t} \in f(U_S - S) \times \bar{t}$ si può supporre $x_i \in f(U_S - S)$ per ogni i. Essendo la restrizione $f: V - S \to W - A$ un omeomorfismo, ed F continua, se $\bar{x} \times \bar{t} \in f(U_S - S) \times \bar{t}$ la (1) è certamente vera.

Se $\bar{x} \in A$ basterà dimostrare la (1) nelle seguenti ipotesi:

I) gli x_i sono tutti in A

II) gli x_i sono tutti in $f(U_S) - A$.

Nel primo caso la (1) è verificata perchè $G_{|A\times t} = id$ per ogni t.

Nel secondo caso poniamo $y_i = f^{-1}(x_i)$. Basterà dimostrare che, dato un qualsiasi intorno $\tilde{U}$ di $f^{-1}(\bar{x})$, per $i >> 0$ si ha $F(y_i \times t_i) \in \tilde{U}$. In questo caso infatti, preso un intorno $U_{\bar{x}}$ di $\bar{x}$, si ha che $F(y_i \times t_i) \in f^{-1}(U_{\bar{x}})$ per $i >> 0$ e quindi i punti $G(x_i \times t_i)$ sono in $U_{\bar{x}}$ da un certo indice in poi cioè $\{G(x_i \times t_i)\}$ converge a $\bar{x} = G(\bar{x} \times \bar{t})$.

Dato un qualsiasi intorno $\tilde{U}$ di $f^{-1}(\bar{x})$, avendo $F_{|S\times t} = id$, per $0 \leq t \leq 1$, esiste un intorno U' di $f^{-1}(\bar{x}) \times \bar{t}$ tale che $F(U') \subset \tilde{U}$. Tutto si riduce quindi a provare che, dato un intorno U' di $f^{-1}(\bar{x}) \times \bar{t}$, si ha $y_i \times t_i \in U'$ per $i >> 0$, e ciò segue immediatamente dal fatto che $\lim_{i\to\infty} t_i = \bar{t}$ e $\lim_{i\to\infty} x_i = \bar{x}$, e la tesi risulta così provata.

7. Richiamiamo alcune definizioni e teoremi classici che useremo nel seguito.

Lo spazio topologico X si dice un A. N. R. (absolute neighbourhood retract) se, per un qualsiasi spazio X' e per ogni applicazione continua $f: F \to X$ di un chiuso $F \subset X'$ esiste un prolungamento continuo $f': U_F \to X$ ad un intorno U_F di F.

Lo spazio topologico X si dice localmente contrattile, se per ogni $x \in X$ ed ogni intorno V_x di x, esiste un intorno $U_x \subset V_x$ di x ed un'applicazione continua $f: U_x \times I \to V_x$ tale che $F_{|t=0} = id$, $F(U_x \times 1) = x$, $F(x \times I) = x$.

Sia $p: X \to Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici.

Si dice che per p vale il rilevamento dell'omotopia, rispetto ai poliedri, (oppure che $p: X \longrightarrow Y$ è un fibrato nel senso di Serre), se, per ogni applicazione continua $g: P \longrightarrow X$ di un poliedro P ed ogni omotopia $F: P \times I \longrightarrow Y$, per cui $F|_{t=0} = p \circ g$, esiste un'omotopia $G: P \times I \longrightarrow X$ tale che $F_t = p \circ G_t$.

Sia X uno spazio topologico, con $\pi_*(X) = \bigoplus_n \pi_n(X)$ si indica il suo gruppo graduato di omotopia.

Valgono i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. *Se X è uno spazio topologico, localmente compatto e di dimensione finita, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) *X è in* A.N.R,

ii) *X è localmente contrattile.*

Per la dimostrazione vedasi [5] teor. 32.

TEOREMA 2. *Se X è un* A.N.R *ed $F \subset X$ un* A.N.R *chiuso e connesso, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) *X è contrattile su F*

ii) *l'immersione $i: F \longrightarrow X$ induce un isomorfismo*

$$i_*: \pi_*(F) \longrightarrow \pi_*(X).$$

Per la dimostrazione vedasi [8] pag. 216.

Conseguenza dei teoremi precedenti è la:

PROPOSIZIONE 4. *Siano X e B degli* A.N.R, *sia $p: X \longrightarrow B$ un fibrato nel senso di Serre. Supponiamo che $p^{-1}(x) = F_x$ $(x \in X)$ sia connesso per archi e che $\pi_q(F_x) = o$ per $q > o$. In tali ipotesi X è contrattile su ogni sua sezione globale.*

PROVA. In virtù del teorema 2 basterà dimostrare che, se S è una sezione globale di X, l'immersione $i: S \longrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_* \pi_*(S) \longrightarrow \pi_*(X)$.

È noto che l'isomorfismo $q_m: \pi_m(X, p^{-1}(y)) \longrightarrow \pi_m(B, y)$ indotto da p è bigettivo per ogni $m > o$ ed $y \in B$.

Consideriamo la successione esatta di omotopia:

$$\longrightarrow \pi_m(p^{-1}(y)) \longrightarrow \pi_m(X) \xrightarrow{\alpha_m} \pi_m(X, p^{-1}(y)) \longrightarrow \pi_{m-1}(p^{-1}(y)) \longrightarrow .$$

Per ipotesi $\pi_j(p^{-1}(y)) \cong \{o\}$ per $j > o$, onde segue che α_m è un isomorfismo per $m > 1$; per $m = 1$, α_m è un isomorfismo perchè $p^{-1}(y)$ ed X sono connessi per archi.

Si è quindi provato che che $q_* \circ \alpha_* : \pi_*(X) \longrightarrow \pi_*(B)$ è bigettivo.

Poichè α_* è indotto dall'immersione naturale, q_* da p, $q_* \circ \alpha_*$ coincide con l'isomorfismo indotto da $p : X \longrightarrow B$. Se S è una sezione globale, si ha la successione di applicazioni $S \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B$. Poichè $p \circ i$ è un omeomorfismo, l'omomorfismo $(p \circ i)_* = p_* \circ i_*$, indotto fra i gruppi di omotopia, è un isomorfismo. Si è provato che p_* è bigettivo. Pertanto anche i_* è bigettivo è ciò completa la dimostrazione.

Conseguenza della proposizione 4 è il seguente risultato ben noto: se V è una varietà differenziabile, e se $S \subset V$ è una sottovarietà differenziabile, chiusa e regolarmente immersa, esiste un intorno U_S di S contrattile su S.

8. Nel lemma 2 si è provato che, data l'applicazione $f : V \longrightarrow W$ fra spazi compatti, per cui esistano i chiusi $A \subset W$ ed $S = f^{-1}(A)$ verificanti la condizione β'), dall'ipotesi che esista un intorno U_S di S, contrattile su S, si deduce che $f(U_S)$ è contrattile su A.

Vogliamo ora invertire parzialmente questo risultato provando che, sotto opportune ipotesi, l'esistenza di una famiglia di intorni $\{U_A^i\}$ di A, contrattile su A, garantisce che, per qualche indice i, $f^{-1}(U_A^i)$ è contrattili su S.

LEMMA 3. *Siano X, X_0 degli* A.N.R, *e supponiamo che $X_0 \subset X$ sia chiuso. Esiste un intorno U_{X_0} di X_0 ed un'applicazione continua $F : X \times I \longrightarrow X$ tale che $F|_{t=0} = id$, $F(U_{X_0} \times 1) = X_0$, $F|_{X_0 \times t} = id$, $o \leq t \leq 1$.*

Per la dimostrazione cfr. [8], sezione, 4.1.

Dimostriamo ora il:

TEOREMA 3. *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione continua fra spazi topologici compatti, per la quale esistano dei chiusi $A \subset W, S = f^{-1}(A)$, per cui sia verificata l'ipotesi β').*

Supponiamo che esista un sistema fondamentale di intorni chiusi U_A^i di A tali che U_A^i, A, $f^{-1}(U_A^i)$, S siano A.N.R.

Se gli U_A^i sono contrattili su A oppure se U_A^{i+1} è retratto di U_A^i per ogni i, esiste un sistema fondamentale di intorni U_S^j di S che sono contrattili su S; gli U_S^j si possono prendere della forma $f^{-1}(U_A^{i_j})$.

PROVA. Supponiamo che gli U_A^i siano contrattili su A. Per il lemma 3 esiste un intorno U_S' di S in $f^{-1}(U_A^1)$ che è contrattile su S in $f^{-1}(U_A^1)$.

Ogni intorno $U_S'' \subset U_S'$ di S è contrattile su S in $f^{-1}(U_A^1)$. Essendo V compatto ed S chiuso, esiste $U_A^r \subset U_A^1$ tale che $f^{-1}(U_A^r) \subset U_S'$. Poichè gli intorni U_A^1 ed U_A^r sono contrattili su A, le immersioni $i_1 : A \longrightarrow U_A^1$,

$i_r: A \to U_A^r$ inducono degli isomorfismi $i_{1*}: \pi_*(A) \to \pi_*(U_A^1)$, $i_{r*}\,\pi_*(U_A^r) \to \to \pi_*(U_A^r)$. Consideriamo la successione di applicazioni: $A \xrightarrow{i_r} U_A^r \xrightarrow{j} U_A^1$; sappiamo che i_{r*} e $j_* \circ i_{r*}$ sono isomorfismi. Quindi j_* è bigettivo e pertanto, per il teorema 2, U_A^1 è contrattile su U_A^r. In particolare esiste un'applicazione $\psi: U_A^1 \to U_A^r$ tale che $\psi|_{U_A^r} = id$. Allo stesso risultato si arriva immediatamente nell'ipotesi che U_A^{i+1} sia retratto di U_A^i.

Valendo la β'), la ψ definisce una retrazione $\psi': f^{-1}(U_A^1) \to f^{-1}(U_A^r)$. Sia $F: f^{-1}(U_A^r) \times I \to f^{-1}(U_A^1)$ la contrazione di $f^{-1}(U_A^r)$ su S in $f^{-1}(U_A^1)$; definiamo $F: f^{-1}(U_A^r) \times I \to f^{-1}(U_A^r)$ ponendo $F'(x \times t) = \psi'(F(x \times t))$. Si verifica immediatamente che F' definisce una contrazione di $f^{-1}(U_A^r)$ su S.

COROLLARIO. *Sia $f: V \to W$ un'applicazione continua, fra spazi topologici compatti, per la quale esista un punto $p \in W$ tale che, detto $S = f^{-1}(p)$, sia verificata per essi la condizione β'). Supponiamo che p abbia un intorno B_p omeomorfo alla palla n-dimensionale e che le componenti connesse S_i di S siano* A.N.R. *In tali ipotesi, esistono degli intorni U_i di S_i tali che:*

i) *U_i è contrattile su S_i e si ha $U_i \cap U_j = \Phi$ per $i \neq j$;*

ii) *∂U_i è omeomorfo alla sfera di dimensione $n-1$;*

iii) *∂U_i ha in U_i ed in $V - U_i$ un intorno contrattile su ∂U_i.*

PROVA. Segue dal teorema 3, prendendo per U_A^m la palla di centro p e raggio $\frac{1}{m+1}\varrho$, ove ϱ è il raggio di B_p.

§ 4. Applicazioni.

9. In questo numero applicheremo i risultati dei paragrafi precedenti allo studio delle applicazioni continue $f: V^n \to W^n$, fra varietà di dimensione n, tali che esista un chiuso $A \subset W$ per cui $f_{|V-f^{-1}(A)}$ sia un omeomorfismo e si abbia: $n > \dim f^{-1}(A) > \dim A$. Sostanzialmente si proverà che, detto $q = \dim f^{-1}(A)$, se $H_q(f^{-1}(A)) \neq \{o\}$ allora $2q \geq n$.

TEOREMA 4. *Sia $f: V \to W$ un'applicazione continua fra varietà topologiche compatte di dimensione n, tale che, essendo $S = f^{-1}(x)$ $(x \in W)$, la restrizione $f: V - S \to W - x$ sia un omeomorfismo e* $\dim S < n$. *In tal caso risulta:*

a) *se S è un* A.N.R. *ed $H_q(S, Z_2) \neq \{o\}$ per un certo $q > 0$ allora $H^{n-q}(S, Z_2) \neq \{o\}$*

b) *se V è kähleriana ed S è un* A.N.R., *contenente un insieme analitico complesso S' di dimensione reale q, allora $H^{n-q}(S, Z_2) \neq \{o\}$.*

PROVA. a) Poichè sono verificate le ipotesi del lemma 2 e del teorema 3, f soddisfa le condizioni α), β), essendo inoltre V, W varietà compatte di dimensione n, ed f di grado ∓ 1 vale la γ) nella dimensione n rispetto al corpo Z_2 (dualità di Poincaré). Da quanto detto segue che la prima parte del teorema è provata dal corollario 2 della proposizione 3.

b) Per quanto provato nella prima parte, basterà dimostrare che $H_q(S, Z_2) \neq \{o\}$. Consideriamo le immersioni naturali $S' \xrightarrow{i'} S \xrightarrow{i} V$; proveremo che $(i \circ i')_q : H_q(S', Z_2) \rightarrow H_q(V, Z_2)$ ha immagine diversa da zero e quindi $H_q(S, Z_2) \neq \{o\}$.

La varietà V, considerata come varietà analitica reale, può essere immersa analiticamente in R^{2n+1}.

Sia $j : V \rightarrow R^{2n+1}$ tale immersione, $j(S')$ è un insieme analitico reale di R^{2n+1} e come tale è triangolabile. Quindi, per la proposizione 1, 5):

$$H'_*(j(S'), Z_2) \simeq H_*(j(S'), Z_2) \simeq H_*(S', Z_2) \simeq H'_*(S', Z_2).$$

Ogni componente irriducibile di S' ha una classe fondamentale in $H'_q(S', Z_2)$ e quindi, per l'isomorfismo sopra stabilito, in $H_q(S', Z_2)$, È noto che, essendo V Kähleriana, l'omomorfismo naturale $H_q(S', Z_2) \rightarrow H_q(V, Z_2)$ è iniettivo ([6]) e ciò completa la dimostrazione.

TEOREMA 5. *Siano V, W varietà topologiche orientabili di dimensione n, sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione continua, propria tale che, essendo A un chiuso di W ed $S = f^{-1}(A)$ la restrizione $f : V - S \rightarrow W - A$ sia un omeomorfismo e dim $S < n$.*

In queste ipotesi risulta:

a) *detta $f' : S \rightarrow A$ la restrizione di f, essendo $f'_q : H'_q(S, K) \rightarrow H'_q(A, K)$ l'omomorfismo indotto sui gruppi di omologia, se* Ker $f'_q \neq \{o\}$, *allora $H_c^{n-q}(S, K) \neq \{o\}$. Per conseguenza* $\dim_R S \geq \frac{n}{2}$.

b) *Sia V Kähleriana compatta, siano S, A spazi complessi ed $f|_S$ olomorfa. Se $f|_S$ ha una fibra contenente un insieme analitico P di dimensione reale $2p$, allora* $\dim_R S \geq \max(2p, n - 2p)$.

PROVA a) Le varietà V, W sono orientabili, f è di rango ∓ 1, ed è propria. Perciò, per quanto detto nella proposizione 1, 7), f soddisfa la proprietà γ). Per quanto osservato nel § 1 si può applicare il corollario 2 della proposizione 3 ai gruppi H'_*, H_c^*.

Ciò prova la tesi.

b) Sia P' una componente irriducibile di P, si abbia $\dim_R P' = 2p$. L'immagine in $H'_{2p}(V, Z_2)$ della classe fondamentale di P' non è nulla, e perciò $\mathrm{Ker} f_{2p} \neq \{o\}$.

Per il corollario 2 della proposizione 3 $H_c^{n-2p}(S, Z_2) \neq \{o\}$.

Si è così provato $H'_{2p}(S, Z_2) \neq \{o\}$, $H_c^{n-2p}(S, Z_2) \neq \{o\}$ e da ciò segue la tesi.

10. In questo numero studieremo le successioni di applicazioni $V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} \dots$, fra varietà topologiche di dimensione n, che godano della proprietà che per ogni indice i esista un chiuso $A_{i+1} \subset V_{i+1}$ tale che la restrizione $f_i : V_i - f_i^{-1}(A_{i+1}) \longrightarrow V_{i+1} - A_{i+1}$ sia un omeomorfismo ed $n > \dim f_i^{-1}(A_{i+1}) \geq \dim A_{i+1}$.

L'insieme $S_i = f_i^{-1}(A_{i+1})$ sarà detto l'insieme singolare di f_i.

Proveremo che sotto opportune ipotesi, da un certo indice in poi, risulta $\dim_R S_i = \dim_R A_{i+1}$.

Analoghi risultati si otterranno in seguito, nel caso in cui V_i sono spazi complessi, compatti e le f_i applicazioni olomorfe.

Teorema 6. *Sia data una successione* $V_0, V_1 \dots$ *di varietà topologiche orientabili e di applicazioni continue, proprie* $f_i : V_i \longrightarrow V_{i+1}$, *aventi come insiemi singolari* $S_i = f_i^{-1}(A_{i+1})$.

Se $\dim_K H'_*(V_0, K) = r < \infty$, *esiste un numero finito di indici* $i_0 \dots i_r$ *tali che per* $i \notin (i_0 \dots i_r)$ *l'omomorfismo* $(\tilde{f}_i)_* : H'_*(S_i, K) \longrightarrow H'_*(A_{i+1}, K)$ *indotto dalla restrizione* $\tilde{f}_i = f_{i|S_i}$ *è un isomorfismo.*

Prova. Le f_i verificano la condizione 7) della proposizione 1 e vale la i) della proposizione 3, relativamente ai gruppi $H'_*(\ ,\ )$ dell'omologia di Borel-Moore. Da quanto osservato $(f_i)_* : H'_*(V_i, K) \longrightarrow H'_*(V_{i+1}, K)$ è surgettivo e $(g_i)_* : H'_*(V_i - S_i, K) \longrightarrow H'_*(V_{i+1} - A_{i+1}, K)$ è un isomorfismo.

Si è così provato che $\dim_K H'_*(V_i, K) > \dim_K H'_*(V_{i+1}, K)$ se $(f_i)_*$ non è un isomorfismo. Essendo $\dim_K H'_*(V_0, K) = r$ questa eventualità può presentarsi al più r volte.

Per completare la dimostrazione rimane da dimostrare che, se $(\tilde{f}_i)_*$ non è un isomorfismo, non lo è neppure $(f_i)_*$ e questo è conseguenza immediata del lemma dei « cinque » applicato al diagramma della osservazione del § 1.

Corollario 1. *Nelle ipotesi del teorema precedente, se inoltre*: V_0 *è compatta, le* S_i *sono sottovarietà chiuse e* $\dim S_i > \dim A_i$, *oppure* $\dim S_i = 0$, *allora da un certo indice in poi, le* f_i *sono omeomorfismi.*

Prova. Essendo le S_i varietà compatte si ha $H'_{q_i}(S_i, Z_2) \neq \{o\}$ per $q_i = \dim_R S_i$. Osserviamo che, se $\dim_R S_i > 0$, $(f_i)_*$ non è un isomorfismo e quindi, essendo $\dim_{Z_2} H_*(V_0, Z_2)$ finito, per il teorema 6, da un certo indice in poi si ha dim $S_i = 0$. Indichiamo con $\widetilde{V}_{i+1}$ lo spazio quoziente, ottenuto da V_i, identificando x ad y se e solo se $f_i(x) = f_i(y)$. Essendo V_i compatto $\widetilde{V}_{i+1}$ è omeomorfo a V_{i+1}. Se $\dim_R S_i = 0$, S_i è formato da un numero finito di punti, dovendo V_{i+1} essere una varietà, si deduce che f_i è biunivoca e quindi, per la compattezza, un omeomorfismo.

LEMMA 4. *Sia $f: V \to W$ un'applicazione continua fra spazi topologici compatti, per cui esista un chiuso $A \subset W$ tale che, detto $S = f^{-1}(A)$, la restrizione $f: V - S \to W - A$ sia un omeomorfismo.*

Se esiste un intorno chiuso U_S di S, che sia contrattile su S e tale che $H_q'(\partial U_S, K) = \{o\}$, $H_q'(S, K) \neq \{o\}$, $H_q'(A, K) = \{o\}$ allora $\operatorname{Ker} f_q \neq \{o\}$.

PROVA. Per il lemma 2, $U_A = f(U_S)$ è contrattile su A; U_S ed U_A sono compatti e quindi $H_*'(U_S, K) \simeq H_*'(S, K)$, $H_*'(U_A, K) \simeq H_*'(A, K)$.

Consideriamo il diagramma a righe esatte e quadrati commutativi:

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H_q'(\partial U_S, K) & \to & H_q'(S, K) \oplus H_q'(V - \overset{\circ}{U}_S, K) & \xrightarrow{\alpha} & H_q'(V, K) \to \\
\downarrow & & \downarrow g_q & & \downarrow f_q \\
\to H_q'(\partial U_A, K) & \to & H_q'(A, K) \oplus H_q'(W - \overset{\circ}{U}_A, K) & \to & H_q'(W, K) \to
\end{array}$$

per le ipotesi fatte $\operatorname{Ker} g_q \supset H_q'(S, K) \neq \{o\}$. Per la commutatività $\operatorname{Ker}(f_q \circ \alpha) \supset \operatorname{Ker} g_q$: quindi $\operatorname{Ker} f_q \circ \alpha \neq \{o\}$, ed essendo α iniettivo, si ha $\operatorname{Ker} f_q \neq \{o\}$ che è la tesi.

11. Sia $f: V_1 \to V_2$ un'applicazione olomorfa fra spazi complessi; sia $A_2 \subset V_2$ un insieme analitico tale che $\dim V_1 > \dim f^{-1}(A_2)$.

Si dice che f è una modificazione, con insieme di punti singolari $S_1 = f^{-1}(A_2)$, se $f: V_1 - S_1 \to V_2 - A_2$ è biolomorfa e $\dim S_1 > \dim A_2$. Una modificazione $f: V_1 \to V_2$ si dice propria se f è propria. Supponiamo che gli spazi complessi e gli insiemi analitici che considereremo abbiano omologia di tipo finito rispetto al loro corpo dei coefficienti.

LEMMA 5. *Siano date due modificazioni proprie $V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3$ con insiemi di punti singolari $S_1 = f_1^{-1}(A_2)$, $S_2 = f_2^{-1}(A_3)$ e si abbia:* $\dim_R S_1 \leq 2q$, $\dim_R S_2 = 2q$. *Consideriamo gli omomorfismi: $(f_i)_*: H_*'(V_i, R) \to H_*'(V_{i+1}, R)$, $i=1,2$; se $\operatorname{Ker}(f_2)_{2q} \neq \{o\}$ allora risulta:* $\dim_R \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1)_{2q} > \dim_R \operatorname{Ker}(f_1)_{2q}$.

PROVA. Essendo gli S_i, $i = 1, 2$, chiusi in V_i, per l'osservazione del § 1, si può applicare la proposizione 2, a) e quindi dedurre che nella successione $H'_{2q}(S_2, R) \xrightarrow{i_{2q}} H'_{2q}(V_2, R) \xrightarrow{(f_2)_{2q}} H'_{2q}(V_3, R)$ si ha: $\operatorname{Ker}(f_2)_{2q} \subset \operatorname{im} i_{2q}$ e quindi $\operatorname{im} i_{2q} \neq \{o\}$.

Siano $S_2^l\,(l = 1 \dots p)$ le componenti irriducibili di dimensione $2q$ di S_2. È noto che la varietà $\widetilde{S}_2^l$, ottenuta da S_2^l, togliendo i punti non regolari, sono connesse ed, in virtù della loro struttura complessa, orientabili. Si è così provato che l'omologia di $\widetilde{S}_2^l$ in dimensione $2q$ è generata dalla classe fondamentale.

I punti non regolari di S_2^l hanno codimensione reale ≥ 2, quindi $H'_{2q}(S_2^l, R) \simeq H'_{2q}(\widetilde{S}_2^l, R)$. In virtù dell'isomorfismo ora stabilito si può affermare che i gruppi $H'_{2q}(S_2^l, R)$ sono generati dalla classe fondamentale di S_2^l.

Risulta: $H'_{2q}(S_2, R) \simeq \bigoplus_{l=1}^{p} H'_{2q}(S_2^l, R)$; si è provato che $i_{2q}: H'_{2q}(S_2, R) \to \operatorname{Ker}(f_2)_{2q} \subset H_{2q}(V_2, R)$ ha immagine diversa da zero. Quindi esiste un $S_2^{\bar{l}}$ tale che $i_{2q}(H'_{2q}(S_2^{\bar{l}}, R))$ è un elemento diverso da zero di $\operatorname{Ker}(f_2)_{2q}$.

È noto che $f_1^{-1}(S_2^{\bar{l}})$ è un insieme analitico. Per le ipotesi fatte $\dim_R f_1^{-1}(S_2^{\bar{l}}) = 2q$, ed esiste una componente irriducibile T di dimensione reale $2q$ tale che: $\dim_R (T \cap S_1) \leq 2q - 2$.

Detto $T' = T \cap S_1$ risulta che $f_1 \mid T - T'$ è biolomorfa.

Consideriamo il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{j'} & f_1^{-1}(S_2^{\bar{l}}) & \xrightarrow{i'} & V_1 \\ \downarrow f_1'' & & \downarrow f_1' & & \downarrow f_1 \\ f_1(T) & \xrightarrow{j} & S_2^{\bar{l}} & \xrightarrow{i} & V_2 \end{array}$$

ove j, j' sono indotte dall'identità, f_1', f_1'' da f_1.

Essendo $f_1 \mid T - T'$ un omeomorfismo, $(f_1' \circ j')_{2q}$ è un isomorfismo.

Sia σ la classe fondamentale di T, η quella di $S_2^{\bar{l}}$. Si è provato che $i_{2q}(\eta) \neq \{o\}$, $i_{2q}(\eta) \in \operatorname{Ker}(f_2)_{2q}$; per la commutatività del diagramma e per quanto sopra stabilito risulta: $(f_1)_{2q}(i'_{2q}(j'_{2q}(\sigma))) = i_{2q}(\eta)$; quindi $i'_{2q}(j'_{2q}(\sigma)) \in \operatorname{Ker}(f_1)_{2q}$. Ma $i'_{2q}(j'_{2q}(\sigma)) \in \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1)_{2q}$, e ciò prova la tesi.

Conseguenza dei lemmi 4 e 5 è il seguente

COROLLARIO. *Siano date le modificazioni $V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3$ fra spazi complessi compatti, se esiste un intorno chiuso U_2 di S_2, contrattile su S_2, tale che $H'_{2q}(\partial U_2, R) = \{o\}$, ove $2q = \dim_R S_2 \geq \dim_R S_1$, allora risulta:*

(1) $$\dim_R \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1)_{2q} > \dim_R \operatorname{Ker}(f_1)_{2q}.$$

OSSERVAZIONE. Le ipotesi del corollario precedente sono di certo verificate se gli insiemi A_i, $i = 2, 3$ sono punti regolari di V_i (vedi corollario del teorema 3).

LEMMA 6. *Sia $f: V \to W$ una modificazione propria avente $S = f^{-1}(A)$ come insieme di punti singolari. Sia T l'insieme dei punti non regolari di V e si abbia $\dim_R T \leq q - 2 = \dim_R S - 2$.*

Se $f \mid V - T$ è propria e $f(V - T)$ è una varietà, posto $f_* : H'_*(V, R) \to \to H'_*(W, R)$, risulta $\operatorname{Ker} f_q \neq \{o\}$.

PROVA. Poniamo $S' = S - T$, $V' = V - T$, $W' = f(V')$, $A' = f(S')$ e $\tilde{f} = f \mid V'$. Essendo V', W' varietà orientabili, $\tilde{f}$ verifica la proprietà 7) della proposizione 1 e — per l'osservazione del § 1 — alle ipotesi della proposizione 2. Risulta pertanto dalla seconda parte di detta proposizione che $\operatorname{Ker} \tilde{f}_q \neq \{o\}$.

Si dimostra usando il diagramma commutativo della proposizione 1, per $K = R$, che le immersioni $i: V' \to V$, $j: W' \to W$ inducono degli isomorfismi $i_q: H'_q(V', R) \to H'_q(V, R)$, $j_q: H'_q(W', R) \to H'_q(W, R)$. Consideriamo la successione di applicazioni:

$$\begin{array}{ccc} H'_q(V', R) & \xrightarrow{i_q} & H'_q(V, R) \\ \downarrow \tilde{f}_q & & \downarrow f_q \\ H'_q(W', R) & \xrightarrow{j_q} & H'_q(W, R) \end{array}$$

essendo i_q, j_q degli isomorfismi risulta $\operatorname{Ker} \tilde{f}_q \simeq \operatorname{Ker} j_q^{-1} \circ f_q \circ i_q \neq \{o\}$ e ciò prova la tesi.

Riassumiamo i risultati precedenti col

TEOREMA 7. *Sia data una successione di spazi complessi compatti $\{V_i\}_{i=01}$ e di modificazioni $f_i: V_i \to V_{i+1}$ aventi $S_i = f_i^{-1}(A_{i+1})$ come insiemi di punti singolari. Supponiamo che $\dim_R H'_{2q}(V_0, R) < r$ e che per gli indici $0 \leq i_1 < < i_2 \ldots < i_r$ sia verificata una delle seguenti ipotesi:*

a) *$\dim_R S_{i_j} = 2q$ per $j = 1 \ldots r$ ed esiste un intorno chiuso U_{i_j} di S_{i_j}, contrattile su S_{i_j} e tale che $H'_{2q}(\partial U_{i_j}, R) = \{o\}$.*

b) *detto T_{i_j}, $j = 1 \ldots r$ l'insieme dei punti non regolari di V_{i_j} si ha: $\dim_R T_{i_j} < 2q = \dim_R S_{i_j}$ ed inoltre $f_{i_j \mid V_{i_j} - T_{i_j}}$ è propria ed ha come immagine una varietà,*

allora, per almeno un indice positivo $\bar{l} < i_r$ risulta $\dim_R S_{\bar{l}} > 2q$.

PROVA. Gli S_{i_j} sono insiemi analitici complessi di dimensione reale $2q$ quindi $H'_{2q}(S_{i_j}, R) \neq \{o\}$.

Sia soddisfatta la condizione a) (rispettivamente b), allora, per il lemma 4 (rispettivamente 6), risulta $\mathrm{Ker}(f_{i_j})_{2q} \neq \{o\}$ per $j = 1 \dots r$. Se fosse $\dim_R S_l \leq 2q$ per ogni $0 < l < i_r$ si potrebbe applicare il lemma 5 ad ogni coppia di modificazioni $V_0 \xrightarrow{f_{i_{j-1}} \circ \cdots f_0} \dots V_{i_j} \xrightarrow{f_{i_j}} V_{i_{j+1}}$ e risulterebbe:

$$\dim_R \mathrm{Ker}(f_{i_j} \circ \dots \circ f_0)_{2q} > \dim_R \mathrm{Ker}(f_{i_{j-1}} \circ \dots \circ f_0)_{2q}$$

e quindi $\dim_R \mathrm{Ker}(f_{i_r} \circ \dots \circ f_0)_{2q} \geq r$ e questo è contro l'ipotesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AEPPLI - « *Modification von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten* » Comm. Math. Helv. 31 (1956-7), 219-301.

[2] A. BOREL - « *Seminar on transformation groups* » Annals of Math. studies n° 46, Princeton University press (1960).

[3] A. BOREL-A. HAEFLIGER « *Le classe d'homologie fondamentale d'en espace analytique* » Bull. Soc. Math. France, tome 89 (1961), 461-513.

[4] A. BOREL-J. C. MOORE - « *Homology theory for locally compact spaces* » Michigan Math. Jour. 7 (1960), 137-159.

[5] K. BORSUK - « *Uber eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen* » Fund. Math. 19, (1932), 137-159.

[6] B. ECKMANN - « *Quelques proprietes globales des varietes Kähleriennes* » C. R. Acad. Sci. (Paris) 229 (1949), 577-579.

[7] S. HU - « *Homotopy theory* » Academic press, New York and London (1959).

[8] S. HU - « *Cohomology and deformation retracts* ». London Math. Soc. 52 (1950-1), 191-219.

[9] R. L. WILDER - « *Topology of manifolds* ». Amer. math. soc. coll. pubblications, vol. 32, (1949).