

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. VALLE

**Un problème de contrôle optimum dans certaines équations
différentielles d'évolution**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 20,
n° 1 (1966), p. 25-30

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_1_25_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMUM DANS CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ÉVOLUTION

A. VALLE ⁽¹⁾

Introduction.

1.1. — Notations. Premières hypothèses.

On considère deux espaces de Hilbert V et H , *séparables* avec $V \subset H$ algébriquement et topologiquement (c'est à dire : l'injection de V dans H étant continue), V dense dans H . Si u et v sont deux éléments de V , $((u, v))$ désigne leur produit scalaire et $\|u\| = (u, u)^{1/2}$; si $f, g \in H$, (f, g) désigne leur produit scalaire dans H et $|f| = (f, f)^{1/2}$.

On donne une famille de *formes sesquilinéaires continues* sur V , soit $a(t; u, v)$ dépendant du paramètre t (le temps); on supposera que $t \in [0, T]$, T fini. On fera l'hypothèse suivante :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } u, v \in V, \text{ la fonction } t \rightarrow a(t; u, v) \text{ est} \\ \text{mesurable, et} \\ |a(t; u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \\ M \text{ étant une constante indépendante de } t, u, v. \end{array} \right.$$

On donne aussi une forme $v \rightarrow L(v)$ antilinéaire continue sur V .

Enfin on appelle *contrôle*, toute fonction $p \in L^\infty(0, T)$ telle que $\|p\|_{L^\infty(0, T)} \leq 1$.

1.2. — On va considérer le

Pervenuto alla Redazione il 24 Agosto 1965.

⁽¹⁾ C'est avec un vif sentiment de reconnaissance que je remercie le Prof. J. L. LIONS d'avoir accepté la direction de mon travail à Paris, ainsi que le C. N. R. S. auquel j'appartiens à présent en qualité d'attaché.

PROBLÈME 1.1. Trouver une fonction $u \in L^2(-\infty, T; V)$, espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur $] -\infty, T[$ à valeurs dans H , avec la norme hilbertienne $\|u\| = \left(\int_{-\infty}^T \|u(t)\|_V^2 dt \right)^{1/2}$ — nulle presque partout ($p \cdot p$) pour $t < 0$, satisfaisant à

$$(1.2) \quad \begin{cases} a(t; u(t), v) + \frac{d}{dt} (u(t), v) = (f(t), v) + p(t) L(v) + (u_0, v) \vartheta \\ \text{pour tout } v \in V \end{cases}$$

où f est donnée dans $L^2(-\infty, T; H)$ nulle pour $t < 0$, u_0 est donné dans H , et ϑ est la masse de DIRAC à l'origine.

Il faut préciser le sens de (1.2). On prolonge $a(t; u, v)$ (définie à priori seulement dans $(0, T)$) pour $t < 0$ d'une façon quelconque, par exemple par $0 \cdot \frac{d}{dt} (u(t), v)$ désigne la dérivée au sens des distributions sur $] -\infty, T[$, de la fonction $t \rightarrow (u(t), v)$. On suppose le contrôle fixe p prolongé aussi par 0 , pour $t < 0$.

Or, $L(v) = (\xi, v)$ où $\xi \in V'$ espace anti-dual de V (i. e, espace des formes antilinéaires continues sur V), (ξ, v) désignant le produit scalaire dans l'anti-dualité. D'ailleurs on a ([2] Ch. 1):

$$(1.3) \quad V \subset H \subset V'$$

V' muni de la norme hilbertienne $\|L\|_{V'} = \sup \frac{|(\xi, v)|}{\|v\|}$, $v \in V$.

On peut donc écrire (1.2) dans la forme

$$(1.4) \quad a(t; u(t), v) + \frac{d}{dt} (u(t), v) = (f(t) + p(t) \xi, v) + (u_0, v) \vartheta$$

où $(f(t) + p(t) \xi, v)$ désigne toujours le produit scalaire dans l'anti-dualité.

1.3. PROBLÈME 1.1'. Trouver $u \in L^2(0, T; V)$, avec

$$(1.5) \quad \int_0^T \{a(t; u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi'(t))\} dt = \int_0^T (f(t) + p(t) \xi, \varphi(t)) dt + (u_0, \varphi(0))$$

pour toute fonction φ telle que :

$$(1.6) \quad \varphi \in L^2(O, T; V), \varphi' \in L^2(O, T; H), \varphi(T) = 0.$$

LEMME 1.1. Les problèmes 1.1 et 1.1' sont équivalents.
(Démonstration [3], Ch 4 § 1).

THÉORÈME 1.1. On suppose que (1.1) a lieu et qu'il existe une constante λ et une constante $\alpha > 0$ telles que

$$(1.7) \quad \operatorname{Re} a(t; v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2, \text{ pour tout } v \in V.$$

Alors il existe une fonction u solution du problème 1.1'.
Cette solution est unique et vérifie en outre

$$(1.8) \quad \frac{du}{dt} \in L^2(O, T; V').$$

Si l'on désigne par W l'espace des (classes de) fonctions u telles que

$$(1.9) \quad \begin{cases} u \in L^2(O, T; V) \\ \frac{du}{dt} \in L^2(O, T; V'), \end{cases}$$

(1.8) au sens des distributions vectorielles à valeurs dans V' , et l'on munit de la norme :

$$(1.10) \quad \|u\|_W = (\|u\|_{L^2(O, T; V)}^2 + \|u'\|_{L^2(O, T; V')}^2)^{1/2},$$

W est un espace de Hilbert.

COROLLAIRE 1.1. Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, $u \in W$ est ($p \cdot p$ égale à une fonction) continue de $[O, T] \rightarrow H$ et $u(0) = u_0$.
(Démonstration du théorème et corollaire [2], Ch II).

Par la suite, on supposera toujours (1.7), et on identifiera la solution unique du problème 1.1 à cette fonction continue qu'on notera u_p , pour mettre en évidence le contrôle choisi.

Existence du contrôle optimum.

2.1. — Position du problème.

On donne un ensemble fermé et borné B dans l'espace de Hilbert H .
 \mathcal{C} désigne la classe de tous les contrôles $\{p\}$, pour lesquels la correspondante

solution $t \rightarrow u_p(t)$ de (1.2) atteint B dans un certain instant $\tau \in [0, T]$, c'est à dire :

$$(2.1) \quad u_p(\tau) \in B.$$

On dit que les contrôles de \mathcal{C} transfèrent le point u_0 jusqu'à B et on appelle τ le *temps de transition*. (Pour la terminologie, cf. [4]).

On fait une hypothèse de *controllabilité* en supposant que la classe \mathcal{C} n'est pas vide.

Dans ces conditions il s'agit de démontrer le

THÉORÈME 2.1. Soit $\tau^* = \inf \{\tau\}$ pour $p \in \mathcal{C}$; alors il existe un contrôle p^* dans \mathcal{C} optimum au sens, que son temps de transition est égal à τ^*

$$(2.2) \quad u_{p^*}(\tau^*) = b \in B.$$

Ce théorème généralise évidemment le Th. 1 de [1].

DÉMONSTRATION. Si l'on choisit une suite $\{p_n\}$ dans \mathcal{C} , telle que

$$(2.3) \quad u_{p_n}(\tau_n) = b_n \in B, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(2.4) \quad \tau_n \rightarrow \tau^*,$$

l'ensemble des $u_{p_n}(\tau_n)$ demeurant dans un borné de H , et compte tenu de la définition de contrôle, on peut en extraire une sous suite $\{p_\nu\}$ convergente dans $L^\infty(0, T)$ faible :

$$(2.5) \quad p_\nu \rightarrow p^*$$

où p^* est un nouveau contrôle, et telle que dans H faible :

$$(2.6) \quad u_{p_\nu}(\tau_\nu) = b_\nu \rightarrow b \in B.$$

REMARQUE 2.1.

$$\int_0^T p_\nu(t) g(t) dt \rightarrow \int_0^T p^*(t) g(t) dt \quad \forall g \in L^1(0, T)$$

donc $\forall g \in L^2(0, T)$, et (2.5) implique en particulier $p_\nu \rightarrow p^*$, dans $L^2(0, T)$ faible.

Maintenant il faut démontrer que le contrôle p^* dans (2.5) vérifie (2.2). Pour ceci on a besoin du

LEMME 2.1. On suppose (2.4) et (2.5), alors

$$(2.7) \quad u_{p_\nu}(\tau_\nu) \rightarrow u_{p^*}(\tau^*)$$

dans V' faible.

Ce lemme achève la démonstration du th. 2.1. En effet, il suffit de considérer (1.3), (2.6) et (2.7) pour obtenir (2.2).

2.2. DÉMONSTRATION DU LEMME 2.1.

D'abord on procède par *troncature* en définissant les fonctions

$$(2.8) \quad t \rightarrow v_\nu(t) = \begin{cases} u_{p_\nu}(t) & \text{dans }]0, \tau_\nu[\\ 0 & \text{dans }]\tau_\nu, T[\end{cases}$$

$$(2.9) \quad t \rightarrow v(t) = \begin{cases} u_{p^*}(t) & \text{dans }]0, \tau^*[\\ 0 & \text{dans }]\tau^*, T[. \end{cases}$$

On appelle χ_ν et χ les fonctions caractéristiques de $]0, \tau_\nu[$, $]0, \tau^*[$.

La relation (1.5) signifie ([2], Ch. 2)

$$(2.10) \quad \begin{cases} u \in L^2(O, T; V) \\ A(t)u(t) + u'(t) = f(t) + p(t)\xi \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{dans } (0, T)$$

les opérateurs $A(t)$ non bornés dans H , définis par les formes sesquilinéaires $a(t; u, v)$ de sorte que

$$a(t; u(t), v) = (A(t)u(t), v).$$

Or de (2.8), (2.9) et (2.10) on déduit

$$(2.11) \quad A(t)v_\nu + v'_\nu = (f + p_\nu\xi) - u_{p_\nu}(\tau_\nu)\vartheta_{(\tau_\nu)}$$

où $-u_{p_\nu}(\tau_\nu)$ est le saut de v_ν pour $t = \tau_\nu$, qui a bien un sens grâce au corollaire 1.1, $\vartheta_{(\tau_\nu)}$ étant la masse de DIRAC en ce point. De façon analogue on a

$$(2.12) \quad A(t)v + v' = \chi(f + p^*\xi) - u_{p^*}(\tau^*)\vartheta_{(\tau^*)}.$$

2.3. Soit l'application $p \rightarrow u_p$ de $L^\infty(O, T)$ dans W (cf. 1.3).

En ayant compte des topologies faibles associées, on déduit de (2.5):

$$(2.13) \quad u_{p_\nu} \rightarrow u_{p^*} \text{ dans } W \text{ faible}$$

donc,

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_\nu \rightarrow v \text{ dans } L^2(O, T; V) \text{ faible} \\ v'_\nu \rightarrow v' \text{ dans } L^2(O, T; V') \end{array} \right. \gg .$$

Par conséquent, au sens des distributions vectorielles à valeurs dans $V', \mathcal{D}'(]O, T[; V')$, on a :

$$(2.15) \quad A(t) v_\nu + v'_\nu \rightarrow A(t) v + v' .$$

Or de (2.4) et (2.5) résulte dans le même espace :

$$(2.16) \quad \chi_\nu(f + p_\nu \xi) \rightarrow \chi(f + p^* \xi) .$$

De (2.11), (2.12), (2.15) et (2.16), on trouve toujours dans $\mathcal{D}'(]O, T[; V')$

$$(2.17) \quad X_\nu = u_{p^*}(\tau^*) \vartheta_{(\tau^*)} - u_{p_\nu}(\tau_\nu) \vartheta_{(\tau_\nu)} \rightarrow 0 .$$

2.4. En faisant

$$Y_\nu = u_{p_\nu}(\tau_\nu) [\vartheta_{(\tau^*)} - \vartheta_{(\tau_\nu)}],$$

on a :

$$(2.18) \quad X_\nu = [u_{p^*}(\tau^*) - u_{p_\nu}(\tau_\nu)] \vartheta_{(\tau^*)} + Y_\nu .$$

On démontre facilement que $Y_\nu \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(]O, T[; V')$, et on en conclut

$$(2.19) \quad X_\nu - Y_\nu = [u_{p^*}(\tau^*) - u_{p_\nu}(\tau_\nu)] \vartheta_{(\tau^*)} \rightarrow 0,$$

et enfin (2.7).

Le lemme 2.1 est maintenant complètement démontré.

Paris C. N. R. S., avril 1965.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EGOROV JU. V. *Certain problems in the theory of optimal control*. Soviet Math. Doklady 3 (1962), 1080.
- [2] LIONS J. L. *Équations différentielles opérationnelles dans les espaces de Hilbert*. Cours C. I. M. E., Varenna (Italie) 1963.
- [3] LIONS J. L. *Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*. Springer 1961.
- [4] PONTRYAGIN S. L., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers 1962.