

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ALDO BRESSAN

**Coppie di contatto in relatività. Parte I. Equazioni
fondamentali della relatività ristretta e della relatività
generale in presenza di coppie di contatto**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 20,
n° 1 (1966), p. 63-99

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_1_63_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COPPIE DI CONTATTO IN RELATIVITÀ

PARTE I

EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA E DELLA RELATIVITÀ GENERALE IN PRESENZA DI COPPIE DI CONTATTO (*)

ALDO BRESSAN

N. 1. — Introduzione.

Nell'ambito della Fisica classica le equazioni fondamentali dei sistemi continui capaci di esplicitare coppie di contatto sono ben note⁽¹⁾. Inoltre, recentemente G. Grioli ha posto le basi di una rigorosa teoria dei corpi elastici capaci di coppie di contatto, basandosi sulla termodinamica e considerando deformazioni finite — cfr. [18] —. Tale argomento, in cui è essenziale l'uso del punto di vista lagrangiano, è ulteriormente stato oggetto di varie pubblicazioni — cfr. [1], [2], [3], [13], ..., [16], [19], [23], [35] e [36].

D'altro canto, in Relatività ristretta ci si è occupati di termodinamica (con Einstein e Plank) già due anni dopo la presentazione originale della Relatività ristretta stessa, e di elasticità (con Herglotz) sin dal 1911⁽²⁾.

Pervenuto alla Redazione il 13 Luglio 1965.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca N. 29 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno acc. 1964-65.

I principali risultati ottenuti nel presente lavoro sono stati brevemente esposti nella mia conferenza per il 5th meeting della Society for Natural Philosophy (Bressanone, giugno 1965).

⁽¹⁾ Vedi per esempio nell'enciclopedia [37] le due equazioni del moto (205.2) e (205.10) di Cauchy e l'equazione (differenziale) (241.4) del bilancio energetico (o I^o principio della termodinamica in forma generale). Ci si è occupati di coppie di contatto fin dal 1873. Per maggiori dettagli vedi le note 1 e 2 a p. 538 in [37].

⁽²⁾ Nel capitolo «Mechanics of Elastic Continua» in [22] si considerano in Relatività ristretta, tra l'altro, le trasformazioni di grandezze quali gli sforzi elastici, nel passaggio fra due osservatori inerziali. Ivi si rimanda a [20] riguardo ad analoghe trasformazioni del legame fra sforzi e deformazioni.

In Relatività generale, già nel 1930 si hanno, con Tolman e Ehrenfest, interessanti risultati sull'equilibrio termodinamico⁽³⁾; inoltre, attraverso vari sviluppi, basandosi sul tensore termodinamico $Q_{\alpha\beta}$ di C. Eckart introdotto nel 1940 riferendosi a fluidi in Relatività ristretta, è stata effettivamente costruita una termodinamica in Relatività generale capace di trattare la conduzione del calore nei fluidi⁽⁴⁾ e in materiali di tipo molto più generale.

Si è cominciato a trattare i materiali elastici in Relatività generale solo recentemente, e tale fatto pare connesso a difficoltà nella rappresentazione del legame sforzo deformazione. Tuttavia queste sono ormai superate — cfr. [33], [30] — anche riguardo alle deformazioni finite — cfr. [4] — cosicchè riferendosi a tali deformazioni, in [5], [6], [7], [8] si è potuta costruire nel quadro della Relatività generale una teoria a base termodinamica dei materiali non capaci di coppie di contatto prendendo in esame pure fenomeni ereditari⁽⁵⁾. Tra l'altro, tramite l'uso di una forma completamente

⁽³⁾ Tra l'altro, basandosi sulle leggi di Stefan e Boltzmann concernenti la pressione e la densità di energia della radiazione elettromagnetica in equilibrio entro una cavità praticata in un corpo nero, tali Autori mostrano che nel caso di un fluido in equilibrio termodinamico e in quiete in un riferimento x^α che renda la metrica $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ ($g_{00} < 0$) statica, è costante non la temperatura assoluta propria T ma la *temperatura tascabile* $T\sqrt{-g_{00}}$ — cfr. [34] p. 318; vedi pure [34] p. 128 —.

⁽⁴⁾ Riguardo al problema del fluido termodinamico — ossia capace di conduzione termica — in Relatività generale, dopo qualche caso particolare — cfr. [38] — si è considerato il problema generale in vari lavori. In un gruppo di questi — cfr. [26], ..., [29] — accanto al suaccennato tensore $Q_{\alpha\beta}$ si è usato un certo principio di continuità del calore. Tale uso è però discutibile — cfr. [5] note (5), (22) pp. 2, 13, 14; vedi pure l'ultima sezione di [5] N 1 —. Inoltre dai lavori [5], ..., [8] risulta che i procedimenti usati da C. Eckart in [10] possono trasportarsi in modo opportuno alla Relatività generale (senza bisogno di ricorrere a ulteriori principi) riferendosi a fluidi — cfr. [7] — a materiali elastici — cfr. [5] — e anche a materiali più generali — cfr. [8] —.

Si aggiunga che l'uso di un tensore termodinamico, da un punto di vista di principio, è necessario (nonostante sporadicamente si sia ritenuto di poterne fare a meno), per non implicare contraddizioni col principio relativistico di equivalenza tra massa ed energia (ben assodato sperimentalmente).

Ritenendo quindi i procedimenti un discorso soddisfacenti almeno nelle linee generali — cfr. nota (11) — e non conoscendone di migliori, mi sono conformato ad essi anche nel presente lavoro.

⁽⁵⁾ In [32] (1959) J. L. Synge, rilevate le difficoltà connesse con la relazione relativistica strain-stress, compie una parziale estensione della legge di Hooke alla Relatività generale imponendo un legame lineare tra i derivati assoluti dello strain e dello stress. Anche se con una tale teoria non si possono trattare problemi di equilibrio, tuttavia l'Autore riesce a basarvi un calcolo della velocità di propagazione delle onde sonore.

Rayner in [30] (1963) scrive in Relatività generale la legge lineare di Hooke nell'ambito puramente meccanico (adiabatico), usando coordinate proprie (solidali alla materia) e

lagrangiana delle equazioni dinamiche e termodinamiche, tale teoria relativistica permette un diretto trasporto alla Relatività generale dei risultati ottenuti in Fisica classica riguardo alle equazioni costitutive (in forma completamente lagrangiana) riguardanti un qualunque materiale di primo o second'ordine⁽⁶⁾ e non polare, cioè non capace di coppie di contatto.

In base alle considerate situazioni della ricerca scientifica in Fisica classica e in Relatività mi sembra giunto il momento di costruire teorie relativistiche capaci di trattare le coppie di contatto. Mi propongo appunto di raggiungere tale scopo mediante il presente lavoro, che divido in due parti. Mettendomi nell'ambito della Relatività ristretta o di quella generale, nella prima parte mi occupo sostanzialmente delle equazioni fondamentali⁽⁷⁾ e nella seconda principalmente di elasticità relativistica a base termodinamica. La considerata divisione in due parti è spontanea in quanto solo la seconda parte richiede l'uso del punto di vista lagrangiano⁽⁸⁾.

*
* * *

Volendo trattare le coppie di contatto in Relatività ristretta (considerando i fenomeni meccanici, elettromagnetici e termodinamici) la prima questione che considero, è di vedere se è possibile relativizzare la 2^a equazione di Cauchy (equazione puntuale dei momenti) e determinare il tensore energetico totale $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ in modo che l'annullarsi della divergenza di questo

basandosi sulla derivata del Lie.

Una più generale teoria dell'elasticità in Relatività generale è costruita in [4], [5] fissando l'attenzione su elementi assoluti e ponendosi a tale scopo da un punto di vista lagrangiano (più precisamente in [4] si usano delle coordinate materiali y^L alle quali, solo per comodità di calcolo, si associa una metrica da ritenersi indipendente dalle contingenze dei fatti, al pari delle y^L); inoltre ci si giova del calcolo dei doppi tensori e della derivazione lagrangiana trasversa, appositamente introdotta in [4].

Riguardo ai fenomeni ereditari, in [11] (1932) B. Finzi sostituisce le equazioni gravitazionali di Einstein con equazioni di tipo ereditario riferendosi al caso $X_{\alpha\beta} \equiv 0$ di materia disgregata — cfr. [8] nota (6) —; in [8] (1963) si mostra, tra l'altro, che sulla base di idee fondamentali (differenti da quelle inerenti [11] e) poste in parte in [24], [25], [4] e [5], si può considerare un generale legame sforzi deformazioni di tipo ereditario restando nel quadro delle equazioni originali di Einstein.

⁽⁶⁾ Dico di *n*-mo ordine un materiale in cui lo stress è una funzione del gradiente di posizione e dei suoi primi $n - 1$ derivati (tensoriali). Un materiale di primo ordine dicesi *semplice*. Tale è il più generale materiale elastico in senso comune.

⁽⁷⁾ Intendo le due equazioni di Cauchy e quella del bilancio energetico.

⁽⁸⁾ In particolare, nella seconda parte di questo lavoro occorre qualche nuovo risultato di cinematica relativistica dei sistemi continui oltre a quelli stabiliti in [4].

equivalga con ottima approssimazione alla I^a equazione di Cauchy⁽⁹⁾ e all'equazione del bilancio energetico⁽¹⁰⁾. Dimostro che a tale questione si può dare risposta affermativa [N. 11].

La cercata determinazione di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ presenta alcune difficoltà riguardo all'equazione del bilancio energetico. Per queste difficoltà si ha una certa ambiguità nella detta determinazione, la quale poi è accresciuta da un'altra ambiguità che si presenta nella relativizzazione della 2^a equazione di Cauchy [N. 10].

Tuttavia è spontaneo attribuire ad $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ una certa forma $u_{\alpha\beta}^{mna}$ la quale è non (necessariamente) simmetrica (tale è anche la sua parte spaziale, e su scala macroscopica).

Anche se, a mio avviso, non è possibile fare una discriminazione fra i tensori della suddetta forma $u_{\alpha\beta}^{mna}$ mediante soli criteri di semplicità (o di regolarità), si può tuttavia dimostrare [N. 13] che esistono un solo $u_{\alpha\beta}$ di tali tensori e una sola delle suaccennate possibili forme relativistiche della 2^a equazione di Cauchy, per cui in Relatività ristretta valgono certi integrali primi rappresentanti la conservazione del momento (spaziale) della quantità di moto del generico sistema chiuso Σ_c .

I suaccennati integrali primi hanno una forma che, mi sembra, si impone anche se essi non possono essere costruiti a partire da $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ come nel caso di assenza di coppie di contatto. Ciò è impossibile in quanto, da un lato, se quegli integrali fossero così costruiti, la simmetria di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ sarebbe condizione essenziale per la loro deducibilità — cfr. [22] p. 169 — ; d'altro lato la parte spaziale di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ non può esser sempre simmetrica, e per quantità che non si possono ritenere piccole [N. 10].

La teoria in discorso costruita in Relatività ristretta mi sembra soddisfacente, tra l'altro, in quanto ad essa possono trasportarsi per esempio gli usuali teoremi sul baricentro e sul risultante e sul momento risultante delle quantità di moto di Σ_c [NN. 12, 14]. Riguardo a tale argomento mi

⁽⁹⁾ Alla 1^a equazione di Cauchy corrisponde la sola parte spaziale dell'equazione $U_{\alpha\beta}{}^{|\beta} = 0$. Ciò mi ha indotto a relativizzare la 2^a equazione di Cauchy mediante un'equazione puramente spaziale.

⁽¹⁰⁾ In Fisica classica, mediante la 2^a equazione di Cauchy si elimina la parte emisimmetrica degli sforzi dalle altre due equazioni considerate cosicchè ci si può limitare ad usare appunto la 2^a equazione di Cauchy e quella del bilancio energetico modificate mediante la suaccennata eliminazione. Anzi, in conformità di una nota arbitrarietà riguardante gli sforzi meccanici ed elettromagnetici, si possono considerare tali sforzi simmetrici. Nel presente lavoro considero sia questo punto di vista, sia quello basato su sforzi eventualmente non simmetrici e anche sull'esplicita considerazione della 2^a equazione di Cauchy.

sembra interessante mostrare un certo teorema sulle coppie di contatto di carattere globale e qualitativamente nuovo rispetto alla Fisica classica [N. 15].

Nel trasporto della suaccennata teoria (basata sul tensore $u_{\alpha\beta}$) alla Relatività generale l'unica difficoltà è costituita dalla suddetta non simmetria di $u_{\alpha\beta}$. Si può però determinare un tensore $U_{\alpha\beta}$ (che non è la parte) simmetrica di $u_{\alpha\beta}$ la cui divergenza coincida con quella di $u_{\alpha\beta}$ anche in Relatività generale [N. 16]. È allora spontaneo introdurre un certo tensore energetico totale $U'_{\alpha\beta}$ in modo che dalle equazioni gravitazionali si possano dedurre ammissibili forme relativistiche dell'equazione del bilancio energetico e di entrambe le equazioni di Cauchy [N. 17].

* * *

Nei lavori relativistici sopra considerati e nel presente ci si propone di inquadrare nella Relatività ristretta o generale i fondamenti di teorie classiche via via più generali. I requisiti essenziali di coerenza logica e di accordo con l'esperienza implicano che le equazioni (locali) delle teorie relativistiche in considerazione, quando siano espresse in certi sistemi di coordinate (localmente privilegiati) differiscano per termini piccolissimi dalle corrispondenti equazioni classiche.

Se è possibile soddisfare ai detti requisiti, ciò può farsi in più modi. Si usano allora criteri di semplicità, o eventualmente altri criteri ragionevoli, in modo che le equazioni fondamentali delle teorie relativistiche in costruzione risultino determinate univocamente, e verosimilmente costituiscano un progresso effettivo rispetto a quelle classiche.

Va osservato che nel graduale sviluppo naturale della scienza può bene accadere che in un primo tempo si pongano le basi di una teoria relativistica in un certo modo, eventualmente compiendo un passo notevole, e che solo in un secondo tempo ad esse si apportino qualche raffinamento (di solito piccolo e a scapito della relativa semplicità) per tener conto anche di qualche particolare fenomeno (eventualmente noto anche nel primo tempo). A mio avviso, tali considerazioni valgono, per esempio, riguardo all'introduzione dell'importante tensore termodinamico $Q_{\alpha\beta}$ di K. Eckart⁽¹¹⁾.

⁽¹¹⁾ Nel libro [34] (1949) si trattano vari argomenti di termodinamica relativistica (statici o no come l'espansione irreversibile di gas senza conduzione termica) e tra l'altro si tratta la costanza della « temperatura tascabile » accennata in nota (3). In [34] p. 330 si auspica, tra l'altro, sostanzialmente una opportuna espressione del tensore termodinamico. Quello $Q_{\alpha\beta}$ introdotto da C. Eckart in Relatività ristretta nel 1940, considerato nella sua forma esplicita originale o in quelle in cui esso è stato usato nei lavori di relatività gene-

Concludendo, siccome a quanto mi consta la Relatività generale o ristretta non era ancora stata estesa al caso delle coppie di contatto, mi è sembrato interessante compiere una tale estensione in modo che, soddisfacendo i suddetti requisiti essenziali, questa possa eventualmente servire come base di ulteriori raffinamenti ⁽¹²⁾.

rale di mia conoscenza — per es. [4], ..., [8], [26], ..., [29] —, non rende conto della suaccennata costanza della temperatura tascabile rilevata nel 1934 riferendosi ad una metrica statica in Relatività generale. Nelle forme suaccennate il tensore $Q_{\alpha\beta}$ non rende conto nemmeno dei riflessi del considerato risultato del '34 entro la teoria della Relatività ristretta, riflessi dovuti al principio di equivalenza fra le forze gravitazionali e di trascinamento (entro tale teoria la costanza in discorso risulta significativa, per esempio, nel caso di un fluido in equilibrio termodinamico e in quiete rispetto ad un riferimento ad accelerazione intrinseca costante).

Un'ammissibile forma esplicita del tensore termodinamico $Q_{\alpha\beta}$ riferita a materiali generici e atta a render conto della suaccennata costanza è stata considerata nella conferenza « Termodinamica relativistica » che ho tenuto per il 5th meeting della Society for Natural Philosophy (Bressanone, giugno 1965).

L'accennato raffinamento della forma esplicita data da C. Eckart al tensore relativistico $Q_{\alpha\beta}$ è stato dunque suscitato da risultati relativistici di Tolman e Ehrenfert. A tal proposito val forse la pena di osservare che un tentativo di raffinamento della termodinamica relativistica, proposto in [5] p. 18, è connesso invece con certe conseguenze della legge classica di Fourier, poco soddisfacenti da un punto di vista di principio. Esso consiste, precisamente, in una semplice relativizzazione di una modifica della legge di Fourier dovuta a C. Cattaneo — cfr. [9] —. Sopra ho parlato di tentativo in quanto riguardo alla suaccennata modifica l'Autore stesso dice trattarsi di « idee ancor grezze e di portata indubbiamente limitata ».

⁽¹²⁾ Un raffinamento della teoria svolta nel presente lavoro potrebbe essere il riflesso di un eventuale raffinamento del principio di indifferenza materiale — cfr. [24], [25], [8] — per materiali d'ordine ≥ 1 — cfr. nota (6) —. Un tale raffinamento potrebbe forse ottenersi considerando l'esplicazione delle azioni di contatto (ossia delle forze e coppie di contatto) come fenomeni di propagazione (precisamente come azioni propagantesi con la velocità c della luce nel vuoto).

A mio avviso si può interpretare il lavoro [21] di Lincoln E. Bragg come rappresentante le azioni di contatto appunto in forma di fenomeno di propagazione. Probabilmente, in base alle nostre conoscenze sperimentali vi sono più modi di effettuare la suddetta rappresentazione. Riferendosi esclusivamente ai materiali del 1° ordine in Relatività ristretta, l'A. prova che, riguardo ad essi, il suddetto principio vale nella forma in cui era già stato proposto in [8]. Per il modo in cui tale dimostrazione è condotta sembra che il detto risultato debba mantenersi valido anche quando si effettui la suddetta rappresentazione delle azioni di contatto in qualsiasi altro modo (ragionevole dal punto di vista fisico). In base a ciò, il risultato in considerazione mi sembra certamente interessante.

Mi auguro che si voglia raffinare la teoria (classica o relativistica) dei materiali di ordine > 1 considerando le azioni di contatto come propagantesi e che ciò si faccia giustificando il modo in cui si tien conto di tale propagazione (in quanto il raffinamento suddetto ne può dipendere essenzialmente). La giustificazione in discorso, a mio avviso, dovrebbe dunque riguardare anche elementi indipendenti dai postulati della Rela-

CAP. I

ESISTENZA DI QUALCHE TENSORE ENERGETICO TOTALE $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$
CHE PERMETTA DI STABILIRE LE EQUAZIONI FONDAMENTALI
DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA
IN PRESENZA DI COPPIE DI CONTATTO

N. 2. — Preliminari cinematici in Fisica classica e in Relatività ristretta o generale.

Nel presente lavoro ho occasione di pormi talvolta nell'ambito della Fisica classica e tal altre in quelli della Relatività generale o ristretta. Nel primo caso intendo con $\mathcal{S}_{(i)}$ uno spazio inerziale. Negli ultimi due casi indico con \mathcal{S}_4 il cronotopo (relativistico); inoltre, detto $\delta_{\alpha\beta}$ il simbolo di Kronecker, denoto con $ds^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ la metrica ⁽¹³⁾ di \mathcal{S}_4 riducibile localmente alla forma ⁽¹⁴⁾

$$(1) \quad ds^2 = -\delta'_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\delta'_{rs} = \delta_{rs}, \delta'_{0\alpha} = -\delta_{0\alpha}).$$

In $\mathcal{S}_{(i)}$ e \mathcal{S}_4 considero tensori eventualmente orientati (assiali) ma tutti di peso nullo — cfr. [37] p. 661 —.

Denoto con la sbarra $(T \dots]_{\alpha}$ la derivazione tensoriale; inoltre uso le stesse convenzioni che in [37] riguardo alla simmetrizzazione ed antisimmetrizzazione di tensori, cosicchè, per esempio, posso scrivere

$$(2) \quad 2T^{[ri} U_s] = T^{ri} U_s + T^{si} U_r, \quad 2T^{[ri} U_s] = T^{ri} U_s - T^{si} U_r.$$

Sia \mathcal{C} un corpo continuo, $d\mathcal{C}$ un suo qualunque elemento (porzione infinitesima) e dC il volume proprio (attuale) di questo.

Il concetto di volume proprio, essenziale in Relatività, è accettabile anche in Fisica classica in quanto in questa esso equivale al concetto (a

tività, e in particolare ipotesi sulle modalità delle interazioni a corto raggio (l'azione subita da una particella B e proveniente dalla particella A , a mio avviso, potrebbe ritenersi dipendente dalla distanza dei punti eventi E_A di emissione ed E_B di ricezione, calcolata rispetto ad un osservatore inerziale solidale con B in E_B ; inoltre tale azione può dipendere dallo stato di A in E_A e questo può essere influenzato da B e anche da altre particelle).

⁽¹³⁾ Intendo una metrica definita fisicamente, per esempio la metrica cronometrica (relativa al secondo come unità di tempo) considerata in [33] Chap. III.

⁽¹⁴⁾ Sopprimo la sommatoria secondo la convenzione di Einstein e convengo pure che, salvo contrario avviso, gli indici latini varino da 1 a 3 e quelli greci da 0 a 3.

priori più restrittivo) di volume assoluto (ossia misurato da un osservatore comunque mobile rispetto al $d\mathcal{C}$). Nel presente lavoro userò volume proprio ed altri concetti relativistici anche in Fisica classica perchè ciò facilita, mi sembra, certi confronti fra questa e la Relatività (e inoltre abbrevia l'esposizione).

Sia P^* il generico punto materiale di \mathcal{C} ⁽¹⁵⁾. Nell'ambito della Relatività indicherò con u^α la sua 4-velocità dx^α/ds e talvolta userò coordinate x^α localmente naturali ⁽¹⁶⁾ e proprie, ossia soddisfacenti le condizioni

$$(3) \quad g_{\alpha\beta} = \delta'_{\alpha\beta}, \quad \{\alpha\beta, \gamma\} = 0, \quad u^\alpha = \delta_0^\alpha.$$

Fisso ora uno stato Σ^* di riferimento per \mathcal{C} ⁽¹⁷⁾. In esso l'elemento $d\mathcal{C}$ (circostante P^*) abbia il volume proprio dC^* e la massa a riposo k^*dC^* (per la proporzionalità tra masse inerziali e gravitazionali posso supporre che si tratti di massa gravitazionale). Posto $k dC = k^* dC^*$, k può dirsi densità propria attuale della massa (gravitazionale) a riposo nello stato Σ^* .

Infine μdC sia la massa (gravitazionale) attuale a riposo e $kw dC$ l'energia interna a riposo del $d\mathcal{C}$ (con la costante additiva scelta in modo che risulti $w = 0$ in Σ^*).

Nell'ambito della Fisica classica si ha

$$(4) \quad \dot{k} + kv^r{}_{|r} = 0, \quad \mu = k \left(k = k^* \frac{dC^*}{dC} = k^* \mathcal{D}^{-1} \right)$$

ove v^r è la velocità di P^* . La $(4)_1$ è una conseguenza cinematica della proporzionalità inversa di k al volume attuale \mathcal{D} rapportato a quello di riferimento [cfr. $(4)_3$]. La $(4)_2$ esprime invece il principio classico di conservazione della massa.

D'altro canto nell'ambito della Relatività (ristretta o generale) si ha

$$(4') \quad \frac{Dk}{Ds} + kw^\alpha{}_{|\alpha} = 0, \quad \mu = k \left(1 + \frac{w}{c^2} \right) \left(k = k^* \frac{dC^*}{dC} = k^* \mathcal{D}^{-1} \right)$$

⁽¹⁵⁾ Sia in Fisica classica che in Relatività si può individuare P^* dandone le coordinate $y^L = \varphi^L(P^*)$ in un prefisso sistema φ^L di coordinate materiali.

⁽¹⁶⁾ Tolman — vedi [34] p. 180 — chiama (localmente) naturali coordinate che siano (localmente) pseudo cartesiane — cfr. $(3)_1$ — e geodetiche — cfr. $(3)_2$ —.

⁽¹⁷⁾ Quando si voglia tener conto di fenomeni ereditari nell'ambito della Relatività generale, conviene scegliere Σ^* in modo che se \mathcal{C} si trova ad un dato istante ϑ nello stato Σ^* (con ϑ si intenda una sezione spaziale di \mathcal{C}_4) allora, tra l'altro, prima di ϑ \mathcal{C} è rimasto solidale ad un riferimento (sistema di coordinate) che rende la metrica stazionaria ($g_{0r} = 0$, $\partial g_{\alpha\beta} / \partial x^0 = 0$) e inoltre la temperatura propria T è rimasta costante ($T \equiv T^*$).

ove c è la velocità della luce nel vuoto. La $(4')_1$ è una conseguenza cinematica della posizione $(4')_3$ — come l'equazione classica $(4)_1$ lo è di $(4)_3$ —. La $(4')_2$ — corrispondente all'equazione classica $(4)_2$ di conservazione — esprime il principio relativistico di equivalenza tra massa ed energia.

N. 3. — Equazioni dinamiche classiche che ci si propone di relativizzare.

Nell'ambito della Fisica classica sia X_{rs} il tensore (non necessariamente simmetrico) degli sforzi in P^* e m_{rsl} quello dei momenti di contatto. Ciò significa che, per ogni superficie orientata $d\sigma_l$ per P^* , $X_r^l d\sigma_l$ rappresenta il risultante e $m_{rs}^l d\sigma_l$ il (duale del) momento risultante⁽¹⁸⁾ delle forze molecolari — ossia delle forze e coppie di contatto — attraverso $d\sigma_l$ ⁽¹⁹⁾.

Sia k^l il vettore di conduzione termica e $\bar{q} dC/dt$ l'energia assorbita dall'elemento dC nel tempuscolo (proprio) dt per effetto Joule ed eventualmente per lavoro (microscopico) fatto dal campo elettromagnetico a causa di variazione dello stato di polarizzazione.

Indico col punto (\dot{w}) la derivata molecolare e pongo

$$(5) \quad \dot{d}_{rs} = v_{(r/s)}, \quad w_{rs} = v_{[r/s]}, \quad a_r = \dot{v}_r.$$

Allora le equazioni (dei sistemi continui) di Cauchy e quella del bilancio energetico (o 1° principio della termodinamica) si scrivono⁽²⁰⁾

$$(6) \quad \begin{cases} ka_r = f_r - X_{rs}^l, & M_{rs} + X_{[rs]} = m_{rsl}^l, \\ k\dot{w} + X^{(rs)} \dot{d}_{rs} - m^{rsl} w_{rs|l} = k\bar{q} - h^l_{|l} \left(\dot{w} = \frac{d\dot{w}}{dt} + w_{|r} v^r \right). \end{cases}$$

Risulterà utile pure ricordare che per $(6)_2$ la $(6)_1$ diviene

$$(6') \quad ka_r = \bar{f}_r - X_{(rs)}^l - m_{rsl}^l \quad \text{ove} \quad \bar{f}_r = f_r + M_{rs}^l;$$

⁽¹⁸⁾ Detto M_r il momento delle forze in considerazione e ϵ_{rsi} il tensore di Ricci in $\mathcal{S}_{(i)}$, è $M_i = \epsilon_{irs} m^{rsl} d\sigma_l$.

⁽¹⁹⁾ Per forze molecolari attraverso a $d\sigma_l$ intendo precisamente le forze esplicate dagli elementi materiali aderenti alla faccia negativa di $d\sigma_l$ su quelli aderenti alla faccia positiva.

⁽²⁰⁾ Vedi per es. [37] (205.2), (205.10) e (241.4) ove si usano le opposte delle grandezze X^{rs} , m^{rsl} e h^l considerate nel presente lavoro. $M_{rs} dC$ è il duale del momento intrinseco (rispetto a P^*) della sollecitazione a distanza sul dC .

inoltre, poichè è $m^{rs} = -m^{sr}$ e $m^{rs}{}_{|l} v_{r|s} = (m^{rs} v_{r|s})_{|l} - m^{rs} v_{r|sl}$, per (5)_{1,2} e (6)₂ la (6)₃ diviene

$$(6'') \quad k \dot{w} + X^{rs} v_{r|s} = (v_{r|s} m^{rs} - h^l)_{|l} + kq \quad \text{ove} \quad kq = k\bar{q} - M^{[rs]} v_{r|s}.$$

Due punti di vista estremi si presentano ora spontaneamente. Dal primo, basato sulle tre equazioni (6)_{1,2} e (6''), si ammettono asimmetrie negli sforzi; dal secondo punto di vista, basato sulle due equazioni (6)₃ e (6'), si considerano invece gli sforzi simmetrici.

Sia ora $\mathcal{S}_{(g)}$ uno spazio che, all'istante considerato, rispetto a $\mathcal{S}_{(i)}$ trasli con la stessa velocità di P^* e abbia in P^* accelerazione eguale a quella di gravità. Gli analoghi per $\mathcal{S}_{(g)}$ delle equazioni (6), (6') e (6'') si ottengono da queste ultime togliendovi i contributi dovuti alla gravità. Le equazioni classiche (6), (6') e (6'') così semplificate (ossia riferite a $\mathcal{S}_{(g)}$) devono risultare pochissimo differenti dai rispettivi analoghi relativistici scritti in coordinate localmente naturali e proprie [cfr. (3) e nota (16)] in quanto in Relatività ristretta la gravitazione viene trascurata, e in Relatività generale si tien conto di essa mediante la curvatura del cronotopo.

Inoltre gli analoghi relativistici di (6), (6') e (6'') devono essere equazioni che contengono c come parametro e che — eventualmente in seguito a moltiplicazione per opportune potenze di c — tendono rispettivamente alle (6), (6') e (6'') riferite ad $\mathcal{S}_{(g)}$, quando c tenda a zero.

In questo lavoro mi propongo di mostrare che sia in Relatività ristretta che in Relatività generale i suddetti analoghi possono scegliersi in modo che, tra l'altro, nell'ambito della Relatività ristretta valgano gli integrali primi di conservazione del risultante e del momento risultante delle quantità di moto dell'universo.

N. 4. — Alcuni preliminari geometrici e cinematici in Relatività.

Sia $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ il tensore assiale e completamente emisimmetrico di Ricci, per cui

$$(7) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon_{0123} = -\sqrt{-g} \varepsilon^{0123} = 1 \quad (g = \det \|g_{\alpha\beta}\|).$$

Se per esempio $T^{\alpha\dots} u_\alpha = 0$, dico che l'indice α del tensore $T^{\alpha\dots}$ è spaziale. Dico che il tensore T^{\dots} è spaziale se sono spaziali tutti i suoi indici.

Si può introdurre il proiettore spaziale $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ e il derivato trasverso $T^{\dots}{}_{|\tilde{\alpha}}$ mediante le

$$(8) \quad \tilde{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta, \quad T^{\dots}{}_{|\tilde{\alpha}} = T^{\dots}{}_{|\beta} \tilde{g}^\beta{}_\alpha.$$

Gli analoghi relativistici delle definizioni (5) sono

$$(9) \quad u_{\alpha|\tilde{\beta}} = \Delta_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta}, \quad \Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\beta\alpha}, \quad \Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha} \quad \left(u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \right),$$

$$(10) \quad A^\alpha = c^{-2} a^\alpha = c^{-2} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{Du^\alpha}{Ds} = u^\alpha{}_{|\beta} u^\beta$$

$$(u^\alpha u_\alpha = -1 \quad \text{onde} \quad u^\alpha A_\alpha = 0 = u^\alpha u_{\alpha|\beta}).$$

I tensori $\tilde{g}^{\alpha\beta}$, A^α , $\Delta_{\alpha\beta}$ e $\Omega_{\alpha\beta}$ risultano tutti spaziali.

Per ogni tensore doppio $T_{\alpha\beta}$ è determinata la *decomposizione naturale*

$$(11) \quad T_{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\alpha\beta} + Tu_\alpha u_\beta + T'_\alpha u_\beta + u_\alpha T''_\beta$$

$$\text{con} \quad T'_\alpha u^\alpha = u^\beta T''_\beta = u^\alpha \tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\alpha\beta} u^\beta = 0.$$

Dirò che i tensori $\tilde{T}_{\alpha\beta}$, $T'_\alpha u_\beta + u_\alpha T''_\beta$ e $Tu_\alpha u_\beta$ sono rispettivamente i *componenti spaziali, misto e temporale* di $T_{\alpha\beta}$. Convengo di usare riguardo a qualsiasi tensore doppio notazioni analoghe alle (11) e alla

$$(11') \quad T''_{\alpha\beta} = T'_\alpha u_\beta + u_\alpha T''_\beta.$$

Risulteranno utili le seguenti proprietà delle divergenze, valide anche in un cronotopo effettivamente Riemanniano:

$$(12) \quad T^{\dots\beta}{}_{|\tilde{\beta}} = T^{\dots\beta}{}_{|\beta} - T^{\dots\beta} A_\beta \quad \text{per} \quad T^{\dots\beta} u_\beta = 0,$$

$$(13) \quad \tilde{g}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{e}} T^{\dots\dot{\beta}}{}_{|\dot{\beta}} = T^{\dots\dot{\beta}}{}_{|\beta} - u^\alpha u_{\dot{e}|\beta} T^{\dots\dot{\beta}} \quad \text{per} \quad T^{\dots\dot{\beta}} u_\alpha = 0.$$

N. 5. — Preliminari dinamici ed elettromagnetici in Relatività.

Passando dalla Fisica classica alla Relatività (ristretta o generale) i tensori $X_{r\dot{t}}$ e $m_{r\dot{s}\dot{t}}$ introdotti al N. 3 divengono tensori spaziali⁽²¹⁾; si ha precisamente

$$(14) \quad X_{\dot{\alpha}\beta} u^\beta = 0 = u^\alpha X_{\alpha\beta}, \quad m_{\alpha\beta\gamma} = -m_{\beta\alpha\gamma}, \quad u^\alpha m_{\alpha\beta\gamma} = 0 = m_{\alpha\beta\gamma} u^\gamma.$$

⁽²¹⁾ È opportuno pensarli misurati in un riferimento x^α localmente naturale e proprio [cfr. (3)].

Si tiene conto del campo elettromagnetico mediante un tensore doppio $E_{\alpha\beta}$ non necessariamente simmetrico e, posto

$$(15) \quad \begin{cases} \Pi^{(e)} = cu_\alpha E^{\alpha\beta} |_\beta, & \mathcal{C}_\alpha = -\tilde{g}_\alpha^e E_{e\beta} |^\beta, & M_{\alpha\beta} = \tilde{E}_{[\alpha\beta]}, \\ \bar{\Pi}^{(e)} = \Pi^{(e)} - cu^\alpha M_{\alpha\beta} |^\beta, & \bar{\mathcal{C}}_\alpha = \mathcal{C}_\alpha + \tilde{g}_\alpha^e M_{e\beta} |^\beta, \end{cases}$$

si interpreta, per esempio, $\Pi^{(e)} dC$ come potenza spesa dal campo sull'elemento dC , e $\mathcal{C}_\alpha dC$ e $M_{\alpha\beta} dC$ come risultante e duale del momento risultante (intrinseco) della sollecitazione esplicata dal campo sul dC . Brevemente si può dire che le quantità $\Pi^{(e)}$, \mathcal{C}_α , $M_{\alpha\beta}$, $\bar{\Pi}^{(e)}$ e $\bar{\mathcal{C}}_\alpha$ sono, come apparirà chiaramente al N. 8, gli analoghi relativistici rispettivamente delle quantità kq , f_r , M_{rs} , $k\bar{q}$ e \bar{f}_r figuranti nelle equazioni classiche (6), (6') e (6'') riferite ad $\mathcal{S}_{(g)}$ (cosicchè le forze a distanza si identificano con quelle elettromagnetiche).

Stante la convenzione (11'), per (15)_{1, 2, 3} le (15)_{4, 5} divengono

$$(16) \quad \bar{\Pi}^{(e)} = cu^\alpha (E_{(\alpha\beta)} + E'_{[\alpha\beta]}) |^\beta, \quad \bar{\mathcal{C}}_\alpha = -\tilde{g}_\alpha^e (E_{(e\beta)} + E'_{[e\beta]}).$$

Di solito si suppone $E'_\alpha = E''_\alpha$, ossia $E'_{[\alpha\beta]} = 0$, oppure si fanno ipotesi che hanno lo stesso ufficio che questa ha quando, come nella presente trattazione, si assume che il tensore $D_{\alpha\beta}$ caratterizzante la materia abbia componente misto simmetrico — cfr. N. 8 nota (26) —. Tengo esplicitamente conto anche del termine in $E'_{[\alpha\beta]}$ specialmente per poter mostrare [N. 13] che anche in Relatività ristretta l'ipotesi $E'_\alpha = E''_\alpha$ è opportuna pure nel caso generale qui considerato ($m^{\alpha\beta\gamma} \not\equiv 0$) e sostanzialmente per gli stessi motivi che nel caso $m^{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$.

Spesso si identifica $E_{\alpha\beta}$ col tensore ${}^1E_{\alpha\beta}$ di Minkowski. Considerati i tensori

$$(17) \quad {}^2E_{\alpha\beta} = {}^1E u_\alpha u_\beta + 2{}^1E'_{(\alpha} u_{\beta)} + {}^1\tilde{E}_{\alpha\beta}, \quad {}^3E_{\alpha\beta} = {}^1E u_\alpha u_\beta + {}^1E'_{(\alpha\beta)} + {}^1\tilde{E}_{\alpha\beta}$$

a componente misto simmetrico, si può chiamare ${}^2E_{\alpha\beta} - 0 {}^2E_{(\alpha\beta)}$ — tensore di Abraham — cfr. [22] p. 205 —. Talvolta così è stato chiamato il tensore ${}^3E_{(\alpha\beta)}$, ossia ${}^1E_{(\alpha\beta)}$ ⁽²²⁾.

⁽²²⁾ Sostanzialmente si pone appunto $E_{\alpha\beta} = {}^1E_{(\alpha\beta)}$ per esempio in [12] p. 425. Seguendo [12] ho posto $E_{\alpha\beta} = {}^1E_{(\alpha\beta)} = {}^3E_{(\alpha\beta)}$ in [5], ..., [8]. Sostituendo tale posizione con la $E_{\alpha\beta} = {}^2E_{(\alpha\beta)}$ in armonia con [22] p. 205, nessuna conclusione esplicitamente tratta in [5], ..., [8] risulta modificata, anche se la teoria ottenuta mediante la detta sostituzione non può ritenersi del tutto equivalente a quella originale.

Un'altra determinazione ${}^4E_{\alpha\beta}$ si suole assumere per $E_{\alpha\beta}$ quando si scrivono le equazioni di Maxwell mettendo in evidenza cariche e correnti di polarizzazione. ${}^4E_{\alpha\beta}$ si costruisce anche nella materia mediante il campo elettrico E_α e l'induzione magnetica B_α come sostanzialmente ogni autore costruisce $E_{\alpha\beta}$ nel vuoto mediante E_α e il campo magnetico H_α — cfr. [37] (287.2), (287.3) —.

Teorie costruite mediante diverse determinazioni di $E_{\alpha\beta}$ possono non essere affatto in contrasto riguardo alla previsione di fenomeni fisici — cfr. N. 8 nota 26 — e in pratica le questioni che tali teorie hanno suscitato possono almeno in parte ritenersi formali — cfr. per es. [17] —.

N. 6. — Sulla relativizzazione della 2ª equazione di Cauchy in presenza di coppie di contatto.

Mostro qualche ambiguità nell'equazione di cui nel titolo, cogliendo pure l'occasione per stabilire qualche utile formula preliminare.

Stanti (15)₃ e le convenzioni (2), (8)₂ e (11), mi sembra spontanea ciascuna delle due seguenti relativizzazioni dell'equazione dei momenti (6)₂.

$$(18) \quad X_{[\alpha\beta]} + \tilde{E}_{[\alpha\beta]} = \tilde{g}_{\alpha e} \tilde{g}_{\beta\sigma} m^{e\sigma\gamma}{}_{|\gamma}, \quad X_{[\alpha\beta]} + \tilde{E}_{[\alpha\beta]} = \tilde{g}_{\alpha e} \tilde{g}_{\beta\sigma} m^{e\sigma\gamma}{}_{|\tilde{\gamma}}.$$

La differenza fra queste è piccolissima (dell'ordine di c^{-2}) giacchè per (12) e per il carattere spaziale di $m^{\alpha\beta\gamma}$ — cfr. (14)_{3,4} — è

$$(19) \quad m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma} - m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\tilde{\gamma}} = m^{\alpha\beta\gamma} A_\gamma = \tilde{g}^\alpha_e \tilde{g}^\beta_\sigma (m^{e\sigma\gamma}{}_{|\gamma} - m^{e\sigma\gamma}{}_{|\tilde{\gamma}}).$$

Nel seguito ammetterò che una delle eguaglianze (18) debba valere come legge fisica.

Poichè interesseranno i divari tra $m_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_{|\gamma}$ e $m_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_{|\tilde{\gamma}}$ da un lato e i secondi membri di (18)₁ e rispettivamente (18)₂ dall'altro, ricordo che, stante (8)₁, è $\tilde{g}^\alpha_{e|\gamma} = u^\alpha{}_{|\gamma} u_e + u^\alpha u_e{}_{|\gamma}$; allora per (10) e per il carattere spaziale di $m^{\alpha\beta\gamma}$ [cfr. (14)], si ha

$$(20) \quad m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma} = (\tilde{g}^\alpha_e \tilde{g}^\beta_\sigma m^{e\sigma\gamma})_{|\gamma} = \tilde{g}^\alpha_e \tilde{g}^\beta_\sigma m^{e\sigma\gamma}{}_{|\gamma} + u^\alpha u_{e|\gamma} m^{e\beta\gamma} + u^\beta u_{\sigma|\gamma} m^{\alpha\sigma\gamma}.$$

Stanti (8)₂, (9) e (14)_{3,4} pongo

$$(21) \quad \lambda^\beta = u_{e|\gamma} m^{e\beta\gamma} = u_{e|\tilde{\gamma}} m^{e\beta\gamma} \text{ onde } \lambda^\beta u_\beta = 0,$$

cosicchè in base a (19), (20) e (14)_{3,4,5}, i suddetti divari sono determinati da

$$(22) \quad m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma} - \tilde{g}^\alpha_e \tilde{g}^\beta_\sigma m^{e\sigma\gamma}{}_{|\gamma} = m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\tilde{\gamma}} - \tilde{g}^\alpha_e \tilde{g}^\beta_\sigma m^{e\sigma\gamma}{}_{|\tilde{\gamma}} = u^\alpha \lambda^\beta - \lambda^\alpha u^\beta.$$

Dunque essi coincidono con un tensore misto [N. 4] piccolissimo — dell'ordine di c^{-2} — e si annullano dove il moto è localmente rigido.

Tra l'altro per discutere talune difficoltà connesse con le equazioni relativistiche di conservazione, conviene dedurre ⁽²³⁾ da (21)₃ le formule ⁽²⁴⁾

$$(23) \quad (u_\alpha \lambda^\beta)_{|\beta} = u_{\alpha|\tilde{\beta}} \lambda^\beta + u_\alpha \lambda^\beta_{|\beta}, \quad (\lambda_\alpha u^\beta)_{|\beta} = \lambda_{\alpha|\beta} u^\beta + \lambda_\alpha u^\beta_{|\beta}$$

le cui parti temporali per (10) e (12) sono

$$(24) \quad -u^\alpha (u_\alpha \lambda^\beta)_{|\beta} = \lambda^\beta_{|\beta} = \lambda^\beta_{|\tilde{\beta}} + \lambda^\beta A_\beta, \quad -u^\alpha (\lambda_\alpha u^\beta)_{|\beta} = \lambda^\alpha A_\alpha.$$

Per (21) λ^β è dell'ordine di c^{-1} quindi, per (9) e (10), i termini spaziali nelle (23) sono dell'ordine di c^{-2} e i termini in A_α nelle (24) dell'ordine di c^{-3} .

N. 7. — Sulla potenza $\Pi^{(m)}$ delle coppie di contatto in Relatività.

Tra l'altro ancora con lo scopo di stabilire utili formule preliminari, mostro un'ambiguità del tipo di quella rilevata al numero precedente, riguardo alla scelta dell'analogo relativistico $\Pi^{(m)}$ dell'espressione classica — $m^{rst} \omega_{rst}$ [cfr. (6)₃] per la potenza delle coppie di contatto.

Precisamente, in primo luogo si può identificare la potenza $\Pi^{(m)}$ (per unità di volume proprio) delle coppie di contatto con $\Pi_1^{(m)}$ ove, stanti (9) e (14)_{3, 4, 5}, si intenda

$$(25) \quad \Pi_1^{(m)} = -c u_{\alpha|\tilde{\beta}\gamma} m^{\alpha\beta\gamma} = -c \Omega_{\alpha\beta\gamma} m^{\alpha\beta\gamma}.$$

Infatti in un riferimento x^α localmente naturale e proprio [cfr. (3)] risulta $\Pi_1^{(m)} = -c \Omega_{rst} m^{rst}$ cosicchè per (5)₂ e (9) $\Pi_1^{(m)}$ si identifica col termine in m^{rst} figurante nell'equazione classica (6)₃.

Va osservato che, essendo per (12) $u_{\alpha|\beta} - u_{\alpha|\tilde{\beta}} = u_\alpha A_\beta$, si ha

$$(26) \quad u_{\alpha|\tilde{\beta}\gamma} - u_{\alpha|\beta\gamma} = u_{\alpha|\gamma} A_\beta + u_\alpha A_{\beta|\gamma}.$$

Allora per (14)₄ è

$$(27) \quad \Pi_2^{(m)} \equiv -c u_{\alpha|\beta\gamma} m^{\alpha\beta\gamma} = \Pi_1^{(m)} - c u_{\alpha|\gamma} A_\beta m^{\alpha\beta\gamma}.$$

⁽²³⁾ Le (23) e (24) si deducono come le formule analoghe per i due termini del tensore termodinamico (29) di K. Eckart — cfr. [26] o [5] —.

⁽²⁴⁾ Per l'equazione di continuità (4'), la (23)₂ equivale alla $(v_\alpha u^\beta)_{|\beta} = k D (k^{-1} v_\alpha) / D S$.

Dunque la differenza $\Pi_2^{(m)} - \Pi_1^{(m)}$ è dell'ordine di c^{-2} cosicchè non si può escludere che, in secondo luogo, convenga assumere $\Pi^{(m)} = \Pi_1^{(m)}$, tanto più che (27)₁ appare più semplice di (25)₁.

A questo punto non sembra affatto da escludere neppure che, trattando le equazioni costitutive di materiali capaci di coppie di contatto, l'uso degli elementi lagrangiani necessari a una tale trattazione possano consigliare una terza scelta per $\Pi^{(m)}$ sempre molto prossima a $\Pi_1^{(m)}$. Una tale scelta sarà appunto fatta nella Parte II di questo lavoro trattando l'elasticità asimmetrica (con coppie di contatto) in Relatività ristretta o generale.

N. 8. — Richiami concernenti le equazioni relativistiche fondamentali equivalenti alle due equazioni di Cauchy e a quella del bilancio energetico.

In assenza di coppie di contatto ma in presenza di materia anche non disgregata ($X_{\alpha\beta} \neq 0$) e di fenomeni termici ed elettromagnetici, in Relatività ristretta o generale si usa ⁽²⁵⁾ come tensore energetico totale $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ il tensore ⁽²⁶⁾

$$(28) \quad T_{\alpha\beta} = \varrho u_\alpha u_\beta + X_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta} \quad [\varrho = c^2 \mu = k(c^2 + w)]$$

⁽²⁵⁾ Vari autori assumono sostanzialmente $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ [cfr. (28)] in casi più o meno generali: C. Eckart in [10] nel caso dei fluidi in Relatività ristretta, Pham Man Quan in [26], ..., [29] nel caso di fluidi in Relatività generale, e A. Bressan in [5], ..., [8] nel caso generale di materiali del 1° ordine — cfr. nota (6) — non polari e in particolare elastici. Riguardo al tensore $Q_{\alpha\beta}$ figurante in (28) vedi la nota (4) e, riguardo a questioni connesse con la temperatura tascabile, anche le note (3) e (11).

⁽²⁶⁾ Il tensore termodinamico $Q_{\alpha\beta}$ è simmetrico e misto [n. 4]; inoltre, oltre a $E_{\alpha\beta}$, esso è l'unico termine di $T_{\alpha\beta}$ [cfr. (28)] che abbia un componente misto non $\equiv 0$. Quindi è possibile mutare il tensore $E_{\alpha\beta}$ in $E_{\alpha\beta} + \Delta E_{\alpha\beta}$ lasciando inalterato il tensore energetico totale $T_{\alpha\beta}$ ($\Delta T_{\alpha\beta} = 0$) purchè detto mutamento lasci invariata la parte mista $E_{\alpha\beta}'''$ di $E_{\alpha\beta}$. Basta modificare corrispondentemente $\varrho(e w)$ e $X_{\alpha\beta}$ secondo le formule

$$a) \quad \Delta X_{\alpha\beta} = - \Delta \tilde{E}_{\alpha\beta}, \quad \Delta \varrho = k \Delta w = - \Delta E \quad [\text{cfr. (11) e (28)}_{2,3}]$$

Ciò è in accordo per esempio con l'affermazione dell'equivalenza di certe definizioni differenti di $E_{\alpha\beta}$ a patto di usarle in corrispondenza a opportune forme di certe controparti meccaniche — cfr. [37] p. 691 —.

Nel caso che le suaccennate determinazioni di $E_{\alpha\beta}$ differiscano anche per la parte mista $E_{\alpha\beta}''' \neq 0$ gli effetti di tale variazione sulla divergenza $E_{\alpha\beta}{}^{|\beta}$ sono, nei casi effettivamente considerati da qualche autore, dello stesso ordine di grandezza che in corrispondenza al passaggio fra i tensori di Minkowski e di Abraham, e in questo passaggio i suddetti effetti sono ritenuti piccoli — cfr. [22] p. 205 —.

ove si ritiene $E'_{[\alpha\beta]} = 0$ [cfr. (11')] e inoltre, detto eq_α il vettore di corrente termica — analogo al vettore classico h_i figurante in (6)₃ —, si intende con C. Eckart :

$$(29) \quad Q_{\alpha\beta} = u_\alpha q_\beta + q_\alpha u_\beta = Q_{\beta\alpha} \quad (q_\alpha u^\alpha = 0).$$

Allora, stanti le convenzioni (2) e (11), a meno di termini in c^{-2} le equazioni classiche (6) — o più precisamente le (6)_{1,2} e (6'') — equivalgono alle

$$(30) \quad \mathcal{U}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0, \quad \tilde{\mathcal{U}}_{[\alpha\beta]} = 0 \quad (E'_{[\alpha\beta]} \equiv 0)$$

considerate in coordinate localmente naturali e proprie [cfr. (3)]. Ciò accade — anche quando, come ora, si intenda prescindere da (30)₂ — in quanto, in primo luogo, nelle suddette coordinate il vettore spaziale — $T_{r\beta}{}^{|\beta}$ rappresenta, a meno di termini in c^{-2} , il risultante della forza specifica d'inerzia — μa_r e delle forze specifiche — $X_{rs}{}^{|s}$ e \mathcal{E}_r [cfr. (15)₂] dovute agli sforzi meccanici e rispettivamente elettromagnetici. Inoltre, scrivendo l'equazione classica (6)₁ riferita allo spazio $S_{(g)}$ [N 3], tale risultante si indica con $f_r - \mu a_r - X_{rs}{}^{|s}$.⁽²⁷⁾ Allora la (6)₁ approssima la parte spaziale della (30)₁ per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ a meno di termini in c^{-2} .

Per (11), (14)_{1,2}, (28), (29) e (30)₂ il tensore $\tilde{\mathcal{U}}_{\alpha\beta} (= \tilde{T}_{\alpha\beta})$ è simmetrico, inoltre $\mathcal{U}'_{[\alpha\beta]} = E'_{[\alpha\beta]}$ [cfr. (11')]. Quindi la (30)₁ equivale alla

$$(30') \quad (\mathcal{U}_{(\alpha\beta)} + E'_{[\alpha\beta]})^{|\beta} = 0, \text{ onde } g_\alpha{}^e (\mathcal{U}_{(e\beta)} + E'_{[e\beta]}) = 0 \text{ e } cu^\alpha (\mathcal{U}_{(\alpha\beta)} + E'_{[\alpha\beta]}) = 0.$$

E' noto che, a meno di termini dell'ordine di c^{-2} , $T_{(r\beta)}{}^{|\beta}$ è il risultante della forza specifica — μa_r e delle — $X_{(rs)}{}^{|s}$ e \mathcal{E}_r [cfr. (16)₂] dovute alla parte simmetrica degli sforzi meccanici e rispettivamente alle forze e alle coppie elettromagnetiche⁽²⁸⁾. Inoltre, per $m^{rs} \equiv 0$, nell'equazione classica (6') riferita allo spazio $S_{(g)}$ [N 3] l'ultima delle forze suddette è espressa da \bar{f}_r . Allora è immediato riconoscere che la (6'), considerata nel modo suddetto, approssima la parte spaziale (30')₂ della (30')₁.

In secondo luogo, stanti (9), (16)₁ e (28), notoriamente si ha⁽²⁹⁾ :

$$(31) \quad cu^\alpha [T_{(\alpha\beta)} + E'_{[\alpha\beta]})^{|\beta} = -k \frac{Dw}{Dt} - X^{(\alpha\beta)} \Delta_{\alpha\beta} + \bar{H}^{(e)} - cq^\beta{}_{|\bar{\beta}} - 2c^{-1} q^\beta a_\beta$$

⁽²⁷⁾ Ciò vale anche nel caso di coppie di contatto non nulle.

⁽²⁸⁾ Per es, dalla (98) in [5] — ove vale (30)₃ — risulta che, stante (3), si ha precisamente $T_{(rs)}{}^{|s} = (\mu \tilde{g}_{rs} + c^{-2} X_{(rs)}) a^s + X_{(rs)}{}^{|s} + \tilde{\mathcal{E}}_r + Q_{r\beta}{}^{|\beta}$ [cfr. (15)₅, (16)₂].

⁽²⁹⁾ Cfr. la (108) nel lavoro [5] ove si presuppone (30)₃. Riguardo agli ultimi due ter-

cosicchè, essendo l'ultimo termine dell'ordine di c^{-2} , a meno di tali termini la parte temporale di $(30)_1$ (per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$) equivale all'equazione classica $(6)_3$ del bilancio energetico in assenza di coppie di contatto.

In terzo luogo, nel caso e nel riferimento x^α considerati, stanti (3), (11) e (28), per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ l'equazione $(30)_2$ — precisamente la equivalente sua parte spaziale — si identifica con la 2ª equazione di Cauchy $(6)_2$ [cfr. (15)₃].

N. 9. — Sulle equazioni gravitazionali e le varie determinazioni di $E_{\alpha\beta}$ avanti considerate, in assenza di coppie di contatto.

Detta h la costante di Cavendish e $A_{\alpha\beta}$ il tensore gravitazionale (simmetrico e a divergenza nulla), in Relatività generale le $(30)_{1,2}$ si deducono dalle equazioni gravitazionali

$$(32) \quad A_{\alpha\beta} + \frac{8\pi h}{c^4} \mathcal{U}_{\alpha\beta} = 0 \quad (A_{\alpha\beta} \equiv A_{\beta\alpha}, A_{\alpha\beta}{}^{|\beta} \equiv 0).$$

Poichè, per $(14)_{1,2}$ e (29), fra i tensori figuranti nell'espressione (28) di $T_{\alpha\beta}$ solo $Q_{\alpha\beta}$ ed $E_{\alpha\beta}$ hanno una parte mista non nulla e $Q_{\alpha\beta}$ è simmetrico, dalle (32) per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ segue pure $(30)_3$. Quest'ultima relazione deve essere un'identità (conseguente alla definizione di $E_{\alpha\beta}$) perchè altrimenti implicherebbe restrizioni per i fenomeni fisicamente possibili.

La detta condizione $(30)_3$ è soddisfatta quando si identifichi $E_{\alpha\beta}$ per esempio con uno dei tensori ${}^2E_{\alpha\beta}, \dots, {}^4E_{\alpha\beta}$ [N. 5].

Siccome per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ dalla (32) — oppure dalle $(30)_{2,3}$ — segue

$$(33) \quad T_{\alpha\beta} = \mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)},$$

inoltre la (32) può ritenersi come definizione delle $X_{[\alpha\beta]}$, e infine, in base alla teoria classica, la conoscenza di tali quantità può non ritenersi essenziale per la conoscenza dei fenomeni dinamici, talvolta ci si limita a postulare la (32) avendo posto direttamente la $(33)_2$ — oltre a (28) e (29) — ed identificato $E_{\alpha\beta}$ con uno dei tensori ${}^1E_{\alpha\beta}, \dots, {}^4E_{\alpha\beta}$ ⁽³⁰⁾.

Si può osservare che, anzi, spesso si accetta sostanzialmente la $(33)_2$ ponendo (28), (29) e $(33)_1$ dopo aver ammesso la simmetria degli sforzi mec-

mini nella (31), ossia quelli nel vettore cq^α di corrente termica, si può osservare che, in base a (29)₂, vale l'analogo per q^α delle formule (23) e (24) (in λ^α) dedotte da (21)₃. L'analogo di (24) per q^α fornisce per $cu^\alpha Q_{\alpha\beta}{}^{|\beta}$ l'espressione $-cq^\beta{}_{|\beta} - 2cq^\beta A_\beta$ che per (10)-stante (13)-eguaglia a meno di termini dell'ordine di c^{-2} il calore classico $q = -h^r{}_{|r}$ assorbito a causa di conduzione termica per unità di tempo e di volume (proprio).

⁽³⁰⁾ Per (17) è ${}^1E_{(\alpha\beta)} = {}^2E_{(\alpha\beta)}$, inoltre è certo ${}^4E_{[\alpha\beta]} = 0$ [N. 5].

canici e identificato $E_{\alpha\beta}$ con uno dei tensori ${}^1E_{(\alpha\beta)}, \dots, {}^4E_{(\alpha\beta)}$ — cfr. N. 5 e nota (22).

Si sa — cfr. [17] — che le equazioni scritte da Minkowski e Abraham usando i rispettivi tensori ${}^1E_{\alpha\beta}$ e ${}^2E_{\alpha\beta}$ possono ritenersi equivalenti⁽³¹⁾. Siccome inoltre la posizione $E_{\alpha\beta} = {}^2E_{\alpha\beta}$ è compatibile con la presente teoria, e in particolare con (28) e (29), si può dire che pure l'uso che Minkowski fa di ${}^1E_{\alpha\beta}$ è sostanzialmente in armonia con la presente teoria in assenza di coppie di contatto, anche se, almeno nell'ambito della Relatività generale, in questa non può assolutamente porsi $E_{\alpha\beta} = {}^1E_{\alpha\beta}$ ⁽³²⁾.

Si può concludere, mi sembra, che l'estensione al caso di coppie di contatto, fatta appunto sulla base della teoria in discorso, è sostanzialmente compatibile con ogni espressione notoriamente attribuita ad $E_{\alpha\beta}$.⁽³³⁾

N. 10. — Qualche difficoltà nel problema di estendere le equazioni fondamentali della Relatività ristretta e della Relatività generale al caso di presenza di coppie di contatto.

Considero ora il caso che vi siano coppie di contatto ($m^{\alpha\beta\gamma} \neq 0$). Poichè i momenti di contatto m^{rsi} non figurano nella 1^a equazione di Cauchy (6)₁, per cose dette al N. 8 tale equazione approssima la parte spaziale della (30)₁ anche nel presente caso — cfr. nota (27) —.

Si noti che mentre nel caso $m^{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$ il tensore $T_{\alpha\beta}$ (o $\tilde{T}_{\alpha\beta}$) risulta simmetrico [cfr. (30)_{2,3}], nel caso presente, in base all'alternativa (18) e alle (2),

⁽³¹⁾ Detto $D_{\alpha\beta}$ il tensore dielettrico, ossia quello che rispecchia le proprietà della materia, è $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta}$. Per $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ da (28) segue $D_{[\alpha\beta]} = 0$ [cfr. (11')] onde (32) implica (30)₃ come si è già detto.

Minkowski non specifica $D_{\alpha\beta}$ — come invece si fa nella presente teoria — Da tal punto di vista, quando ci si limiti al caso adiabatico, sostanzialmente si ammette, più precisamente, che il campo elettromagnetico suscita nella materia (secondo un meccanismo peraltro imprecisato) un flusso di energia caratterizzato dal tensore ${}^2E'_{\alpha\beta} - {}^4E'_{\alpha\beta}$ [cfr. (17)] o da $-{}^4E'_{[\alpha\beta]}$ a seconda che le equazioni di conservazione secondo Minkowski si vogliono considerare equivalenti a quelle secondo Abraham nelle versioni corrispondenti a [22] p. 205 o a [12] p. 425.

⁽³²⁾ La posizione $E_{\alpha\beta} = {}^4E_{\alpha\beta}$ è impossibile nella presente teoria perchè in questa la (30)₃ porterebbe restrizioni ai fenomeni fisicamente possibili a causa della simmetria del tensore termodinamico $Q_{\alpha\beta}$ [cfr. (29)].

⁽³³⁾ Mentre per $r = 2, 3, 4$ gli usi di ${}^rE_{\alpha\beta}$ e di ${}^rE_{(\alpha\beta)}$ portano a due versioni equivalenti delle equazioni (30)₁, previo opportuno aggiustamento di controparti meccaniche — cfr. (17) e la nota (26) —, invece, stanti (28), (29), (33)₂ e la posizione $E_{\alpha\beta} = {}^rE_{\alpha\beta}$, il contenuto delle (30)₁ dipende effettivamente dall'indice r tramite la parte mista del tensore ${}^rE_{\alpha\beta}$ ($r = 2, 3, 4$); però tale dipendenza è piccola — cfr. nota (26) —.

(11), (22), (28) e (29), tale tensore soddisfa una delle

$$(34) \quad \tilde{T}_{[\alpha\beta]} + 2u_{[\alpha} \lambda_{\beta]} = m_{\alpha\beta}{}^{\gamma}{}_{|\gamma}, \quad \tilde{T}_{[\alpha\beta]} + 2u_{[\alpha} \lambda_{\beta]} = m_{\alpha\beta}{}^{\gamma}{}_{|\tilde{\gamma}}.$$

Convieni osservare che per (19)₁ queste equivalgono alla validità per $a = 0$ e rispettivamente $a = 1$, di

$$(34') \quad \tilde{T}_{[\alpha\beta]} + 2u_{[\alpha} \lambda_{\beta]} = m_{\alpha\beta}{}^{\gamma}{}_{|\gamma} - am_{\alpha\beta}{}^{\gamma} A_{\gamma}.$$

Non si può quindi postulare la (32)₁ per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ in quanto per (32)₂ ne seguirebbe $T_{[\alpha\beta]} = 0$ in contrasto con (34'), ossia con (6)₂. Non si può nemmeno postularla per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)}$ [nella quale forma essa seguirebbe pure da quella testè esclusa] in quanto, in base a cose dette al N. 8, nel riferimento (3) la conseguente (30)₁ coinciderebbe, a meno di termini in c^{-1} , con l'equazione ottenuta dalla (6'), riferita allo spazio $\mathcal{S}_{(g)}$, mediante annullamento dei termini nei momenti di contatto.

Le differenze fra le equazioni relativistiche ottenute nei modi sopra considerati e le corrispondenti classiche non potrebbero affatto ritenersi piccole e quindi esse costituiscono difficoltà inerenti al problema di cui nel titolo e riguardanti precisamente (solo) la Relatività generale.

Posponendo al N. 16 il superamento delle difficoltà suddette, ne rilevo ora un'altra connessa col bilancio energetico [cfr. (6)₃] e riguardante anche la Relatività ristretta.

Per discutere l'ipotesi $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ riguardo al bilancio energetico ($cu_{\alpha} \mathcal{U}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0$) conviene osservare che per (28) [e (11')] la (34') implica

$$(35) \quad u_{\beta} T^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = u_{\alpha} (T^{(\alpha\beta)} + E''^{[\alpha\beta]} - 2u^{[\alpha} \lambda^{\beta]} + m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma})_{|\beta} - au_{\alpha} (m^{\alpha\beta\gamma} A_{\gamma})_{|\beta}.$$

Poichè il tensore $m^{\alpha\beta\gamma}$ è spaziale [cfr. (14)], in Relatività ristretta o generale si ha

$$(36) \quad u_{\alpha} m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma\beta} = u_{\alpha} m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma}{}_{|\beta} - u_{\alpha|\beta} m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma} = \\ = - (u_{\alpha|\gamma} m^{\alpha\beta\gamma})_{|\beta} - (u_{\alpha|\beta} m^{\alpha\beta\gamma})_{|\gamma} + u_{\alpha|\beta\gamma} m^{\alpha\beta\gamma}.$$

Per (14)₃ ne segue

$$(37) \quad u_{\alpha} m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma\beta} = u_{\alpha|\beta\gamma} m^{\alpha\beta\gamma} + v^{\beta}{}_{|\beta}$$

ove si sia posto

$$(38) \quad v^{\beta} = -2u_{\alpha|\gamma} m^{\alpha(\beta\gamma)} \text{ onde per (14)}_{3,4} \text{ è } v^{\beta} u_{\beta} = 0.$$

Incidentalmente osservo che per (2), (9) e (14)_{3,4,5} la (38)₁ diviene

$$(39) \quad v^{\alpha} = 2u_{\beta|\tilde{\gamma}} m^{(\alpha\beta\gamma)} = \Delta_{\beta\gamma} m^{\alpha(\beta\gamma)} + \Omega_{\beta\gamma} (m^{\alpha[\beta\gamma]} + m^{\gamma\beta\alpha}).$$

Trasformando l'ultimo termine di (35) sulla base di (14)_{3,4}, da (35) e (37) segue

$$(40) \quad u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = u_\alpha (T^{(\alpha\beta)} + E'''^{[\alpha\beta]} + \lambda^\alpha u^\beta)_{|\beta} + \lambda^\beta{}_{|\beta} + \\ + (u_{\alpha|\beta\gamma} + au_{\alpha|\beta} A_\gamma) m^{\alpha\beta\gamma} + \nu^\beta{}_{|\beta}.$$

Allora, per (25) e (31), nell'equazione $cu_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0$ figurano gli analoghi di tutti i termini presenti nella corrispondente equazione classica (6)₃; però in essa figurano pure termini ulteriori. Anche supponendo (30)₃, in base a (10), (21)₁, (24) e (28) questi sono in parte dell'ordine di c^{-2} , ma i rimanenti, ossia $c\lambda^\beta{}_{|\beta}$ e $c\nu^\beta{}_{|\beta}$, sono dell'ordine della potenza $\Pi_1^{(m)}$ delle coppie di contatto [cfr. (25)].

È dunque evidente che, accettata o no l'ipotesi (30)₃, nemmeno in Relatività ristretta si può ammettere che (30)₁ valga per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$.

N. 11. — Alcune determinazioni del tensore energetico totale ammissibili in Relatività ristretta anche nel caso di momenti di contatto nonnulli.

Le considerazioni sulle due equazioni di Cauchy e su quella dell'energia in presenza di coppie di contatto svolte ai NN. 6, 10 inducono chi voglia estendere al caso $m^{\alpha\beta\gamma} \neq 0$ le equazioni fondamentali della Relatività ristretta a postulare una delle (18) — ossia la (34') per $a = 0$ oppure $a = 1$ — e la (30)₁, avendo identificato $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ [cfr. (28)] con un opportuno tensore poco differente da $T_{\alpha\beta}$ [cfr. (28)].

Più precisamente, sulla base delle formule preliminari stabilite nei numeri precedenti — in particolare delle (23), (24), (35) e (40) — è abbastanza spontaneo considerare, stanti (21), (28) e (38), le seguenti possibili determinazioni di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$:

$$(41) \quad u_{\alpha\beta}{}^{mn} = T_{\alpha\beta} + u_\alpha (\lambda_\beta + \nu_\beta) + (m\lambda_\alpha + n\nu_\alpha) u_\beta \quad (m, n = 0, 1).$$

Per (28) e (29) l'equazione dei momenti (34') implica l'equivalenza di (41) alla

$$(41') \quad u_{\alpha\beta}{}^{mn} = u_{\alpha\beta}{}^{mna} = T_{(\alpha\beta)} + m_{\alpha\beta\gamma}{}^{|\gamma} + E'''_{[\alpha\beta]} - am_{\alpha\beta}{}^\gamma A_\gamma + \lambda_\alpha u_\beta + \\ + u_\alpha \nu_\beta + (m\lambda_\alpha + n\nu_\alpha) u_\beta.$$

Mostro ora che le determinazioni (41') di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ sono effettivamente ammissibili, rimandando per una corrispondente esplicitazione delle (30)₁ al N. 18 dove questa si ottiene annullando il tensore di Riemann in un'analoga esplicitazione valida in Relatività generale.

Confrontando (21) e (38) si riconosce che per ν^α valgono gli analoghi delle formule (23) e (24) stabilite per λ_α sulla sola base di (21)₁, e le stesse proprietà riguardanti l'ordine di grandezza.

Dalle (23) risulta che le parti spaziali di $(u_\alpha \lambda^\beta)_{|\beta}$ e $(\lambda_\alpha u^\beta)_{|\beta}$ sono dell'ordine di c^{-2} [v. (21), (38)] cosicchè, per cose suddette e per (41), di tale ordine risulta pure il divario $\tilde{g}_\alpha^{\epsilon mna} (u_{\epsilon\beta} - T_{\epsilon\beta})^{|\beta}$. Dunque la parte spaziale di (30)₁ per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ equivale con ottima approssimazione alla stessa (30)₁ per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$. In quest'ultima forma, stante (3), essa coincide — a meno di termini in c^{-2} — con la 1^a equazione classica di Cauchy (6)₁, come si può assodare ripetendo ragionamenti fatti al N. 8 nel caso $m^{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$ per mostrare appunto tale coincidenza — cfr. nota (27) —.

D'altro canto, per (41), (40) e (24) si ha

$$(42) \quad u^\alpha u_{\alpha\beta}^{mna|\beta} = u^\alpha (T_{(\alpha\beta)} + E_{[\alpha\beta]}^{\prime\prime})^{|\beta} - (m+1) \lambda^\alpha A_\alpha - n\nu^\alpha A_\alpha + \\ + (u_{\alpha|\beta\gamma} + au_{\alpha|\beta} A_\gamma) m^{\alpha\beta\gamma}$$

da cui, per (31) e (27)₁ segue

$$(42') \quad cu^\alpha u_{\alpha\beta}^{mna|\beta} = -k \frac{Dw}{Dt} - (\Pi_2^{(m)} + X^{(\alpha\beta)} \Delta_{\alpha\beta}) + \\ + \bar{\Pi}^{(e)} - cq^\beta_{|\beta} - c [2q^\gamma + (m+1) \lambda^\gamma + n\nu^\gamma - au_{\alpha|\beta} m^{\alpha\beta\gamma}] A_\gamma.$$

Per cose dette riguardo alle (27) e (31) il quart'ultimo termine in (42') è la potenza specifica $\Pi_2^{(i)}$ (per unità di volume proprio) della sollecitazione di contatto. Inoltre l'ultimo termine è dell'ordine di c^{-2} . Ne segue che, a meno di tali termini, la parte temporale della (30)₁ scritta, stante (3), per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}^{mna}$ equivale all'equazione classica del bilancio energetico.

Dunque, fatto $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}^{mna}$, le equazioni (30)₁ sono accettabili in Relatività ristretta come equazioni di conservazione per valori reali qualunque di m, n ed a purchè $\ll c$. (Le (30)₁ sono accettabili nel senso seguente: In primo luogo esse forniscono una teoria relativistica \mathcal{C} in accordo con i risultati sperimentali attuali; in secondo luogo, nel caso che tali risultati scarseggino ma sull'argomento vi sia una ben determinata e ragionevole teoria classica — come a mio avviso accade riguardo alle coppie di contatto, — quest'ultima teoria è in accordo con la \mathcal{C}).

Inoltre le (30)₁ sono accettabili in Relatività ristretta in corrispondenza ad una qualunque delle due versioni (34) o (34') della 2^a equazione di Cauchy.

Assumere un tensore energetico del tipo (41) mi sembra spontaneo e conforme ad un criterio di semplicità e regolarità in quanto i termini $u_\alpha \lambda_\beta$

e $u_\alpha v_\beta$ aggiunti a $T_{\alpha\beta}$ nella (41') sono necessari per superare le difficoltà connesse col I^o principio della termodinamica e rilevate al N. 10. Allora, stanti le dimostrate proprietà di $u_{\alpha\beta}^{mna}$ — valide comunque si determini (34') — per amor di semplicità e regolarità mi sembra spontaneo pure che, in corrispondenza di ciascuno dei vettori λ^α e ν^α , o non si faccia alcuna ulteriore aggiunta, oppure se ne faccia una in modo che l'aggiunta complessiva ad esso corrispondente sia o simmetrica, o emisimmetrica. Nel Cap. II si mostrerà, tra l'altro, che aggiunte del tipo suddetto sono necessarie per soddisfare altri opportuni requisiti. Anzi, tali requisiti determinano le aggiunte del tipo suaccennato anche ponendosi da un punto di vista più generale; precisamente determinano i parametri m, n ed a in $u_{\alpha\beta}^{mna}$, considerati come variabili su tutto l'asse reale.

CAP. II

ESTENSIONI DI TEOREMI NOTI CONCERNENTI SISTEMI CHIUSI IN RELATIVITÀ RISTRETTA, AL CASO DI PRESENZA DI COPPIE DI CONTATTO. DETERMINAZIONE DI $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$.

N. 12. — Una caratterizzazione della validità come integrale primo del principio di conservazione delle quantità di moto per sistemi chiusi e capaci di coppie di contatto.

Le x^α siano coordinate solidali allo spazio inerziale $\mathcal{S}_{(i)}$ e ovunque naturali [cfr. (3)]. Allora, dalle equazioni di conservazione (30)₁ segue — cfr. [22] p. 169 — .

$$(43) \quad \frac{d}{dx^0} (x^\alpha \mathcal{U}^{\beta 0} - x^\beta \mathcal{U}^{\alpha 0}) + (x^\alpha \mathcal{U}^{\beta r} - x^\beta \mathcal{U}^{\alpha r})_{,r} = \mathcal{U}^{\beta\alpha} - \mathcal{U}^{\alpha\beta}.$$

Per effettuare la caratterizzazione di cui nel titolo, sulla base di (41') conviene attribuire ad $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ la forma

$$(44) \quad \mathcal{U}_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta\gamma}{}^{|\gamma}$$

è considerare il generico sistema chiuso Σ_c . Suppongo dunque che una regione V solidale ad $\mathcal{S}_{(i)}$ contenga all'interno Σ_c ; per semplicità V contenga

tutta la materia e tutta la radiazione elettromagnetica, almeno durante un certo intervallo di tempo τ . Ne segue che $\Theta_{\alpha\beta}$ e $m_{\alpha\beta\gamma}$ vanno supposti nulli fuori di V e sul contorno σ di V . Allora, integrando la (43) su V membro a membro, applicando il Lemma di Green in corrispondenza al secondo termine e tenendo conto di (44), nell'ipotesi che $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ sia regolare in V si ottiene⁽³⁴⁾

$$(45) \quad \frac{d}{dx^0} \int_V (x^0 \mathcal{U}^{\beta 0} - x^\beta \mathcal{U}^{\alpha\beta}) dV = -2 \int_V (\Theta^{[\alpha\beta]} + m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma}) dV.$$

Poichè $m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma} = m^{\alpha\beta r}{}_{|r} + m^{\alpha\beta 0}{}_{|0}$ applicando il lemma di Green in corrispondenza al termine in $m^{\alpha\beta r}{}_{|r}$ implicitamente figurante nella (45), da questa si ottiene, nell'ipotesi che anche $m^{\alpha\beta\gamma}$ sia regolare in V ,

$$(46) \quad \frac{d}{dx^0} \int_V (x^\alpha \mathcal{U}^{\beta 0} - x^\beta \mathcal{U}^{\alpha 0} + 2m^{\alpha\beta 0}) dV = -2 \int_V \Theta^{[\alpha\beta]} dV.$$

Dunque la condizione di simmetria

$$(47) \quad \theta_{[\alpha\beta]} = 0, \quad \text{onde} \quad \tilde{\theta}_{[\alpha\beta]} = 0 \quad \text{e} \quad \theta'''_{[\alpha\beta]} = 0 \quad (\theta_{\alpha\beta} = \mathcal{U}_{\alpha\beta} - m_{\alpha\beta\gamma}{}^{|\gamma}),$$

è essenziale ed anche sufficiente per poter dedurre gli integrali primi

$$(48) \quad c \mathcal{M}^{\alpha\beta} \equiv \int_V (x^\alpha \mathcal{U}^{\beta 0} - x^\beta \mathcal{U}^{\alpha 0} + 2m^{\alpha\beta 0}) dV = \text{cost} \quad (\mathcal{M}^{\alpha\beta} = -\mathcal{M}^{\beta\alpha})$$

da (46) (sotto le suaccennate ipotesi di regolarità su $\mathcal{U}^{\alpha\beta}$ e $m^{\alpha\beta\gamma}$); essa è essenziale anche se ci si limita alla validità di (48) per $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Considero ora il caso $m_{\alpha\beta\gamma} = 0$. In esso, per (44) è $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta}$; inoltre (48) assume l'aspetto di un integrale dei momenti⁽³⁵⁾. Si aggiunga che per

⁽³⁴⁾ Tale ipotesi di regolarità è essenziale anche nel caso di assenza di coppie di contatto — cfr. [22] p. 169 —.

⁽³⁵⁾ Nel caso $\mathcal{U}_{\alpha\beta} \equiv T_{\alpha\beta}$ [cfr. (28), (29)], almeno per la materia disgregata ($Q_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} = 0$) $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ [cfr. (48)₁] è ovviamente il momento risultante (rispetto all'origine delle coordinate spaziali) delle quantità di moto meccaniche ed elettromagnetiche. Essendo queste ultime espresse in termini di massa, il loro contributo è molto piccolo.

Per la materia non disgregata vi è anche il contributo del vettore Q^{r0} il quale contributo, almeno riguardo alla sua parte preponderante $q^\alpha u^0$ [cfr. (28)] di Q^{r0} , è dell'ordine di c^{-2} ed evidentemente rispecchia la quantità di moto dell'energia nel flusso termico.

Infine pure il contributo dato ad $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ [cfr. (48)] da $X^{\alpha\beta}$ nel caso in considerazione è

$m^{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$ il suddetto carattere essenziale della condizione (47) è ben noto ed in base ad esso in Relatività ristretta vari autori assumono il tensore energetico totale $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ simmetrico — cfr. [22] p. 164 —.

Riguardo all'impostazione della Relatività ristretta nel caso $m^{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$, in primo luogo — in connessione con le equazioni classiche (6)_{1,2} e (6'') — si può porre $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ [cfr. (28), (29)] e postulare le (30)_{1,2} (come leggi fisiche); allora la (47)₂ si riduce all'equazione dei momenti (30)₂ e la (47)₃ alla (30)₃. Dunque la (47)₃, se vale, deve valere come identità, precisamente in base alla definizione di $E_{\alpha\beta}$ (per non restringere la classe dei fenomeni fisicamente possibili).

In secondo luogo, l'impostazione in discorso può farsi — in connessione con le equazioni classiche (6)₃ e (6') — ponendo $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)}$ e postulando solo la (30)₁; allora, ovviamente, le (47) valgono tutte come identità matematiche.

Passando al caso generale $m^{\alpha\beta\gamma} \neq 0$ si può osservare che anche in questo, posto $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ ^{ma} [cfr. (41')], la relazione (48) è un analogo per la Relatività ristretta del teorema di conservazione del momento della quantità di moto di Σ_c . Infatti i contributi dati ad $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ da $m^{\alpha\beta\gamma}$ per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ ^{ma} [cfr. (41'), (48)] si esplicano solo attraverso il termine $m^{\alpha\beta 0}$ e i termini λ_α e ν_α [cfr. (21), (38), (41')]. Inoltre, da un lato il primo contributo è piccolissimo perchè, oltre ad essere dell'ordine di c^{-2} , esso, a differenza di tutti gli altri contributi, non dipende dal fattore x^r che, stante la definizione della regione V , assume valori grandissimi in larga parte di questa; dall'altro lato i suddetti contributi dovuti a λ_α e ν_α sono addirittura dell'ordine di c^{-3} .

Si può osservare che, oltre la (48), anche qualche opportuna specificazione della (46) con $\theta^{[\alpha\beta]}$ piccolissimo costituisce un analogo relativistico del teorema classico di conservazione del momento delle quantità di moto di Σ_c . Però solo nell'equazione relativistica (48) viene conservato il carattere di integrale primo, proprio del detto teorema classico. Il considerato carattere di (48) mi sembra interessante anche prescindendo dalla suaccennata analogia col caso classico.

La condizione che $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ permetta di dedurre (48) risulterà inoltre utile come criterio di discriminazione (totale) fra le precedenti ammissibili teorie

molto piccolo. Poichè per (3)_{1,2} e (14)₁ è $X^{s0} = -X^{sl} u_l / u_0 = X^s_l dx^l / dx^0$ il detto contributo è precisamente

$$c^{-1} \int_V x^{[r} X^{s]} dV = c^{-2} \int_V x^{[r} X^{s]} v^l dV.$$

relativistiche ottenute per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ [cfr. (41')]. Un tale criterio, a mio avviso è importante in quanto, posto $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$, le costanti m , n ed a non mi sembrano determinabili solo mediante criteri di semplicità o di regolarità. ⁽³⁶⁾

N. 13. Unicità del tensore energetico totale che abbia la forma precedente e verifichi il considerato integrale primo dei momenti.

Si identifichi il tensore energetico totale $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ con $u_{\alpha\beta}$ e si imponga la validità di (47), essenziale e sufficiente per la deducibilità dell'integrale primo (48). Allora, stante (44), da (41') si deduce

$$(49) \quad \theta_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)} + E'_{[\alpha\beta]} - am_{\alpha\beta\gamma} A^\gamma + [(m+1)\lambda_\alpha + n\nu_\alpha] u_\beta \quad (\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}).$$

Per la considerata deducibilità di (48) è essenziale precisamente che la (47)₁ valga ovunque e in ogni possibile processo. Inoltre le costanti m , n ed a figuranti in (49) hanno carattere universale e tale carattere ha pure $E'_{[\alpha\beta]}$ come funzione dei campi e delle induzioni elettriche e magnetiche. Infine $E'_{[\alpha\beta]}$ non dipende da $m_{\alpha\beta\gamma}$ a differenza delle λ_α e ν_α le quali, d'altro canto, in base alle (21) e (38) si annullano per $m_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$. Allora per (49) la (47)₁ intesa come sopra, implica

$$(50) \quad E'_{[\alpha\beta]} \equiv 0, \quad a = 0, \quad -m = n = 1.$$

Dunque vale la (30)₃ e per (41) e ((41')⁻¹¹⁰) risulta $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ con

$$(51) \quad u_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + 2u_{[\alpha} \lambda_{\beta]} + 2u_{(\alpha} \nu_{\beta)} = T_{(\alpha\beta)} + m_{\alpha\beta\gamma}{}^{|\gamma} + 2u_{(\alpha} \nu_{\beta)}.$$

Concludendo, esistono una determinazione di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ e una determinazione della 2ª equazione di Cauchy (34') compatibili con l'integrale primo dei momenti (48); inoltre tale doppia determinazione è unica fra quelle precedentemente considerate e sintetizzate nella (41').

Nota che la considerata doppia affermazione di unicità può ritenersi conseguita mediante criteri di semplicità e regolarità — da cui la posi-

⁽³⁶⁾ Ovviamente allo stato attuale delle tecniche sperimentali non si può basare una tale discriminazione sull'esperienza.

zione $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}^{mna}$ — e mediante criteri di permanenza di teoremi classici — da cui (48) e (47) —.⁽³⁷⁾

Si osservi ora che nel caso $m^{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$, può porsi $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)}$ — in connessione con le equazioni classiche (6)₃ e (6') —. Quindi nel caso generale è spontaneo chiamare $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)}$ *tensore energetico delle coppie di contatto*. Nella presente teoria di Relatività ristretta, in cui $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$, tale tensore è il tensore non simmetrico $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta\gamma}{}^{|\gamma} + 2u_{(\alpha} \nu_{\beta)}$.

Riguardo all'impostazione della Relatività ristretta esplicito anche nel caso generale le due alternative già considerate nel caso $m^{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$ e connesse l'una con le equazioni classiche (6)_{1, 2} e (6''), l'altra con le (6)₃ e (6'). In tali alternative si identifica $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$, per definizione, col secondo o rispettivamente col terzo membro delle (51). In entrambe, stanti (28) e (29), la (30)₁ viene postulata (come legge fisica). Nella prima impostazione (ma non nella seconda) viene postulata pure un'equazione (puntuale) dei momenti, precisamente la (34)₁ — che coincide con la (47)₂ in base a (44) e alla definizione di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ —; inoltre, la (30)₃ [cfr. (50)₁] — che coincide con la (47)₃ in base alle (22), (28), (29) e (44) e alla definizione di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ — si intende resa valida mediante opportuna definizione di $E_{\alpha\beta}$.

Dunque, nella prima impostazione le condizioni (47)₁ — essenziali per la considerata deduzione dell'integrale primo dei momenti (48) — valgono in parte [(47)₂] come leggi fisiche e in parte [(47)₃] come identità matematiche.

Nella seconda impostazione, invece, le (47)₁ valgono tutte come identità matematiche, in base alla definizione di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ e a (44).

Quanto sopra rispecchia il maggior contenuto fisico della prima impostazione (solo in essa figura la parte emisimmetrica degli sforzi) e la maggior semplicità della seconda, la quale sembra più limitata all'essenziale.

N. 14. Sul baricentro, sul risultante e sul momento risultante delle quantità di moto per sistemi chiusi e capaci di coppie di contatto.

Sulla base delle precedenti considerazioni intendo $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ [cfr. (51)] e mostro brevemente qualche aspetto soddisfacente di tale assunzione; cioè che valgono le estensioni al caso $m^{\alpha\beta\gamma} \neq 0$ dei teoremi concernenti le grandezze di cui nel titolo, ben noti in Relatività ristretta nel caso $m^{\alpha\beta\gamma} = 0$.

⁽³⁷⁾ Il tener conto della regolarità oltre che della semplicità, è stato essenziale in quanto se semplicisticamente si fosse posto nella (41) $m = n = 0$, non si sarebbe potuto render valido l'integrale primo (48) dei momenti.

Tale estensione, pur essendo facile specialmente riguardo ai teoremi sul baricentro, ha interesse, mi sembra, almeno in quanto, in connessione con la presenza delle $m^{\alpha\beta 0}$ nell'integrale primo (48), essa permette di arrivare a qualche risultato qualitativamente nuovo.

Posto, in relazione a una qualunque determinazione di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ connessa col sistema chiuso Σ_c ,

$$(52) \quad G^\alpha = \int_V \mathcal{U}^{\alpha 0} dV, \quad G^0 x_c^r = \int_V x^r \mathcal{U}^{00} dV,$$

secondo ragionamenti ben noti — cfr. [22] §§ 63, 64 ove si fa l'ipotesi $\mathcal{U}^{\alpha\beta} = \mathcal{U}^{\beta\alpha}$ non essenziale riguardo alle considerazioni che seguono e basati sulle equazioni di conservazione (30)₁ nonché su opportune ipotesi di regolarità, le G^α risultano costanti; ⁽³⁸⁾ inoltre le G^r rappresentano la quantità di moto totale e $c^{-1} G^0$ la massa totale rispetto allo spazio inerziale $\mathcal{S}_{(i)}$; la x_c^r risultano funzioni lineari di x^0 e si interpretano come coordinate del baricentro C della materia in $\mathcal{S}_{(i)}$. Precisamente sussiste il teorema del moto del baricentro $G^r = G^0 dx_c^r/dx^0$.

Con tali ragionamenti risulta pure che le quantità G^α si comportano come le componenti di un 4-vettore nel passaggio dal riferimento x^α ad un qualunque altro riferimento inerziale x'^α eventualmente non solidale ad $\mathcal{S}_{(i)}$. Ne segue che anche nel caso $m^{\alpha\beta\gamma} \neq 0$ lo spazio inerziale di riposo \mathcal{S}_0 può determinarsi mediante le condizioni $G^r = 0$; inoltre si può definire la massa totale propria (generalizzata) M_0 del sistema chiuso in considerazione, mediante la equazione $G_\alpha G^\alpha = -c^2 M_0^2$. Tale massa è dunque costante e, per $\mathcal{S}_{(i)} = \mathcal{S}_0$ eguaglia $c^{-1} G^0$.

Quanto al momento risultante delle quantità di moto di un sistema chiuso, stanti (44) e (51) e posto $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$, da (43) si trae

$$(53) \quad \mathcal{V}^{[\alpha\beta]\gamma}{}_{|\gamma} = 0 \quad \text{ove} \quad \mathcal{V}^{\alpha\beta\gamma} = x^\alpha \mathcal{U}^{\beta\gamma} + m^{\alpha\beta\gamma}.$$

Si fissino comunque due vettori costanti k_α e k_β . Allora il vettore $b^\gamma = h_\alpha k_\beta \mathcal{V}^{[\alpha\beta]\gamma}$ ha divergenza nulla.

Sia ora V' una regione tridimensionale solidale ad un qualsiasi spazio inerziale $\mathcal{S}_{(i)}$ e contenente Σ_c all'interno (almeno ad un certo istante). Inoltre

⁽³⁸⁾ Essendo $\mathcal{U}^{\alpha\beta} = 0$ sul contorno σ di V [N. II], per (30)₁ è

$$\frac{d}{dx^0} \int_V \mathcal{U}^{\alpha 0} dV = - \int_V U^{\alpha r}{}_{|r} dV = - \int_\sigma \mathcal{U}^{\alpha r} n_r d\sigma = 0.$$

$\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ e $m_{\alpha\beta}$ siano opportunamente regolari in modo che tale risulti b^ν . Allora, convenendo di denotare con un accento le componenti di tensori nel riferimento naturale x'^α solidale a $\mathcal{S}'_{(i)}$, in base ad un noto ragionamento — cfr. [22] § 63 — risulta

$$(54) \quad \int_{\bar{V}} b_0 dV = \int_{\bar{V}'} b'_0 dV' \quad \text{cioè, per (48)}_1 \text{ e (53)}_2, \quad h_\alpha k_\beta \mathcal{M}^{\alpha\beta} = h'_\alpha k'_\beta \mathcal{M}'^{\alpha\beta}.$$

Per l'assodata invarianza di $h_\alpha k_\beta \mathcal{M}^{\alpha\beta}$ comunque si fissino vettori h_α e k_β , $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ è un tensore doppio nel cronotopo.

N. 15. — Una relazione globale in Relatività ristretta involgente il solo tensore $m_{\alpha\beta\gamma}$.

Facendo $\alpha = r$ e $\beta = 0$ nella (48) e tenendo conto delle (52) si ottiene

$$(55) \quad G^0 x^r_c - x^0 G^r + \int_{\bar{V}} 2m^{r00} dV = \text{cost.}$$

Per (14)_{3, 4, 5} è $u_0 u_0 m^{r00} = m^{rst} u_s u_t$; inoltre, come si è ricordato, è $G^0 dx^r_c/dx^0 = G^r = \text{cost.}$ e $G^0 = \text{cost.}$ Allora, derivando (55) membro a membro rispetto a x^0 , si riconosce che

$$(56) \quad \int_{\bar{V}} m^{r00} dV \equiv c^{-2} \int_{\bar{V}} m^r_{st} \dot{x}^s \dot{x}^t dV = \text{cost.},$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\bar{V}} m^r_{st} \dot{x}^s \dot{x}^t dV = 0 \quad \left(\dot{x}^\alpha = c \frac{dx^\alpha}{ds} \right).$$

Noto che questo integrale primo è stato dedotto dalle equazioni di conservazione (30)₁ sotto opportune ipotesi di regolarità su $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ e anche su $m_{\alpha\beta\gamma}$, che esso diviene banale in assenza di coppie di contatto e che, specialmente nella forma (56)₂, non sembra prevedibile sulla base della teoria classica.

Riguardo a (56) mi propongo ora qualche confronto di carattere intuitivo tra la presente teoria relativistica (con $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$) e la corrispondente teoria classica. A tale scopo, per semplicità, suppongo $E_{\alpha\beta} \equiv q_\alpha \equiv 0$. Inoltre considero una soluzione delle equazioni di conservazione (30)₁ — stanti (28) e (29) — costituita dalle grandezze μ ($\mu = c^{-2} \varrho$), \dot{x}^α , $X^{\alpha\beta}$ e $m^{\alpha\beta\gamma}$ pensate come funzioni delle variabili x^r , t e del parametro c^{-1} ritenuto capace di ogni valore non negativo.

Impongo a tali funzioni che, in certo senso, al variare del parametro c^{-1} ci facciano passare con continuità da un processo relativistico ad un corrispondente processo classico il quale, tra l'altro, soddisfi, almeno approssimativamente, le stesse condizioni iniziali del primo. Più in particolare posso supporre che per $t = 0$ i valori delle \dot{x}^r non dipendano da c^{-1} e per c piccolo l'analogo valga approssimativamente anche per le funzioni μ , X^{rs} e m^{rst} . Facendo $c^{-1} = 0$ nelle (30)₁ scritte opportunamente [cfr. (3)] si ottengono le equazioni classiche (6)_{1,3} considerate nel caso adiabatico ed in assenza di gravitazione e di elettromagnetismo.

Considero il caso in cui in un intorno \mathcal{J} di $t = 0$ tutta la materia sia contenuta nella regione limitata V , cosicchè le funzioni sopra considerate si annullano fuori di V per t in \mathcal{J} . Ciò mi induce a supporre che, in particolare, per $c^{-1} \ll 1$ tali funzioni siano uniformemente continue. Di conseguenza, per $c^{-1} \rightarrow 0$ il vettore $m^r_{st} \dot{x}^s \dot{x}^t$ tende uniformemente ad un limite. Allora, da un lato, la relazione (56)₂ tende alla $0 = \text{cost}$ come è ben naturale, e quindi perde ogni contenuto; dall'altro la (56)₃ rimane valida per $c^{-1} = 0$ e conserva il suo contenuto fisico.

Si noti che per $c^{-1} = 0$, ossia nell'ambito della Fisica classica, la (56)₃ non è una conseguenza delle equazioni fondamentali (6)_{1,3} considerate nel modo suddetto, e anzi, per condizioni iniziali opportune, in Fisica classica essa può non valere.

Si considerino appunto le soluzioni del suaccennato problema classico le quali non verificano la (56)₃. Per quanto precede queste soluzioni non potranno essere ottenute nel modo suddetto come limiti per $c^{-1} \rightarrow 0$ di corrispondenti soluzioni relativistiche dipendenti dal parametro c^{-1} .

La considerata differenza qualitativa fra la teoria classica e la presente teoria relativistica, in cui si usa per $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ la determinazione $u_{\alpha\beta}$, non mi sembra certo un motivo per sostituire $u_{\alpha\beta}$ con un'altra determinazione di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$, magari sempre del tipo $u_{\alpha\beta}^{mna}$ [cfr. (41')]. Infatti la presente teoria non è in contrasto con l'esperienza, sia pur in quanto questa attualmente non è in grado di decidere la questione. Inoltre la considerata differenza qualitativa ha carattere globale e mentre, generalmente, si richiede che le equazioni puntuali relativistiche tendano a corrispondenti equazioni classiche per $c^{-1} \rightarrow 0$ — la quale condizione è soddisfatta nella presente teoria relativistica — l'analogo per le equazioni globali non è mai richiesto; anzi, differenze qualitative globali vistose sono, oltre che ammesse, poste in risalto per loro stesse o per qualche loro conseguenza⁽³⁹⁾.

⁽³⁹⁾ Riferendosi ad una distribuzione infinita e omogenea di gas in [34] § 130, p. 322, è detto, che la teoria classica newtoniana « was unable to carry through any unique treatment for such a non-static cosmological model... » e invece « relativistic mechanics ... has

Si può pure osservare che la rilevata differenza concernente $(56)_3$ è stata presentata in forma di limite ritenendo tale forma particolarmente espressiva; tuttavia il precedente passaggio a limite ha un significato fisico limitato in quanto la costante c ha sperimentalmente un valore ben determinato (quindi da ogni teoria relativistica sono da aspettarsi previsioni differenti dalla corrispondente teoria classica per quantità piccole ma finite).

Ha più senso fisico far tendere uniformemente a zero la velocità iniziale \dot{x}^r rispetto ad $\mathcal{O}_{(i)}$. Facendo ciò si arriva ad un accordo tra le due teorie in quanto secondo la Fisica classica la $(56)_3$ vale rigorosamente ad ogni istante in cui tutte le velocità rispetto ad $\mathcal{O}_{(i)}$ siano nulle.

CAP. III

RELATIVITÀ GENERALE IN PRESENZA DI COPPIE DI CONTATTO

N. 16. — Un tensore energetico delle coppie di contatto ammissibile in relatività generale. Suo significato in Relatività ristretta.

Come si è osservato al N. 10, il problema di estendere la Relatività generale al caso di presenza di coppie di contatto ($m^{\alpha\beta\gamma} \neq 0$) non si può risolvere con alcuna determinazione di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ pochissimo differenti dal tensore $T_{\alpha\beta}$ [cfr. (28)] usato nel caso $m^{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$ in quanto, nel caso generale, $T_{[\alpha\beta]}$ (e anche $\tilde{T}_{[\alpha\beta]}$) può non essere piccolo.

In particolare, per $m^{\alpha\beta\gamma} \neq 0$ non può porsi $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ [cfr. (51)] il che in Relatività ristretta ha permesso la considerata deduzione dell'integrale primo dei momenti (48).

Tuttavia, per superare la suddetta difficoltà si può cercare di definire $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ in modo che in un riferimento localmente naturale e proprio [cfr. (3)] $\mathcal{U}_{\alpha\beta}{}^{|\beta}$ differisca di pochissimo da $u_{\alpha\beta}{}^{|\beta}$ [cfr. (41')] per opportuni valori di

been able to provide a perfectly unambiguous treatment... ».

Sembra che, riguardo alla suddetta distribuzione di gas debbano esserci casi di mancanza delle sopra considerate relazioni globali di limite, in analogia con le precedenti conclusioni intuitive riguardanti la $(56)_3$.

Si può aggiungere che la differenza qualitativa di carattere globale rilevata nella precedente doppia citazione riguarda precisamente la Fisica classica e la Relatività generale; basandosi su tale differenza, in [34] § 130 si mostra che in Relatività generale sono possibili espansioni irreversibili interessanti tutto lo spazio, e di tipo non compatibile con i principi della Fisica classica.

m , n ed a , e in particolare $\mathcal{U}_{\alpha\beta}{}^{|\beta}$ coincide con $u_{\alpha\beta}{}^{|\beta}$ [cfr. (51)] a meno di termini in c^{-2} . Quest'ultima condizione è preferibile a causa dei vantaggi della posizione $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ in Relatività ristretta, rilevati nel Cap. II. Mi accingo ora a mostrare che tale ultima condizione può esser soddisfatta, e anzi si può determinare $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ in modo che nella Relatività ristretta risulti proprio $\mathcal{U}_{\alpha\beta}{}^{|\beta} = u_{\alpha\beta}{}^{|\beta}$. Per effettuare la suddetta determinazione basta sostituire il precedente tensore energetico non simmetrico $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} - T^{(\alpha\beta)}$ delle coppie di contatto [N. 13] col tensore simmetrico [cfr. (38)]

$$(57) \quad M^{\alpha\beta} = (m^{\alpha\gamma\beta} + m^{\beta\gamma\alpha})_{|\gamma} + u^\alpha v^\beta + v^\alpha u^\beta.$$

Infatti, per (14)₃, (51) e (57) $M^{\alpha\beta}$ è legato a $\mathcal{L}^{\alpha\beta}$ dalla relazione

$$(58) \quad M^{\alpha\beta} = \mathcal{L}^{\alpha\beta} - (m^{\alpha\beta\gamma} - m^{\beta\gamma\alpha} + m^{\gamma\alpha\beta})_{|\gamma}$$

$$(\mathcal{L}^{\alpha\beta} = u^\alpha u^\beta - T^{(\alpha\beta)} = 2u^{(\alpha} v^{\beta)} + m^{\alpha\beta\gamma})_{|\gamma}.$$

Inoltre, detto $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ il tensore di Riemann⁽⁴⁰⁾, per il generico tensore triplo $\mathcal{C}^{e\sigma\tau}$ sussiste l'eguaglianza⁽⁴¹⁾

$$(59) \quad \mathcal{C}^{e\sigma\tau}{}_{|\sigma\tau} - \mathcal{C}^{e\sigma\tau}{}_{|\tau\sigma} = \mathcal{C}^{\lambda\sigma\tau} \mathcal{R}_\lambda^e{}_{\sigma\tau}.$$

Allora per (14)₃ si ha

$$(60) \quad - (m^{\gamma\alpha\beta} + m^{\alpha\beta\gamma})_{|\gamma\beta} = m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\beta\gamma} - m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma\beta} = m^{\delta\beta\gamma} \mathcal{R}_\delta^\alpha{}_{\beta\gamma}$$

$$(61) \quad - 2m^{\beta\gamma\alpha}{}_{|\gamma\beta} = m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\beta\gamma} - m^{\alpha\beta\gamma}{}_{|\gamma\beta} = m^{\beta\gamma\delta} \mathcal{R}_\delta^\alpha{}_{\beta\gamma}.$$

Per (60) e (61) da (58)₁ segue immediatamente la prima delle eguaglianze

$$(62) \quad M^{\alpha\beta}{}_{|\beta} - \mathcal{L}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = \left(-\frac{1}{2} m^{\alpha\beta\gamma} + m^{\delta\beta\gamma} \right) \mathcal{R}_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0 - m^{\beta\gamma\delta} \mathcal{R}_\delta^\alpha{}_{\beta\gamma}.$$

Quanto alla seconda, essendo $\mathcal{R}_{\gamma\beta\delta}^\alpha = -\mathcal{R}_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ e valendo (14)₃, il secondo membro di (62) può scriversi $2^{-1}(-m^{\beta\gamma\delta} + m^{\gamma\delta\beta} + m^{\delta\beta\gamma}) \mathcal{R}_{\beta\gamma\delta}^\alpha$; quindi in

⁽⁴⁰⁾ Ritengo $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ definito con segno tale per cui risulti $v_{\alpha|\beta\gamma} - v_{\alpha|\gamma\beta} = v_e \mathcal{R}^e{}_{\alpha\beta\gamma}$ in corrispondenza ad ogni campo vettoriale v_α continuo assieme ai derivati primo e secondo.

⁽⁴¹⁾ Infatti, intendendo $\mathcal{R}_{e\beta}^\gamma = \mathcal{R}_e{}^\gamma{}_{\beta} = \mathcal{R}_{\beta e}^\gamma$, si ha $\mathcal{C}^{e\sigma\tau}{}_{|\sigma\tau} - \mathcal{C}^{e\sigma\tau}{}_{|\tau\sigma} = \mathcal{C}^{\lambda\sigma\tau} \mathcal{R}_\lambda^e{}_{\sigma\tau} + \mathcal{C}^{e\lambda\tau} \mathcal{R}_\lambda^\sigma{}_{\sigma\tau} + \mathcal{C}^{e\sigma\lambda} \mathcal{R}_\lambda^\tau{}_{\sigma\tau} = \mathcal{C}^{\lambda\sigma\tau} \mathcal{R}_\lambda^e{}_{\sigma\tau} + \mathcal{C}^{e\lambda\tau} \mathcal{R}_{\lambda\tau} - \mathcal{C}^{e\sigma\lambda} \mathcal{R}_{\lambda\sigma}$.

base ad una nota proprietà ciclica del tensore di Riemann vale anche la (62)₂.
In base a (58)₂ e (62) le equazioni di conservazione

$$(63) \quad U^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0 \quad \text{ove [cfr. (51), (57)]} \quad U^{\alpha\beta} = T^{(\alpha\beta)} + M^{\alpha\beta}$$

equivalgono alle (30)₁ per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ a meno di termini piccolissimi e addirittura nulli in Relatività ristretta.

Dunque, tra l'altro, $U_{\alpha\beta}$ appare una possibile determinazione di $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ in Relatività ristretta, da aggiungersi alle determinazioni (41') e in particolare alla (51). Tuttavia va osservato che riguardo alla esplicitazione delle equazioni fondamentali essa differisce solo formalmente dalla $u_{\alpha\beta}$ [cfr. (51)] mentre le determinazioni fornite a tal riguardo dalle (41') differiscono tra loro sostanzialmente.

Poichè il tensore $U_{\alpha\beta}$ è simmetrico (sia pur senza esser la simmetrizzazione di $u_{\alpha\beta}$), mediante esso non si possono esprimere le equazioni dei momenti (34) come, invece, è stato possibile fare mediante la posizione $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ [cfr. (30)₂].

Si può osservare che a causa della simmetria del tensore $U_{\alpha\beta}$, in relazione a sistemi chiusi esso dà luogo ad integrali primi di conservazione della quantità di moto totale nella forma usuale [ottenuta da (48) cancellandovi il termine $2m^{\alpha\beta 0}$ e facendovi $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}$. Questo fatto particolare non mi fa preferire $U_{\alpha\beta}$ a $u_{\alpha\beta}$ come tensore energetico totale in Relatività ristretta in quanto la relazione (48) — che è stata stabilita per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ — è sempre un integrale primo, sia pur in forma non usuale; inoltre al tensore $u_{\alpha\beta}$ si è arrivati, mi sembra, spontaneamente mentre il tensore $U_{\alpha\beta}$ è stato ottenuto mediante un artificio [corrispondente a quello che ha portato il termine $2m^{\alpha\beta 0}$ nella (48)].

OSSERVAZIONE. In analogia con (57) anche in Fisica classica le equazioni dinamiche (6) rimangono inalterate sostituendo in esse a $m^{rs}{}_{|\mu}$ il tensore simmetrico $(m^{r's} + m^{s'r})_{|\mu}$.

N. 17. — Equazioni gravitazionali in presenza di coppie di contatto.

In relatività generale le equazioni di conservazione (63) sono immediata conseguenza delle equazioni gravitazionali (32) per $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}$. Stanti (28), (29) e (63)₁, quando si intenda che $X_{\alpha\beta}$ sia simmetrico e tale sia pure $E_{\alpha\beta}$ per definizione, il precedente modo di introdurre le equazioni gravitazionali è conforme al secondo dei due punti di vista considerati al N. 13 riguardo alla impostazione di teorie relativistiche, ossia a quello connesso con le equazioni classiche (6)₃ e (6').

Se, fatto $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}$ [cfr. (63)₂], si tiene invece conto di possibili asimmetrie di $X_{\alpha\beta}$ e $\tilde{E}_{\alpha\beta}$ [cfr. (30)₂], occorre postulare, in aggiunta alla (32), l'equazione dei momenti (34)₁. Forse è più elegante la seguente impostazione, logicamente equivalente alla precedente, e come questa conforme al primo dei suddetti punti di vista — connesso con le (6)_{1,2} e (6'') —. Stanti (28), (29) e (30)₃ si identifichi $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ col seguente tensore non simmetrico [cfr. (51), (57), (63)₂].

$$(64) \quad \begin{aligned} U'_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta} + 2[u_{[\alpha} \lambda_{\beta]} + u_{(\alpha} \nu_{\beta)} + m_{(\alpha\gamma\beta)}{}^{|\gamma]} - m_{\alpha\beta\gamma}{}^{|\gamma]} = \\ &= U_{\alpha\beta} + T_{[\alpha\beta]} + 2u_{[\alpha} \lambda_{\beta]} - m_{\alpha\beta\gamma}{}^{|\gamma]} . \end{aligned}$$

Ora si postuli (32)₁. Allora, essendo $A_{\alpha\beta}$ un tensore simmetrico e a divergenza nulla, ne seguono (30)_{1,2}. Da un lato, poichè risulta $\mathcal{U}_{(\alpha\beta)} = U_{\alpha\beta}$, la (30)₁ coincide con la (63)₁. Dall'altro, essendo per (28), (29) e (30)₃ $T_{[\alpha\beta]} = \tilde{T}_{[\alpha\beta]}$, in base alla simmetria di $U_{\alpha\beta}$ [cfr. (57), (63)₂] e alle (22) e (64), la (30)₂ coincide con la relativizzazione (34)₁ della 2ª equazione di Cauchy.

Le equazioni (30)₁ e (30)₂ ora dedotte da (63) sono quelle che in un cronotopo pseudo-euclideo danno luogo al considerato integrale primo dei momenti (48) [N. 13].

N. 18. Esplicitazione dei contributi delle coppie di contatto al bilancio energetico e alle equazioni dinamiche.

Per (38), (57) e (63)₂ le coppie di contatto influiscono sul tensore $U_{\alpha\beta}$ attraverso $M_{\alpha\beta}$. Siano M^α la forza subita e $\Pi^{(m)}$ l'energia assorbita per unità di volume proprio, a causa di tali coppie.

In analogia con (15) e (16), per (63) è $\mathcal{M}^\alpha = -\tilde{g}^\alpha{}_\sigma \mathcal{M}^{\sigma\beta}{}_{|\beta}$ e $\Pi^{(m)} = -cu_\alpha \mathcal{M}^{\alpha\beta}{}_{|\beta}$.⁽⁴²⁾ Infine, in base alle analoghe per ν^α delle formule (23) e (24), e alle (37), (58)_{2,3} e (62), si ha

$$(65) \quad \begin{cases} \mathcal{M}^\alpha = -\tilde{g}^\alpha{}_\sigma \mathcal{M}^{\sigma\beta}{}_{|\beta} = -\tilde{g}^\alpha{}_\sigma (m^{\sigma\beta\gamma}{}_{|\gamma\beta} + \nu^\sigma{}_{|\beta} u^\beta) - u^\alpha{}_{|\beta} \nu^\beta - \nu^\alpha u^\beta{}_{|\beta} \\ \Pi^{(m)} = -cu_\alpha \mathcal{M}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = -cu_{\alpha|\beta\gamma} m^{\alpha\beta\gamma} + c\nu^\alpha A_\alpha - cu_\alpha m^{\beta\gamma\delta} \mathcal{R}_\delta{}^\alpha{}_{\beta\gamma} . \end{cases}$$

⁽⁴²⁾ Quanto a $\Pi^{(m)}$ confronta (42'); riguardo al (segno del) vettore \mathcal{M}^α basta osservare che, stante (3), la parte spaziale della (60)₁ deve ridursi alla (6') e che per (20) e (63)₂ il contributo di $\varrho u^\alpha u^\beta$ al vettore $\tilde{g}^\alpha{}_\sigma \mathcal{U}^{\sigma\beta}{}_{|\beta}$ è μa^α in quanto per (10) o (28)₂ è $\varrho = c^2 \mu$, $c^2 a^\alpha = A^\alpha$, $(\varrho u^\alpha u^\beta)_{|\beta} = \varrho A^\alpha + u^\alpha (\varrho u^\beta)_{|\beta}$, ossia esso differisce solo per il segno dalla forza d'inerzia per unità di volume proprio.

I contributi ad M^α ed $II^{(m)}$ espressi dai termini nel tensore di Riemann possono dirsi *dovuti alla curvatura del cronotopo in presenza di coppie di contatto*.

Suppongo ora il riferimento x^α localmente naturale e proprio [cfr. (3)] e mi propongo di esprimere M^α ed $II^{(m)}$ usando solo componenti di $m^{\alpha\beta\gamma}$ e u^α ad indici non nulli e loro derivate tensoriali. A tale scopo osservo preliminarmente che, stante (3), per (8), (14)_{3,4,5} e (38) sono nulle le componenti di $m^{\alpha\beta\gamma}$, \tilde{g}^α_β e v^α con almeno un indice nullo; inoltre $u_\alpha = -\delta_\alpha^0$ e per (10) è $u_{0/\alpha} = 0$ e $A_\gamma = u_{\gamma/0}$. Quindi, tra l'altro,

$$(66) \quad (m^{r0\gamma} u_{0/\delta})_{/0} = 0 = (m^{r0} u_{0/0})_{/i}.$$

Si osservi ora che, stanti le (3), per quanto precede le (62) si scrivono

$$(67) \quad \begin{cases} M^r = -m^{r\beta\gamma}{}_{|\gamma\beta} - v^r{}_{/0} - u^r{}_{/s} v^s - v^r u^s{}_{/s}, \\ II^{(m)} = -cm^{hil}(u_{h/i}u_{l/i} + \mathcal{R}_l{}^0{}_{hi}) + cv^h A_{/h}. \end{cases}$$

Per (14)_{3,4,5} si ha, per esempio, $m^{ri\gamma}{}_{/s} u_\gamma = -m^{ri\gamma} u_{\gamma/s}$; quindi

$$(68) \quad m^{r0}{}_{/0i} = -m^{ri\gamma}{}_{/0i} u_\gamma = -(m^{ri\gamma}{}_{/0} u_\gamma)_{/i} + m^{ri\gamma}{}_{/0} u_{\gamma/i} = (m^{ri\gamma} u_{\gamma/0})_{/i} + m^{ris}{}_{/0} u_{s/i},$$

$$(69) \quad m^{r0\gamma}{}_{/r0} = -m^{r\beta\gamma}{}_{/r0} u_\beta = -(m^{r\beta\gamma}{}_{/r} u_\beta)_{/0} + m^{r\beta\gamma}{}_{/r} u_{\beta/0} = (m^{r\beta\gamma} u_{\beta/r})_{/0} + m^{rs\gamma}{}_{/r} A_s.$$

Essendo $m^{ri\beta}{}_{/i\tilde{\beta}} = m^{ris}{}_{/s}$, per (12) si ha

$$(70) \quad m^{r0}{}_{/0} = m^{ris} A_s; \text{ analogamente } m^{i(r0)}{}_{/0} = m^{i(rs)} A_s.$$

Per (14)₅, (66)₁ e (70)₁ è

$$(71) \quad (m^{r\beta\gamma} u_{\beta/\gamma})_{/0} = (m^{r0\gamma} u_{0/\gamma} + m^{ris} u_{i/s})_{/0} + m^{r0}{}_{/0} u_{i/0} = (m^{ris} u_{i/s})_{/0} + m^{ris} A_i A_s.$$

Per (66)₂, (70)₁ e (71) le (68) e (69) divengono

$$(68') \quad m^{r0}{}_{/0i} = (m^{ris} u_{s/0})_{/i} + m^{ris}{}_{/0} u_{s/i}$$

$$(69') \quad m^{r0\gamma}{}_{/r0} = (m^{ris} u_{i/s})_{/0} + 2m^{ris} A_i A_s + m^{rsi}{}_{/i} A_s.$$

Allora l'eguaglianza $m^{r\beta\gamma}{}_{|\gamma\beta} = m^{ril}{}_{/li} + m^{r0}{}_{/0i} + m^{r0\gamma}{}_{/r0}$ diviene

$$(72) \quad m^{r\beta\gamma}{}_{|\gamma\beta} = m^{ril}{}_{/li} + m^{ris} (u_{i/s0} + u_{s/0i}) + 2m^{r(is)}{}_{/0} u_{i/s} + 2(m^{r(s)i}{}_{/i} + m^{r(si)} A_i) A_s.$$

Inoltre, essendo $u_{0/r} = m^{0(rl)} = 0$, da (38) e (70)₂ segue

$$(73) \quad \nu^r = -2u_{i/l} m^{i(rl)} \quad \nu^r_{/0} = -2[u_{i/l} m^{i(rl)}]_{/0} - 2m^{i(rs)} A_i A_s.$$

Stanti le (72) e (73), le (67) forniscono le espressioni volute per M^α e $\Pi^{(m)}$ [cfr. (65)]. Com'era prevedibile, esse sono molto complesse; tale è specialmente la prima in cui per (72) e (73)₂ figurano termini dell'ordine di c^{-2} nel gradiente dell'accelerazione e nei derivati temporali di m^{ir} e del gradiente di velocità, infine termini dell'ordine c^{-4} quadratici nell'accelerazione.

Palermo, Istituto Matematico
Via Archirafi

BIBLIOGRAFIA

- [1] BENTSİK E. *Moti ondosi di tipo sismico con caratteristiche di tensione asimmetriche*. Atti e Mem. Acc. Sc. e Arti di Padova. (in corso di stampa).
- [2] BRESSAN A. *Sui sistemi continui nel caso asimmetrico*. Annali di Mat. pura ed app. Serie IV, Vol. LXII, (1963).
- [3] BRESSAN A. *Qualche teoria di cinematica delle deformazioni finite*. Atti dell'Istituto veneto di Scienze lettere ed Arti. Anno Acc. 1962-63. Tomo CXXI Classe di Scienze matem. e naturali.
- [4] BRESSAN A. *Cinematica dei sistemi continui in relatività generale*. Annali di mat. pura ed applic. Serie IV, Vol. LXII (1963).
- [5] BRESSAN A. *Termodinamica e magneto-visco-elasticità con deformazioni finite in relatività generale*. Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova Vol. XXXIV (1964).
- [6] BRESSAN A. *Onde ordinarie di discontinuità nei mezzi elastici con deformazioni finite in relatività generale*. Rivista di Mat. dell'Univ. di Parma. Serie 2, Vol. 4 (1963).
- [7] BRESSAN A. *Termo magneto-fluido dinamica in relatività generale. Gas perfetti*. Rivista di Mat. dell'Univ. di Parma. Serie 2, Vol. 4 (1963).
- [8] BRESSAN A. *Una teoria di relatività generale includente, oltre all'elettromagnetismo e alla termodinamica, le equazioni costitutive dei materiali ereditari. Sistemazione assiomatica*. Rend. Sem. matem. Univ. di Padova 1964.
- [9] CATTANEO C. *Sulla conduzione del calore*. Atti del Sem. matem. e Fis dell'Univ. di Modena Vol. III, 1948-49.
- [10] ECKART C. *The thermodynamics of irreversible Processes III. Relativistic theory of the Simple fluid*. Physical Review, vol. 58. 1940.
- [11] FINZI B. *Meccanica relativistica ereditaria*. Atti della società italiana per il progresso delle scienze. Vol. II, 1932.
- [12] FINZI PASTORI. *Calcolo tensoriale e applicazioni*. Bologna Zanichelli 1961.
- [13] GALLETTO D. *Sulle equazioni in coordinate generali della statica dei continui con caratteristiche di tensione asimmetriche*. Annali dell'Università di Ferrara. Serie VII. Scienze mat. Vol. X. n. 5 (1962).
- [14] GALLETTO D. *Nuove forme per le equazioni in coordinate generali della statica dei continui con caratteristiche di tensione asimmetriche*. Annali della Scuola normale superiore. Pisa 1963.
- [15] GALLETTO D. *Contributo allo studio dei sistemi continui nel caso asimmetrico*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (in corso di stampa).
- [16] GALLETTO D. *Sull'unicità in presenza di vincoli interni di una condizione cinematica fondamentale nella teoria delle deformazioni finite*. Atti dell'Istit. Ven. di Sc. Lett. ed Arti T. CXXIII (in corso di stampa).
- [17] GYORGYI G. *Die Bewegung des Energiemittelpunktes und der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes in Dielektrika*. Acta Phys. Hung. Budapest 1954. T. IV. Fasc. 2. p. 121.
- [18] GRIOLI G. *Elasticità asimmetrica*. Annali di mat. pura ed appl. Vol. IV (IV) pp. 389-418. (1960).

- [19] GRIOLI G. *Onde di discontinuità ed elasticità asimmetrica*. Acc. Naz. dei Lincei. S. VIII, Vol. XXIX, Fasc. 5. Nov. 1960.
- [20] HERGLOTZ G. *Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie*. Ann. Phys. (4), 36, 493-533.
- [21] LINCOLN E. BRAGG. *On Relativistic Worldlines and Motions and on Non-sentient Response*. Archive for Rational Mechanics and Analysis. Vol. 18, n. 2, 1965. P. 127.
- [22] MÖLLER C. *The theory of relativity*. Oxford at the Clarendon Press, 1952.
- [23] MINDLIN R. D. and TIERSTEN H. F. *Effects of Couple-stress in Linear Elasticity*. Archive for Rat. Mechanics and Analysis Vol. II, n. 5 1962.
- [24] NOLL W. *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*. Archive for Rational Mechanics and Analysis Vol. 2 n. 3 p. 197, 1958.
- [25] NOLL W. *The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum Mechanics*. The axiomatic method with special reference to Geometry and Phys. North Holland Publishing Co. Amsterdam.
- [26] PHAM MAU QUAN. *Sur une theorie relativiste des fluides thermodynamiques*. Ann. di Mat. pura ed appl. Serie IV Vol. 38, 1955.
- [27] PHAM MAU QUAN. *Etude electromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé*. Journal of Rational mechanics and An. Vol. 5, 1956.
- [28] PHAM MAU QUAN. *Introductions électromagnétiques en relativité générale et principe de Fermat*. Arch. for Rat. Mech. and An. Vol. I (1957-58) p. 54.
- [29] PHAM MAU QUAN. *Thermodynamique d'un fluide relativiste*. Boll. U.M.I. Serie III, Anno XV n. 2, Giugno 1960.
- [30] RAYNER C. B. *Elasticity in general relativity*. Royal Society Proceedings 1963.
- [31] SIGNORINI A. *Lezioni di Fisica matematica*. Roma 1952-53.
- [32] SYNGE J. L. *A theory of elasticity in general relativity*, Math. Zeitschr. 72, pp. 82-87, 1959.
- [33] SYNGE J. L. *Relativity: the general theory*. North Holland Publishing Co. Amsterdam, 1960.
- [34] TOLMAN R. C. *Relativity thermodynamics and cosmology*. Oxford at the Clarendon Press 1949.
- [35] TOUPIN R. A. *Elastic materials with Couple-stress*. Archive for Rational mechanics and analysis. Vol. II, n. 5 dic 1962.
- [36] TOUPIN R. C. *Theorie of elasticity with Couple-stress*. Arch. For Rational Mechanics and Analysis. Vol. 17, n. 2, 1964, p. 85.
- [37] TRUESDELL C. TOUPIN R. A. *The classical field theory*. Handbuch der Physik Vol. III/I, Springer-Verlag, 1960, p. 226.
- [38] VAN DANTZIG D. *On the thermohydrodynamics of perfectly perfect fluid*. Proc. Kond. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 43, 1940.