ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

OSCAR MONTALDO

Sull'esistenza dell'estremo per gli integrali di Fubini-Tonelli in forma parametrica nel senso di Weierstrass

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 2 (1966), p. 443-452
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_2_443_0>

SULL'ESISTENZA DELL'ESTREMO PER GLI INTEGRALI DI FUBINI-TONELLI IN FORMA PARAMETRICA NEL SENSO DI WEIERSTRASS

di OSCAR MONTALDO (*)

§ 1. — PREMESSE.

1. Introduzione.

In una Nota dal titolo « Sulla semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli in forma parametrica nel senso di Weierstrass » in questo stesso fascicolo, ho studiato l'integrale

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}) = \iint_{\mathcal{C}} F(x, y, dx, dy)$$

e ho dato delle condizioni necessarie e sufficienti per la sua semicontinuità.

In questa Nota ne proseguo lo studio dimostrando alcuni teoremi che assicurano l'esistenza del suo estremo assoluto (1).

2. Richiami.

È opportuno per intendere chiaramente questa Nota richiamare alcune definizioni e risultati della mia Nota precedente.

Pervenuto alla Redazione il 12 Maggio 1966.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerche matematiche n^0 31 del C. N. R.

(1) Per la bibliografia relativa a questa Nota vedasi la mia precedente più su richiamata.

Siano:

$A_1\,[A_2]$ un insieme chiuso di punti dello spazio euclideo $\mathcal{E}_n$:

$x = (x_1, \dots, x_n)\ [(y = (y_1, \dots, y_n)]$;

A l'insieme dei punti $P(x, y)$ di $\mathcal{E}_{2n}$ prodotto topologico $A_1 \times A_2$;

$\bar{A}$ un insieme limitato e chiuso costituito da punti interni di A;

B l'insieme $(P; x', y')$ con $P \in A$ e $x' = v(x'_1, \dots, x'_n)$, $y' = v(y'_1, \dots, y'_n)$ due vettori non nulli di $\mathcal{E}_n$;

$\bar{B}$ l'insieme limitato e chiuso $(P; x', y')$ con $P \in A$ e $|x'| = |y'| = 1$.

$\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ una curva (che diremo *ordinaria*) appartenente ad A, di componenti continue e rettificabili $\mathcal{C}_1 \equiv (x = x(t),\ a \leq t \leq b)$, $\mathcal{C}_2 \equiv (y = y(\tau),\ \ c \leq \tau \leq d)$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $y(\tau) = (y_1(\tau), \dots, y_n(\tau))$.

$F(P; x', y')$ una funzione:

a) definita per ogni $P \in A$ e per ogni coppia di vettori x', y' di $\mathcal{E}_n$;

b) continua nel complesso delle sue variabili e positivamente omogenea di grado 1 in x' e y' separatamente; cioè tale che

$$F(P; hx', ky') = hk\, F(P; x', y') \tag{1}$$

per ogni coppia di numeri positivi h e k;

c) positivamente convessa rispetto a x' e y' separatamente in ogni punto P interno ad A; cioè tale che

$$\begin{aligned} F(P; a_1 x'_1 + a_2 x'_2, b_1 y'_1 + b_2 y'_2) \leq \\ b_1 [a_1 F(P; x'_1, y'_1) + a_2 F(P; x'_2, y'_1)] + b_2 [a_1 F(P; x'_1, y'_2) + a_2 F(P; x'_2\, y'_2)] \end{aligned} \tag{2}$$

qualunque siano le due coppie di vettori x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 e con a_1, a_2, b_1, b_2 costanti positive.

$\mathcal{J}_w(\mathcal{C})$ l'integrale di Weierstrass della F esteso alla curva $\mathcal{C}$ di componenti $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$

$$\mathcal{J}_w(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2} F(x, y, dx, dy).$$

Diremo che:

F è *quasi regolare positiva* (q. r. p.) se in ogni punto P interno ad A vale la (2);

F è *regolare positiva* se in ogni punto interno ad A vale la (2) col solo segno $<$.

Si ha il seguente

TEOREMA. *Se* F *è* q. r. p., $\mathcal{I}_w(\mathcal{C})$ *esiste finito ed è semicontinuo inferiormente in ogni classe di curve* $\mathcal{C}$ *ordinarie con componenti di lunghezza superiormente limitata.*

OSSERVAZIONE. Si noti che i risultati ottenuti nella mia Nota citata nell'introduzione, e qui richiamati, come quelli relativi a questa Nota, si riferiscono sempre a curve effettive, cioè a quelle le cui componenti non si riducono ad un punto.

§ 2. — IL MINIMO DI $\mathcal{I}_w(\mathcal{C})$.

1. Teoremi di esistenza dell'estremo di $\mathcal{I}_w(\mathcal{C})$ in insiemi limitati.

In questo n⁰ considereremo sempre A limitato.

TEOREMA 1. *Sia* $\mathcal{H}$ *una famiglia completa di curve ordinarie* $\mathcal{C}=(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)\in A$ *tale che, dette* L_1, L_2 *le lunghezze delle componenti* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *di* $\mathcal{C}$, *risulti* $\inf_{\mathcal{H}} L_i \geq \Lambda > 0$.

Sia F q. r. p. *e supponiamo che esista una funzione* $\Phi(\alpha)$, *continua, non negativa e non decrescente tale che qualunque sia la curva* $\mathcal{C} \in \mathcal{H}$ *si abbia*

$$L_1 \cdot L_2 \leq \Phi(\mathcal{I}_w(\mathcal{C})). \tag{1}$$

Allora esiste il minimo di $\mathcal{I}_w(\mathcal{C})$ *in* $\mathcal{H}$.

Sia

$$\{\mathcal{C}_1\}, \{\mathcal{C}_2\}, \dots \{\mathcal{C}_n\}, \dots \tag{2}$$

una successione minimizzante per $\mathcal{I}_w(\mathcal{C})$ in $\mathcal{H}$, cioè tale che sia

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}_n) \leq i + \frac{1}{n}, \tag{3_1}$$

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}_n) \leq -n \tag{3_2}$$

a seconda che l'estremo inferiore i di $\mathcal{I}_w(\mathcal{C})$ in $\mathcal{H}$ sia finito o no. Mostriamo che nel nostro caso i è finito.

Infatti, in caso contrario, dovendo valere la (3_2), si avrebbe per la (1)

$$L_{1n} \cdot L_{2n} \leq \Phi(\mathcal{I}_w(\mathcal{C}_n)) \leq \Phi(-n) \leq \Phi(-1),$$

avendo indicato con L_{1n}, L_{2n} le lunghezze delle componenti $\mathcal{C}_{1n}$, $\mathcal{C}_{2n}$ della $\mathcal{C}_n$. D'altra parte si può scrivere

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}_n) \geq -M \int\limits_{\mathcal{C}_{1n}\times\mathcal{C}_{2n}} |dx|\,|dy| = -M L_{1n} \cdot L_{2n}$$

dove M è il massimo di $|F|$ in $\overline{B}$; si avrebbe dunque

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}_n) \geq -M\,\Phi(-1)$$

che contraddice la (3_2).

Quindi i è finito e, qualunque sia la curva $\mathcal{C}_n$ dell'insieme $\{\mathcal{C}_n\}$, sussiste la (3_1) e per la (1)

$$L_{1n} \cdot L_{2n} \leq \Phi(i+1).$$

Avendo pertanto tutte le curve degli insiemi $\{\mathcal{C}_n\}$ componenti di lunghezza superiormente limitata, la successione (2) ammette almeno una curva di accumulazione $\mathcal{C}_0$ ordinaria [1] appartenente ad A e $\mathcal{I}_w(\mathcal{C})$ è semicontinuo inferiormente nella classe $\mathcal{H}$.

Pertanto, applicando il noto ragionamento di Tonelli, si ha che

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}_0) = i.$$

TEOREMA 2. *Sia $\mathcal{H}$ una famiglia completa di curve ordinarie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \in A$ con* $\underset{\mathcal{H}}{\text{Inf.}}$ lung. $\mathcal{C}_i \geq \Delta > 0$.

Allora, se F è q. r. p. *e positiva su $\overline{B}$, esiste il minimo di $\mathcal{I}_w(\mathcal{C})$ in $\mathcal{H}$.* Si ha

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}) \geq m \int\limits_{\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2} |dx|\,dy| = mL_1 \cdot L_2$$

dove è $m > 0$ il minimo di $F(P; x', y')$ su $\overline{B}$ e L_1, L_2 sono le lunghezze di $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$.

---

[1] v. TONELLI, *Fond. di. Cal. delle Variaz.*, vol. I, a pag. 87.

Dalla relazione precedente si ricava

$$L_1 \cdot L_2 \leq \frac{1}{m} \mathcal{I}_w (\mathcal{C})$$

e, ponendo

$$\Phi(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < 0 \\ \alpha/m & \text{,, } \alpha \geq 0 \end{cases}$$

risulta soddisfatta la condizione del Teor. 1 e la proposizione attuale riesce provata.

Sia $F \geq 0$ e q. r. p.. Uno zero P_0 di F si dirà *ordinario* per F se è possibile determinare n^2 costanti $a_{i,j}^{(0)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, tali che la funzione

$$F^{(0)}(P; x', y') = F(P; x', y') + \sum_{i,j} a_{i,j}^{(0)} x_i' y_j'$$

sia tale che

$$\frac{F^{(0)}(P; x', y')}{|x'|\,|y'|} > 0$$

per tutti i punti $P \in A$ di un intorno sufficientemente piccolo di P_0.

TEOREMA 3. *Sia* $F \geq 0$ *e* q. r. p. *in* $\bar{B}$, *avente soltanto un numero finito di zeri in* A *e tale che ogni zero sia ordinario.*

Allora in ogni classe completa $\mathcal{K}$ *di curve ordinarie* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \in A$ *e tale che* $\operatorname*{Inf.}_{\mathcal{K}} L_i \geq \Lambda > 0$, *dove* $L_i = \text{lung. } \mathcal{C}_i$, *esiste il minimo di* $\mathcal{I}_w(\mathcal{C})$.

L'ipotesi che gli zeri di F siano tutti ordinari e in numero finito permette anzitutto di concludere che esiste $r > 0$ con la proprietà seguente: Siano $P_s = (P_{s1}, P_{s2})$, $s = 1, 2, \dots, p$, gli zeri di F; allora per ogni s è possibile determinare n^2 costanti $a_{ij}^{(s)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, in modo che la funzione

$$F^{(s)}(P; x', y') = F(P; x', y') + \sum_{i,j} a_{ij}^{(s)} x_i' y_j'$$

con $|x'| = |y'| = 1$, risulti (strettamente) positiva nei punti $P = (P_1, P_2)$, con $P_1 \in A_1$, $P_2 \in A_2$ e appartenenti rispettivamente agli intorni

$$R_{s1} : |P_1^{(h)} - P_{s1}^{(h)}| < r, \quad R_{s2} : |P_2^{(h)} - P_{s2}^{(h)}| < r, \; h = 1, 2, \dots, n.$$

Supponiamo r così piccolo che gli intorni R_{s1} [e analogamente gli intorni R_{s2}] non si sovrappongano ed introduciamo i nuovi intorni

$$R'_{s1} : | P_i^{(h)} - P_{s1}^{(h)} | < r/2 , \qquad h = 1, 2, \dots , n,$$

$$R'_{s2} : | P_2^{(h)} - P_{s2}^{(h)} | < r/2 , \qquad h = 1, 2, \dots , n.$$

Poniamo

$$m = \min. \frac{F(P; x', y')}{| x' | \, | y' |},$$

dove il minimo è preso per P nel chiuso

$$A_1 \times A_2 - \bigcup_{s=1}^{p} (R'_{s1} \times R'_{s2}),$$

$$M = \max_{i,j,s} | a_{ij}^{(s)} |,$$

$$m' = \min_s \min_{R_{s1} \times R_{s2}} \frac{F^{(s)}(P; x', y')}{| x' | \, | y' |}.$$

Per le ipotesi fatte avremo $m > 0$, $m' > 0$.

Prendiamo una qualsiasi curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \in \mathcal{H}$ e portiamo per il momento la nostra attenzione sui soli archi di $\mathcal{C}_1 [\mathcal{C}_2]$ che sono contenuti in $R_{s1} [R_{s2}]$ e che contengono punti di $R'_{s1} [R'_{s2}]$; tali archi, se esistono, verranno indicati con $\alpha_{s\mu} [\beta_{s\nu}]$ e si intende che essi siano archi di lunghezza massima di $\mathcal{C}_1 [\mathcal{C}_2]$ aventi la proprietà considerata.

Ogni arco $\alpha_{s\mu}$ dovrà avere un estremo in un punto della frontiera di R_{s1}, a meno che esso sia tutto contenuto in R_{s1}, nel qual caso coinciderà con la curva connessa $\mathcal{C}_1$. Ne segue che il numero degli archi $\alpha_{s\mu}$ è finito poichè o si ha un solo arco, la curva $\mathcal{C}_1$, oppure ciascuno di questi archi possiede un punto sulla frontiera di R_{s1} ed un punto interno a R'_{s1} e quindi avrà lunghezza $\geq r/2$.

Lo stesso discorso si può ripetere per ogni arco $\beta_{s\nu}$.

La curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ verrà adesso decomposta in $\sum_s^{p}{}_{1} \Sigma_\mu \Sigma_\nu \alpha_{s\mu} \times \beta_{s\nu}$ ed in una parte rimanente, che chiameremo $\overline{\mathcal{C}}$ che consisterà di un numero finito di curve ordinarie. Si osservi che nessun punto della parte $\overline{\mathcal{C}}$ è contenuto in $\bigcup_{s=1}^{p} (R'_{s1} \times R'_{s2})$; dunque $\overline{\mathcal{C}}$ è contenuta in $(A_1 \times A_2) - \bigcup_{s=1}^{p} (R'_{s1} \times R'_{s2})$.

Ne segue, per la definizione di m:

$$\mathcal{J}_w(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} F \geq \int_{\overline{\mathcal{C}}} F \geq m \int_{\overline{\mathcal{C}}} | dx | \, | dy |,$$

cioè

$$\int_{\bar{\mathcal{C}}} |dx|\,|dy| \leq \frac{1}{m}\,\mathcal{I}_w(\mathcal{C}). \tag{4}$$

Si ha ancora

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_w(\mathcal{C}) &= \int_{\mathcal{C}} F \geq \sum_{1}^{p}{}_s \Sigma_\mu \Sigma_\nu \int_{\alpha_{s\mu}\times p_{s\nu}} F = \\ &= \sum_{1}^{p}{}_s \Sigma_\mu \Sigma_\nu \int_{\alpha_{s\mu}\times\beta_{s\nu}} F^{(s)} - \sum_{1}^{p} \Sigma_\mu \Sigma_\nu \int_{\alpha_{s\mu}\times\beta_{s\nu}} \sum_{ij} \alpha_{ij}^{(s)}\, dx_i\, dy_j\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Per la definizione di m' ricaviamo

$$\sum_{1}^{p}{}_s \Sigma_\mu \Sigma_\nu \int_{\alpha_{s\mu}\times\beta_{s\nu}} F^{(s)} \geq m' \sum_{1}^{p}{}_s \Sigma_\mu \Sigma_\nu \int_{\alpha_{s\mu}\times\beta_{s\nu}} |dx|\,|dy| = m' \int_{\mathcal{C}-\bar{\mathcal{C}}} |dx|\,|dy|\,. \tag{6}$$

Poichè le curve $\alpha_{s\mu}$ si svolgono tutte in R_{s1} avremo $\left|\int_{\alpha_{s\mu}} dx_i\right| \leq 2r$, e allo stesso modo $\left|\int_{\beta_{s\nu}} dy_j\right| \leq 2r$. Dunque $\left|\int_{\alpha_{s\mu}\times\beta_{s\nu}} dx_i\, dy_j\right| \leq 4r^2$ e poichè $|a_{ij}^{(s)}| \leq M$ ne segue

$$\left| \sum_{1}^{p}{}_s \Sigma_\mu \Sigma_\nu \int_{\alpha_{s\mu}\times\beta_{s\nu}} \Sigma_{ij}\, a_{ij}^{(s)}\, dx_i\, dy_j \right| \leq 4n^2 M r^2 \sum_{1}^{p}{}_s N_s\, N'_s\,, \tag{7}$$

dove abbiamo posto N_s = numero degli archi $\alpha_{s\mu}$ e N'_s = numero degli archi $\beta_{s\nu}$. Dunque per le (5), (6), (7) si ha

$$\int_{\mathcal{C}-\bar{\mathcal{C}}} |dx|\,|dy| \leq \frac{1}{m'}\,\mathcal{I}_w(\mathcal{C}) + \frac{4}{m'}\, n^2 M r^2 \sum_{1}^{p}{}_s N_s\, N'_s \tag{8}$$

e combinando questa disuguaglianza con la (4) ricaviamo

$$L_1 L_2 = \int_{\mathcal{C}} |dx|\,|dy| \leq \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \mathcal{I}_w(\mathcal{C}) + \frac{4}{m'}\, n^2 M r^2 \sum_{1}^{p}{}_s N_s\, N'_s\,,$$

dove, come si è già detto, N_s è il numero degli archi $\alpha_{s\mu}$ e N'_s quello degli archi $\beta_{s\nu}$.

Resta da dare una stima per il numero di questi archi. A tale scopo ricordiamo che, tranne il caso in cui $\mathcal{C}_1\,[\mathcal{C}_2]$ sia tutta contenuta in $R_{s1}\,[R_{s2}]$, ogni arco $\alpha_{s\mu}\,[\beta_{s\nu}]$ contiene un subarco $\alpha^*_{s\mu}\,[\beta^*_{s\nu}]$ che è contenuto in $R_{s1} - R'_{s1}$ $[R_{s2} - R'_{s2}]$ e che ha lunghezza non inferiore a $r/2$.

Si presentano adesso i seguenti casi:

(I) ambedue le curve $\mathcal{C}_i$ sono contenute in intorni R_{si};

(II) una sola delle curve $\mathcal{C}_i$ è contenuta in intorni R_{si};

(III) nessuna delle curve $\mathcal{C}_i$ è contenuta in intorni R_{si}.

Nel primo caso avremo immediatamente

$$\sum_1^p {}_s\, N_s\, N'_s \leq 1.$$

Nel secondo caso, supponiamo che la curva $\mathcal{C}_1$ sia contenuta in R_{s1}. Allora

$$\sum_1^p {}_s\, N_s\, N'_s \leq \sum_1^p {}_s\, N'_s\,.$$

Avremo, osservando che $\mathcal{C}_1 \times \beta^*_{s\nu}$ sta in $(A_1 \times A_2) - \bigcup_{s=1}^{p} (R'_{s1} \times R'_{s2})$,

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}) \geq \sum_1^p {}_s\, \Sigma_\nu \int_{\mathcal{C}_1 \times \beta^*_{s\nu}} F \geq m \sum_1^p {}_s\, \Sigma_\nu \int_{\mathcal{C}_1 \times \beta^*_{s\nu}} |\,dx\,|\,|\,dy\,| \geq$$

$$\geq m \sum_1^p {}_s\, \Sigma_\nu\, L_1\; r/2 = \frac{r}{2}\, m L_1 \sum_1^p {}_s\, N'_s\,.$$

Per le ipotesi fatte sulla famiglia $\mathcal{H}$, si ha Inf. $L_1 = \Lambda_1 > 0$, dunque

$$\sum_1^p {}_s\, N_s\, N'_s \leq \frac{2}{rm\Lambda_1}\, \mathcal{I}_w(\mathcal{C}). \tag{9}$$

Analogamente si ragiona se è la curva $\mathcal{C}_2$ che è contenuta in R_{s2}, dunque posto

$$\Lambda = \min_i \text{ Inf. } L_i$$

avremo

$$\sum_1^p {}_s\, N_s\, N'_s \leq \frac{2}{rm\Lambda}\, \mathcal{I}_w(\mathcal{C}).$$

Nel terzo caso risulta

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}) \geq \sum_1^p {}_s \, \Sigma_\mu \, \Sigma_\nu \int_{\alpha^*_{s\mu} \times \beta^*_{s\nu}} F \geq m \sum_1^p {}_s \, \Sigma_\mu \, \Sigma_\nu \int_{\alpha^*_{s\mu} \times \beta^*_{s\nu}} |\, dx \,|\, |\, dy \,| \geq \frac{mr^2}{4} \sum_1^p {}_s \, N_s \, N'_s ,$$

poichè

$$\int_{\alpha^*_{s\mu} \times \beta^*_{s\nu}} |\, dx \,|\, |\, dy \,| \geq r^2/4$$

e poichè $\alpha^*_{s\mu} \times \beta^*_{s\nu}$ sta in

$$(A_1 \times A_2) - \bigcup_{s=1}^{p} (R'_{s1} \times R'_{s2}).$$

Dunque in questo caso

$$\sum_1^p {}_s \, N_s \, N'_s \leq \frac{4}{mr^2} \mathcal{I}_w(\mathcal{C}).$$

Abbiamo perciò dimostrato che in ogni famiglia $\mathcal{H}$ di curve $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ con Inf. $L_i \geq \Lambda > 0$, nella ipotesi del Teorema 3, vale la disuguaglianza

$$L_1 L_2 \leq \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} + \frac{8n^2 Mr}{mm'\Lambda} + \frac{16n^2 M}{mm'} \right) \mathcal{I}_w(\mathcal{C}) + \frac{1}{m'} 4n^2 \, Mr^2.$$

Le ipotesi del Teorema 1 sono pertanto soddisfatte e il Teorema 3 è completamente dimostrato.

Esempio.

La funzione

$$F(P\,;\, x', y') = 2\,|\, x' \,|\, |\, y' \,| + (\,|\, x' \,|\, y'_1 + |\, y' \,|\, x'_1)\,(1 + \overline{PO}^2)^{-1}$$

soddisfa a tutte le ipotesi del Teor. 3.

Infatti:
è continua in ogni insieme A limitato, omogenea di grado 1 e convessa, separatamente rispetto a x' e y'.

Per ogni coppia di vettori $x', y' \neq 0$ $[x' = v\,(x'_1, \ldots, x'_n),\ y' = v\,(y'_1, \ldots, y'_n)]$ è

$$F > 0,$$

per le stesse coppie di vettori x', y' e per ogni punto $P \neq 0$ (origine) è

$$F > 0,$$

in 0 è

$$F = |x'|\,|y'|\left(2 + \frac{x_1'}{|x'|} + \frac{y_1'}{|y'|}\right)$$

ed è $F > 0$ tranne che per $x_1' / |x'| = y_1' / |y'| = -1$.

Dunque la F ha un solo zero (nell'origine) che è ordinario (secondo la definizione che abbiamo dato a pag. 5) in quanto la funzione

$$F^{(1)} = F + x_1' y_1'$$

soddisfa alla disuguaglianza

$$F^{(1)} \geq |x'|\,|y'|,$$

come si vede dall'identità

$$F^{(1)}(P, x', y') = |x'|\,|y'| + \frac{\overline{PO}^2}{1 + \overline{PO}^2}(|x'|\,|y'| + x_1' y_1') +$$

$$+ \frac{(|x'| + x_1')(|y'| + y_1')}{1 + \overline{PO}^2}.$$

Al contrario, $F = \overline{PO}^2 |x'|\,|y'|$ è q. r. p. e ≥ 0, ma ha uno zero nell'origine che non è ordinario.

Università di Cagliari