Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Sergio Campanato

Su un teorema di interpolazione di G. Stampacchia

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 3 (1966), p. 649-652

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_3_649_0>

SU UN TEOREMA DI INTERPOLAZIONE DI G. STAMPACCHIA

SERGIO CAMPANATO

1. — Sia Q_0 un cubo limitato di $\mathbb{R}^n$ e $u(x)$ una funzione sommabile su Q_0 (¹). Si dice che u appartiene allo spazio $\mathcal{E}_0(Q_0)$ se per ogni cubo $Q \subset Q_0$, con lati paralleli a quelli di Q_0,

$$\int_Q | u(x) - u_Q | \, dx \leq | Q | \, K(u) \tag{1.1}$$

dove K è una costante positiva, $|Q|$ è la misura di Q e u_Q è la media integrale di u su Q.

$\mathcal{E}_0(Q_0)$ è uno spazio vettoriale e $[u]_{\mathcal{E}_0(Q_0)} = \inf K$ (²) è una seminorma in $\mathcal{E}_0(Q_0)$ (³).

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e T una applicazione lineare definita su $L^1(\Omega)$. In un recente lavoro [2] G. Stampacchia ha dimostrato il seguente teorema di interpolazione.

TEOREMA I. — *Se T applica $L^\infty(\Omega)$ in $\mathcal{E}_0(Q_0)$, $L^p(\Omega)$ in $L^p(Q_0)$ per un certo p, $1 \leq p < +\infty$, e si hanno le maggiorazioni*

$$[Tu]_{\mathcal{E}_0(Q_0)} \leq M_\infty \, \| u \|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in L^\infty(\Omega) \tag{1.2}$$

$$\| Tu \|_{L^p(Q_0)} \leq M_p \, \| u \|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in L^p(\Omega) \tag{1.3}$$

Pervenuto alla Redazione il 23 Giugno 1966.

(¹) Qui e nel seguito intendiamo che le funzioni siano a valori reali.

(²) L'inf. si intende rispetto a tutte le K per cui vale la (1.1).

(³) $\mathcal{E}_0(Q)$ si può normalizzare ponendo, ad esempio $\| u \|_{\mathcal{E}_0(Q_0)} = [u]_{\mathcal{E}_0(Q_0)} + \| u \|_{L^1(Q)}$.

allora T applica $L^q(\Omega)$ *in* $L^q(Q_0)$ *per ogni* $q \in [p, +\infty)$ *e si ha la maggiorazione*

$$(1.4) \qquad \| Tu \|_{L^q(Q_0)} \leq \mathcal{M} \| u \|_{L^q(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in L^q(\Omega)$$

$\mathcal{M}$ *è una costante positiva che dipende da* n, p, q, M_∞, M_p *da* Ω *e da* Q_0 (4).

In questa nota si espone una nuova dimostrazione del teorema I. In essa, come in quella di Stampacchia, si utilizzano un lemma di John-Nirenberg e il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz.

2. — Sia $\Delta : Q_0 = \bigcup_k Q_k$ una partizione di Q_0 in cubi Q_k a due a due disgiunti, $u(x) \in L^1(Q_0)$, $r \in [1, +\infty)$. Poniamo

$$K_r^r(u) = \sup_{\Delta} \sum_k | Q_k |^{1-r} \left(\int_{Q_k} | u - u_{Q_k} | \, dx \right)^r .$$

LEMMA 2.1 (John-Nirenberg) — *Se per un certo* p, $1 < p < +\infty$, *risulta* $K_p(u) < +\infty$ *allora* $(u - u_{Q_0}) \in L^p_{\text{deb}}(Q_0)$ *e si ha la maggiorazione*

$$(2.1) \qquad \text{mis}\, \{x \in Q_0 : | u(x) - u_{Q_0} | > t\} \leq A(n, p) \left[\frac{K_p(u)}{t} \right]^p, \ \forall\, t > 0.$$

Per la dimostrazione di questo lemma si veda [1] n. 3.

Supponiamo che T sia una applicazione lineare definita su $L^1(\Omega)$ la quale verifica le ipotesi del teor. I. Sia $\Delta : Q_0 = \bigcup_k Q_k$ una partizione di Q_0. Per ogni $u \in L^p(\Omega)$ indichiamo con $\mathcal{T}(u)$ la funzione, definita in Q_0, la quale sul generico cubo Q_k della partizione Δ assume il valore costante

$$\frac{1}{| Q_k |} \int_{Q_k} | Tu - (Tu)_{Q_k} | \, dx .$$

L'applicazione $\mathcal{T}$ è sub-lineare (5) e, in virtù delle ipotesi (1.2) e (1.3), applica $L^\infty(\Omega)$ in $L^\infty(Q_0)$ e $L^p(\Omega)$ in $L^p(Q_0)$ e si hanno le maggiorazioni

$$(2.2) \qquad \| \mathcal{T}u \|_{L^\infty(Q_0)} \leq M_\infty \| u \|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$(2.3) \qquad \| \mathcal{T}u \|_{L^p(Q_0)} \leq 2M_p \| u \|_{L^p(\Omega)}$$

(4) Più precisamente dal rapporto $\dfrac{|\Omega|}{|Q_0|}$.

(5) Ciò significa che $| \mathcal{T}(\lambda u) | \leq | \lambda | \, | \mathcal{T}u |$ e $| \mathcal{T}(u + v) | \leq | \mathcal{T}u | + | \mathcal{T}v |$.

Allora, per un noto teorema di Marcinkiewicz [3], $\mathcal{T}$ applica $L^r(\Omega)$ in $L^r(Q_0)$ per ogni $p < r < +\infty$ e si ha la maggiorazione

$$\| \mathcal{T}u \|_{L^r(Q_0)} \leq c(p, r) M_\infty^{1-\frac{p}{r}} M_p^{\frac{p}{r}} \| u \|_{L^r(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in L^r(\Omega). \tag{2.4}$$

Per l'arbitrarietà della partizione Δ, la (2.4) assicura che

$$K_r(Tu) \leq c(p, r) M_\infty^{1-\frac{p}{r}} M_p^{\frac{p}{r}} \| u \|_{L^r(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in L^r(\Omega). \tag{2.5}$$

La conclusione segue come nella dimostrazione di Stampacchia. La (2.5), tenuto conto del lemma 2.1, e l'ipotesi (1.3) assicurano che l'applicazione lineare $u \longrightarrow [Tu - (Tu)_{Q_0}]$ è di tipo (p, p)-forte con norma $\leq 2M_p$ e di tipo (r, r)-debole con norma $\leq A^{1/r}(n, r)\, c(p, r) M_\infty^{1-\frac{p}{r}} M_p^{\frac{p}{r}}$ e questo $\forall\, r \in (p, +\infty)$. Quindi, per il teorema di Marcinkiewicz, $u \longrightarrow [Tu - (Tu)_{Q_0}]$ è di tipo (q, q)-forte $\forall\, q \in (p, +\infty)$ e si ha la maggiorazione

$$\| Tu - (Tu)_{Q_0} \|_{L^q(Q_0)} \leq \mathcal{K}(A, p, q, M_\infty, M_p) \| u \|_{L^q(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in L^q(\Omega). \tag{2.6}$$

Di qui segue la (1.4) tenuto conto che [6]

$$\| Tu \|_{L^q(Q_0)} \leq \| Tu - (Tu)_{Q_0} \|_{L^q(Q_0)} + M_p \left(\frac{|\Omega|}{|Q_0|} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \| u \|_{L^q(\Omega)}.$$

Università di Pisa

---

[6] $$\| Tu \|_{L^q(Q_0)} \leq \| Tu - (Tu)_{Q_0} \|_{L^q(Q_0)} + \| (Tu)_{Q_0} \|_{L^q(Q_0)} \leq$$

$$\leq \| Tu - (Tu)_{Q_0} \|_{L^q(Q_0)} + |Q_0|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \| Tu \|_{L^p(Q_0)} \leq$$

$$\leq \| Tu - (Tu)_{Q_0} \|_{L^q(Q_0)} + M_p \left(\frac{|\Omega|}{|Q_0|} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \| u \|_{L^q(\Omega)}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] F. JOHN e L. NIRENBERG — « *On functions of bounded mean oscillation* ». Comm. Pure and Appl. Math., vol. 14, 1961, p.p. 415-426.

[2] G. STAMPACCHIA — « *The spaces* $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ *and interpolation* ». Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. XIX, 1965, p.p. 443-462.

[3] A. ZYGMUND — « *Trigonometric series* » Cambridge University Press, 1959.

[4] S. SPANNE — « *Sur l'interpolation entre les espaces* $\mathcal{L}_k^{p\Phi}$ ». Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, in questo stesso fascicolo.