ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANTONIO CHIFFI

Correnti irriducibili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 1 (1967), p. 99-106
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_1_99_0>

CORRENTI IRRIDUCIBILI

ANTONIO CHIFFI

Data una definizione di corrente « irriducibile » (def. 1), dimostriamo che ogni corrente k-dimensionale di R^n intera e chiusa è uguale alla somma di un numero finito o una infinità numerabile di correnti irriducibili, la cui somma delle masse è uguale alla massa della corrente considerata.

Seguiamo, per le *forme differenziali* $\omega \in E^k(R^n)$ di grado k e di classe ∞ su R^n e per le *correnti* $T \in E_k(R^n)$ sulle forme di $E^k(R^n)$, le definizioni e il simbolismo di: Federer e Fleming: *Normal and integral currents,* Annals of Mathematics, vol. 72 (1960), pp. 458-520; indicheremo in particolare con $I_k(R^n)$ la famiglia delle correnti intere di $E_k(R^n)$.

Supporremo che sia $0 < k < n$. Diremo che la corrente $T \in E_k(R^n)$ è *chiusa* se $\partial T = 0$. Indicheremo con $Z_k(R^n)$ la famiglia delle correnti di $I_k(R^n)$ che sono chiuse.

DEFINIZIONE 1. Diremo che la corrente $T \in E_k(R^n)$ è *riducibile* se appartiene a $Z_k(R^n)$ e se esistono le correnti non nulle T_1 e T_2 di $Z_k(R^n)$ tali che:

$$T = T_1 + T_2 \qquad M(T) = M(T_1) + M(T_2).$$

Diremo che la corrente $T \in E_k(R^n)$ è *irriducibile* se appartiene a $Z_k(R^n)$ e non è riducibile.

DEFINIZIONE 2. Sia $T \in Z_k(R^n)$; indichiamo con $\mathcal{G}(T)$ la famiglia delle successioni $(T_i)_{i \in N}$, di correnti $T_i \in Z_k(R^n)$, tali che:

$$T = \sum_i T_i \tag{1}$$

$$M(T) = \sum_i M(T_i) \tag{2}$$

$$M(T_i) \geq M(T_{i+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Pervenuto alla Redazione il 10 Giugno 1966.

Detto p un intero, indichiamo con $\mathcal{G}_p(T)$ la sottofamiglia di $\mathcal{G}(T)$ delle successioni (T_i) tali che al più p delle correnti T_i siano diverse da zero; cioè:

$$T_{p+h} = 0 \qquad h = 1, 2, \ldots$$

Si ha:

$$\mathcal{G}_p(T) \subset \mathcal{G}_{p+1}(T). \tag{4}$$

DEFINIZIONE 3. Sia $T \in Z_k(R^n)$; consideriamo il funzionale definito su $\mathcal{G}(T)$:

$$\mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) = \sum_i [M(T_i)]^{(k+1)/k} \qquad ((T_i)_{i \in N} \in \mathcal{G}(T)).$$

Poniamo:

$$\gamma = \inf\{\mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) : (T_i) \in \mathcal{G}(T)\}$$

$$\gamma_p = \inf\{\mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) : (T_i) \in \mathcal{G}_p(T)\}.$$

I risultati del presente lavoro si possono riassumere nel seguente:

TEOREMA 4. *Sia* $T \in Z_k(R^n)$; *il funzionale* $\mathcal{F}_T$ *ha minimo in* $\mathcal{G}(T)$; *se* $(T_i) \in \mathcal{G}(T)$ *è una successione tale che:*

$$\mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) = \gamma$$

le correnti della successione (T_i) *sono tutte irriducibili.*

La dimostrazione del precedente teorema seguirà dalle seguenti proposizioni 5-10.

LEMMA 5. *Sia* $T \in Z_k(R^n)$; *ha luogo l'uguaglianza*:

$$\inf\{\mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) : (T_i) \in \mathcal{G}(T)\} = \lim_{p \to \infty} \inf\{\mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) : (T_i) \in \mathcal{G}_p(T)\}. \tag{5}$$

La successione (γ_p) della definizione 3 ha limite per la (4) e si ha subito:

$$\gamma \leq \lim_p \gamma_p. \tag{6}$$

Per verificare la disuguaglianza opposta alla (6), consideriamo una successione $(T_i) \in \mathcal{G}(T)$ e, fissato $\sigma > 0$, determiniamo un intero $p > 0$ tale che si abbia:

$$\sum_{i \geq p} M(T_i) < \sigma^{k/(k+1)}$$

Si ha, tenendo presente la definizione di γ_p:

$$\sum_i [M(T_i)]^{(k+1)/k} > \sum_{i=1}^{p-1} [M(T_i)]^{(k+1)/k} + [\sum_{i \geq p} M(T_i)]^{(k+1)/k} - \sigma \geq \gamma_p - \sigma \geq \lim_p \gamma_p - \sigma$$

e per l'arbitrarietà di σ segue:

(7) $$\gamma \geq \lim_p \gamma_p .$$

Le (6) e (7) dimostrano la (5).

TEOREMA 6. *Sia* $T \in Z_k(R^n)$; *il funzionale* $\mathcal{F}_T$ *ristretto a* $\mathcal{G}_p(T)$ *ha minimo per ogni* p.

Le masse delle correnti di ogni successione $(T_i) \in \mathcal{G}_p(T)$ sono equilimitate da $M(T)$ e i loro supporti sono contenuti nel supporto di T. Se infatti $(T_i) \in \mathcal{G}_p(T)$, si ha:

$$M(T_i) = \| T_i \| (\text{supporto } T) + \| T_i \| (R^n - \text{supporto } T) \quad (i = 1, \dots, p)$$

e, sommando rispetto a i:

$$M(T) \geq M(T) + \sum_i \| T_i \| (R^n - \text{supporto } T)$$

e da questa segue subito:

$$\| T_i \| (R^n - \text{supporto } T) = 0 \qquad (i = 1, \dots, p).$$

Sia $((T_{mi})_{i \in N})_{m \in N}$ una successione di elementi di $\mathcal{G}_p(T)$ tali che:

(8) $$\lim_{m \to \infty} \mathcal{F}_T((T_{mi})_{i \in N}) = \gamma_p .$$

Si tenga presente che ogni elemento di $\mathcal{G}_p(T)$ è formato da al più p correnti non nulle, per cui possiamo scrivere:

$$(T_{mi})_{i \in N} = (T_{m1}, \dots, T_{mp})$$

Esiste, per noti teoremi di compattezza (1), una successione monotona di indici $(m(j))_{j \in N}$ tale che le successioni $(T_{m(j), i})_{j \in N}$ convergano debolmente alle correnti

$$S_i \in Z_k(R^n) \qquad (i = 1, \dots, p)$$

ed inoltre esistano i limiti:

$$\lim_{j \to \infty} M(T_{m(j), i}) \qquad (i = 1, \dots, p)$$

(1) Cfr. FEDERER and FLEMING: *Normal and integral currents.* Annals of Mathematics, vol. 72 (1960) pp. 458-520; teor. 8.13 a pag. 499.

Si verifica subito l'uguaglianza:

$$T = \sum_{i=1}^{p} S_i . \tag{9}$$

Per la subadditività di M si ha:

$$M(T) \leq \sum_i M(S_i) \tag{10}$$

mentre per la semicontinuità di M si deduce

$$M(T) = \sum_{i=1}^{p} M(T_{m(j),\, i}) \geq \sum_i \lim_{j \to \infty} M(T_{m(j),\, i}) \geq \sum_i M(S_i). \tag{11}$$

Dalle (10) e (11) segue:

$$M(T) = \sum_i M(S_i) \tag{12}$$

e, sempre dalla (11), si deduce:

$$M(S_i) = \lim_{j \to \infty} M(T_{m(j),\, i}) \qquad (i = 1, \dots, p). \tag{13}$$

Per la (13) si ha:

$$M(S_i) \geq M(S_{i+1}) \qquad (i = 1, \dots, p-1). \tag{14}$$

Le (9), (12) e (14) dimostrano che $(S_i)_{i \in N} \in \mathcal{G}_p(T)$; dalla (13) e dalla (8) si deduce:

$$\gamma_p = \lim_{m \to \infty} \mathcal{F}_T((T_{m,\, i})_{i \in N}) \geq \sum_i \lim_{j \to \infty} [M(T_{m(j),\, i})]^{k+1)/k} = \mathcal{F}_T((S_i)_{i \in N}) \tag{15}$$

e la (15) dimostra che (S_i) rende minimo $\mathcal{F}_T$ ristretto a $\mathcal{G}_p(T)$.

LEMMA 7. *Sia* $T \in Z_k(R^n)$ *e* $(T_i)_{i \in N}$ *una successione di* $\mathcal{G}(T)$; *per ogni intero* $h > 0$ *è verificata la disuguaglianza*:

$$\sum_{i > h} [M(T_i)]^{(k+1)/k} < k\, [M(T)]^{(k+1)/k}\, h^{-1/k}. \tag{16}$$

Per la definizione 2 e, in particolare, per la (3), si ha:

$$M(T_i) \leq M(T)/i$$

e da questa disuguaglianza, con facili calcoli, segue :

$$\sum_{i>h}[M(T_i)]^{(k+1)/k} \leq [M(T)]^{(k+1)/k} \sum_{i>h} i^{-(k+1)/k} < k\,[M(T)]^{(k+1)/k}\, h^{-1/k}.$$

TEOREMA 8. *Sia* $T \in Z_k(R^n)$; *il funzionale* $\mathcal{F}_T$ *definito su* $\mathcal{G}(T)$ *ha minimo.*

Per il teorema 6 per ogni intero $p > 0$ esiste una successione di elementi di $\mathcal{G}_p(T): (S_{pi})_{i \in N}$ (dove al più p delle correnti $S_{p1}, S_{p2}, \ldots$ sono non nulle) tali che :

$$\mathcal{F}_T((S_{pi})_{i \in N}) = \gamma_p \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

La successione di correnti di indice p : $(S_{p1})_{p \in N}$ è formata da correnti di massa equilimitata e aventi il supporto contenuto nel supporto di T; esiste allora [2] una successione di indici $(p(1, m))_{m \in N}$ tale che la successione $(S_{p\,(1, m),\,1})_{m \in N}$ converga debolmente ad una corrente $S_1 \in Z_k(R^n)$. Per la stessa ragione dalla successione di indici $(p(1, m))$ si potrà estrarre una sottosuccessione $(p(2, m))$ tale che la successione di correnti $(S_{p(2, m),\,2})_{m \in N}$ converga ad una corrente $S_2 \in Z_k(R^n)$ e così via.

Consideriamo la successione diagonale $(p(m, m))$: esiste una successione (S_i) di correnti $S_i \in Z_k(R^n)$ tale che si abbia, nel senso della convergenza debole :

$$\lim_{m \to \infty} S_{p(m, m),\, i} = S_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Inoltre si può fare in modo che le successioni : $(p(1, m))_{m \in N}$, $(p(2, m))_{m \in N}, \ldots$ siano tali che esistano i limiti :

$$\lim_{m \to \infty} M(S_{p(i, m),\, i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

e perciò anche il limite :

$$\lim_{m \to \infty} M(S_{p(m, m,\, i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Fissato l'intero $h > 0$ ed un insieme Γ compatto e convesso contenente il supporto di T, per ogni coppia di indici m e i, con $h < i \leq p(m, m)$ esiste [3] una corrente $V_{m,i} \in I_{k+1}(R^n)$ tale che :

$$\text{supporto } V_{m,i} \subset \Gamma \qquad (h < i \leq p(m, m) \tag{19}$$

---

(2) Loc. cit. (1).

(3) Loc. cit. (1), teor. 6.1 a pag. 482 e 6.2 a pag. 485.

$$\partial\, V_{m,i} = S_{p(m,m),i} \tag{20}$$

$$M(V_{m,i}) \leq C\,[M(S_{p(m,m),i})]^{(k+1)/k} \tag{21}$$

con C costante dipendente solo dalle dimensioni n e k.

Per $i > p(m, m)$ le correnti $S_{p(m,m),i}$ sono nulle e perciò possiamo porre:

$$V_{m,i} = 0 \qquad (i > p(m, m)).$$

Fissato $h > 0$, per ogni m poniamo:

$$U_{m,h} = \sum_{i>h} V_{m,i}\,. \tag{22}$$

Dalla (21), (20) e dal lemma 7 si deduce:

$$M(U_{m,h}) \leq \sum_{i>h} M(V_{m,i}) \leq Ck\,[M(T)]^{(k+1)/k}\, h^{-1/k}. \tag{23}$$

Per ogni fissato h le correnti della successione di indice m: $(U_{m,h})_{m \in N}$ hanno masse equilimitate e, per la (19), il supporto contenuto in uno stesso insieme compatto; esiste allora [4] per ogni h una successione di indici $(m_r(h))_{r \in N}$ ed una corrente U_h tale che si abbia, tenuta anche presente la (23):

$$\lim_r U_{m_r(h),h} = U_h \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

$$M(U_h) \leq Ck\,[M(T)]^{(k+1)/k}\, h^{-1/k}\,. \tag{24}$$

Per la (24) la successione $(\partial\, U_h)$ tende debolmente a zero; ma per le uguaglianze, valevoli per le (22) e (20):

$$\partial\, U_{m,h} = \sum_{i>h} S_{p(m,m),i} = T - \sum_{i \leq h} S_{p(m,m),i} \tag{25}$$

e per l'altra, conseguenza delle (25) e (18):

$$\partial\, U_h = T - \sum_{i \leq h} S_i$$

segue:

$$T = \sum_i S_i\,. \tag{26}$$

---

[4] Loc. cit. [1].

Fissato l'indice h, dalle ovvie relazioni:

$$M(T) = \sum_i M(S_{p(m,\,m),\,i}) \geq \sum_{i \leq h} M(S_{p(m,\,m),\,i})$$

e dalle disuguaglianze, valide per la (18):

$$M(T) \geq \lim_{m \to \infty} \sum_{i \leq h} M(S_{p(m,\,m),\,i}) \geq \sum_{i \leq h} M(S_i) \tag{27}$$

segue:

$$M(T) \geq \sum_i M(S_i). \tag{28}$$

Dalla (28) e dalla ovvia disuguaglianza opposta segue:

$$M(T) = \sum_i M(S_i). \tag{29}$$

Dalle (27) e (29) si ottiene:

$$M(S_i) = \lim_{m \to \infty} M(S_{p(m,\,m),\,i})$$

$$M(S_{i+}\ ) \leq M(S_i). \tag{30}$$

Le (26), (29) e (30) dimostrano che (S_i) appartiene a $\mathcal{G}(T)$.

Tenendo presente il lemma 5 e la (17) si verificano subito le relazioni:

$$\gamma = \lim_p \gamma_p = \lim_{m \to \infty} \sum_i [M(S_{p(m,\,m),\,i})]^{(k+1)/k} \geq$$

$$\geq \lim_{m \to \infty} \sum_{i \leq h} [M(S_{p(m,\,m),\,i})]^{(k+1)/k} \geq \sum_{i \leq h} [M(S_i)]^{(k+1)/k}$$

e da questa segue subito:

$$\gamma \geq \sum_i [M(S_i)]^{(k+1)/k} = \mathcal{F}_T((S_i)_{i \in N}). \tag{31}$$

La (31) e la ovvia disuguaglianza opposta dimostrano il presente teorema.

OSSERVAZIONE 9. Se a e b sono due numeri non negativi ed è $\alpha > 1$, si ha:

$$(a + b)^\alpha \geq a^\alpha + b^\alpha \tag{32}$$

e nella (32) vale il segno di uguaglianza se e solo se uno al più dei numeri a e b è diverso da zero.

TEOREMA 10. *Sia* $T \in Z_k(R^n)$, $(S_i) \in \mathcal{G}(T)$ *e si abbia*:

$$\mathcal{F}_T((S_i)_{i \in N}) = \gamma \tag{33}$$

allora le correnti della successione (S_i) *sono irriducibili.*

Sia, per assurdo, S_r una corrente riducibile della successione (S_i); esistono due correnti non nulle S_{r1} e S_{r2} di $Z_k(R^n)$ tali che: $S_r = S_{r1} + S_{r2}$, $M(S_r) = M(S_{r1}) + M(S_{r2})$ e si avrebbe, per l'osservazione 9:

$$[M(S_r)]^{(k+1)/k} > [M(S_{r1})]^{(k+1)/k} + [M(S_{r2})]^{(k+1)/k}.$$

Esisterebbe allora una successione $(T_i) \in \mathcal{G}(T)$ tale che $\mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) < \mathcal{F}_T((S_i)_{i \in N})$ e ciò è assurdo per la (33).

I teoremi 8 e 10 equivalgono al teorema 4; da questo segue subito:

TEOREMA 11. *Sia* $T \in Z_k(R^n)$; *esiste una successione* (S_i), *eventualmente finita, di correnti* $S_i \in Z_k(R^n)$, *irriducibili, tali che:*

$$T = \sum_i S_i$$

$$M(T) = \sum_i M(S_i).$$

Università di Padova