ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

M. AREZZO
S. GRECO

Sul gruppo delle classi di ideali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 4 (1967), p. 459-483
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_459_0>

SUL GRUPPO DELLE CLASSI DI IDEALI

di M. Arezzo - S. Greco (*)

In questo lavoro ci proponiamo di stabilire alcune proprietà del gruppo delle classi di ideali di un anello, e di applicarle successivamente allo studio della fattorialità di certi anelli.

È noto infatti che un dominio d'integrità noetheriano è fattoriale se e solo se le seguenti proprietà sono verificate.

(a) Ogni ideale frazionario invertibile di A è libero (ossia il gruppo delle classi di ideali $\mathbf{P}(A)$ è nullo).

(b) A è localmente fattoriale.

Lo scopo principale dei primi due numeri del presente lavoro è lo studio di certe condizioni sufficienti per la validità della suddetta proprietà (a)

Nel n^0 1 si osserva anzitutto che, se $\mathfrak{m} \subset \operatorname{rad} A$, l'omomorfismo $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$ è iniettivo (prop. 1.4), ma non necessariamente surgettivo (oss. 1.6) e si studiano i primi legami che intercorrono tra i gruppi $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(\widehat{A})$, $\mathbf{P}(A[X])$, $\mathbf{P}(A[[X]])$.

Si esamina quindi il problema della surgettività di $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$. A tal fine si estende un procedimento usato da H. Bass consistente nel rilevamento degli endomorfismi indempotenti, e si dimostra che l'omomorfismo $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$ è bigettivo se la coppia $(A, \mathfrak{m})$ verifica la condizione di Hensel (teor. 1.18) tale risultato vale anche per anelli non noetheriani, mentre nei numeri successivi tutti gli anelli saranno supposti noetheriani.

Nel n^0 2 si studia l'omomorfismo $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$ (teor. 2.1) e si dimostra (in parziale analogia con un teorema classico di Nagata sugli anelli fattoriali), che tale omomorfismo è iniettivo se S è generato da elementi primi regolari (teor. 2.3). Da tale risultato seguono delle condizioni suf-

Pervenuto alla Redazione il 1 Dic. 1966 ed in forma definitiva il 15 Giu. 1967.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n^0 44 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

ficienti per l'iniettività degli omomorfismi $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$ (cor. 2.4), $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(\widehat{A})$ (cor. 2.5) e per la surgettività di $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A[X])$, le quali sono anche necessarie se A è localmente fattoriale (cor. 2.9 e 2.17). Vengono anche dati dei criteri per le bigettività di $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$ quando A ha dimensione 1 (teor. 2.12) e quando A è localmente fattoriale (prop. 2.15).

Nel n^0 3, in vista delle prossime applicazioni alla fattorialità, si dà qualche condizione sufficiente affinchè un anello sia localmente fattoriale. Dapprima si dimostra che se B è localmente fattoriale e fedelmente piatto su A, anche A è localmente fattoriale (teor. 3.5).

Ne seguono una generalizzazione di un noto teorema di Mori sulla fattorialità degli anelli di Zariski (teor. 3.10), e una condizione per la fattorialità locale di un $\mathfrak{m}$-completamento, quando $\mathfrak{m}$ è un prodotto di ideali (teor. 3.13).

Il n^0 4 contiene un criterio di annullamento per il gruppo delle classi (teor. 4.1) il quale, combinato con alcuni teoremi precedenti, permette di ottenere due risultati sulla fattorialità di certi completamenti (teor. 4.6 e 4.8); da questi ultimi si deducono poi dei criteri abbastanza generali per la fattorialità degli anelli di serie formali ristrette (cor. 4.7 e 4. 9). Seguono due casi particolari notevoli, (teor. 4.11 e 4.12), l'ultimo dei quali asserisce che ogni anello di serie ristrette su un dominio principale è regolare e fattoriale.

Nel n^0 5, infine, vengono dati alcuni esempi elementari di natura geometrica atti ad illustrare le possibili applicazioni dei risultati precedenti [1].

1. In questo numero dopo aver richiamato alcune nozioni elementari sul gruppo $\mathbf{P}(A)$ di un anello A, si dimostra che se la coppia $(A, \mathfrak{m})$ verifica la condizione di Hensel, i gruppi $\mathbf{P}(A)$ e $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$ sono canonicamente isomorfi (teor. 1.18).

Tutti gli anelli considerati hanno identità e salvo esplicito avviso contrario, sono commutativi. Un sottoanello dell'anello A avrà sempre la stessa identità di A. Gli omomorfismi di anelli trasformano l'identità nell'identità, ed i moduli sono unitari.

Se A è un anello, indichiamo con $\mathbf{P}(A)$ il gruppo delle classi di A-moduli proiettivi di rango 1. Tale gruppo è costituito dalle classi di equivalenza della totalità degli A-moduli proiettivi di rango 1 modulo la relazione di equivalenza data dell'isomorfismo. La legge di composizione, no-

---

(1) Tutto il lavoro è stato svolto in collaborazione. Volendo tuttavia distinguere i contributi originali dei due autori, si può dire che essenzialmente, i primi due numeri sono dovuti a S. Greco, mentre i numeri 3 e 4 sono dovuti a M. Arezzo.

tata additivamente, è definita dalla formula $\bar{E} + \bar{F} = \overline{E \otimes F}$, dove con $\bar{E}$ si indica la classe degli A-moduli proiettivi di rango 1 isomorfi ad E (cfr. [2], pag. 144 e seguenti). Si osservi inoltre che $\bar{E} = 0$ se e solo se $E \simeq A$.

Se $f: A \longrightarrow B$ è un omomorfismo di anelli, f induce un omomorfismo $\tilde{f}: \mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(B)$ definito da $\tilde{f}(\bar{E}) = \overline{E \otimes B}$. Se f è l'identità anche $\tilde{f}$ è l'identità; e se $g: B \longrightarrow C$ è un secondo omomorfismo di anelli si ha $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. Vale quindi la

PROPOSIZIONE 1.1. *Sia $f: A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli e supponiamo che esista un omomorfismo $g: B \longrightarrow A$ tale che $g \circ f$ sia l'identità. Allora $\tilde{f}$ è iniettivo e $\tilde{g}$ è surgettivo.*

COROLLARIO 1.2. *Siano A un anello e X un insieme finito di indeterminate su A. Se $B = A[X]$, oppure $B = A[[X]]$, l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(B)$ (indotto dall'immersione), è iniettivo.*

OSSERVAZIONE 1.3. L'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A[X])$, in generale non è surgettivo (2). Invece l'omomorfismo $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A[[X]])$ è un isomorfismo (cfr. il successivo cor. 1.5).

PROPOSIZIONE 1.4. *Siano A un anello ed $\mathfrak{m}$ un ideale di A contenuto nel radicale (di Jacobson) di A. Allora l'omomorfismo canonico $\varphi: \mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$ è iniettivo.*

PROVA. Sia $\bar{E} \in \operatorname{Ker} \varphi$, essendo $\bar{E}$ la classe di un A-modulo E proiettivo di rango 1. Allora si ha $0 = \varphi(\bar{E}) = \overline{E \otimes A/\mathfrak{m}}$ e pertanto $E \otimes A/\mathfrak{m}$ è libero. Ma E è un A-modulo proiettivo finitamente generato e quindi di presentazione finita ([2], pag. 36, lemma 8). Ne segue che E è libero ([2], pag. 106, prop. 5), e quindi $\bar{E} = 0$. Quindi φ è iniettivo come volevasi.

COROLLARIO 1.5. *Siano A un anello e X un insieme finito di indeterminate su A. Allora l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A[[X]])$ è un isomorfismo.*

PROVA. Poichè $(X) \subset \operatorname{rad} A[[X]]$ la tesi segue facilmente dalle proposizioni 1.4, e dal corollario 1.2.

---

(2) Vedasi: P. SALMON: *Projective non free ideals in polynomial extensions of a local ring.* Journal of Algebra (in preparazione).

Osservazione 1.6. L'omomorfismo $\varphi : \mathbf{P}(A) \longrightarrow (A/\mathfrak{m})$ con $\mathfrak{m} \subset \mathrm{rad}\, A$ non è surgettivo in generale. Sia infatti $A = \mathbf{R}[X, Y]_S$ dove X, Y sono indeterminate ed $S = 1 + (X^2 + Y^2 - 1)$.

Sia poi $\mathfrak{m} = (X^2 + Y^2 - 1)\, A$. Allora $\mathfrak{m} \subset \mathrm{rad}\, A$. Inoltre A è fattoriale e quindi si ha $\mathbf{P}(A) = 0$ mentre si ha $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}) \neq 0$, essendo $A/\mathfrak{m}$ un dominio di Dedekind non principale. Quindi φ non è surgettivo.

Proposizione 1.7. *Siano A un anello $\mathfrak{m}$ un ideale di A contenuto nel radicale di A, $\widehat{A}$ il completato di A per la $\mathfrak{m}$-topologia. Allora l'omomorfismo canonico $\psi : \mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(\widehat{A})$ è iniettivo.*

Prova. Dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \widehat{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\mathfrak{m} & \xrightarrow{\sim} & A/\mathfrak{m}\widehat{A} \end{array}$$

(dove tutti gli omomorfismi sono canonici), si deduce il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(A) & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{P}(\widehat{A}) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}(A/\mathfrak{m}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{P}(\widehat{A}/\mathfrak{m}\widehat{A}) \end{array}$$

Poichè $\mathfrak{m} \subset \mathrm{rad}\, A$, φ è iniettivo (prop. 1.4), e pertanto, essendo il diagramma commutativo, anche ψ è iniettivo, come volevasi.

Osservazione 1.8. L'omomorfismo ψ della proposizione precedente non è surgettivo in generale. Infatti si ha $\mathbf{P}(\widehat{A}) \simeq \mathbf{P}(\widehat{A}/\mathfrak{m}\widehat{A})$, come sarà mostrato nel successivo teorema 1.18, e quindi se A ed $\mathfrak{m}$ sono come nell'osservazione 1.6, l'omomomorfismo $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(\widehat{A})$ non è surgettivo.

Ci proponiamo ora di dimostrare che se A è un anello completo e separato, l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$ è bigettivo. Tale risultato discende dalla successiva proposizione 1.15, la quale esprime, in forma lievemente generalizzata, un risultato dovuto a H. Bass (cfr. [1], lemma 18.1), e riguardante il rilevamento dei moduli proiettivi. La dimostrazione che qui diamo è sostanzialmente fedele a quella di Bass, e fa uso della prossima proposizione 1.14, relativa al rilevamento degli indempotenti.

DEFINIZIONE 1.9. *Siano B un anello (anche non commutativo), è $\mathfrak{m}$ un ideale bilatero di B. Diremo che la coppia $(B, \mathfrak{m})$ verifica la condizione (H) se esiste in B una topologia rispetto alla quale*

(a) *B è un anello topologico, separato e completo,*

(*b*) *Esiste una base locale di 0 formata da sottogruppi del gruppo additivo di B,*

(c) *$\mathfrak{m}$ è chiuso,*

(d) *$\lim x^n = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{m}$.*

Si verifica facilmente che, se B verifica le condizioni (a) e (b), ogni serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $\lim a_n = 0$ è convergente. Ne segue che se $(B, \mathfrak{m})$ verifica la condizione (H) si ha $\mathfrak{m} \subset \text{rad } A$.

ESEMPIO 1.10. Se B è un anello ed $\mathfrak{m}$ è un ideale di B costituito da elementi nilpotenti, la coppia $(B, \mathfrak{m})$ verifica la condizione (H). Basta infatti considerare in B la topologia discreta, e le condizioni della definizione 1.9 sono verificate.

ESEMPIO 1.11. Siano A un anello, (anche non commutativo), $\mathfrak{m}$ un ideale di A, B l'anello delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A. Supponiamo che A verifichi la condizione (H), e che inoltre ogni ideale bilatero, finitamente generato, contenuto in $\mathfrak{m}$ sia topologicamente nilpotente. Allora la coppia $(B, \mathfrak{m} B)$ verifica la condizione (H), come segue facilmente considerando in $B = A^{n^2}$ la topologia prodotto.

ESEMPIO 1.12. Siano A un anello commutativo ed $\mathfrak{m}$ un ideale di A tali che la coppia $(A, \mathfrak{m})$ verifichi la condizione di Hensel (cioè $(A, \mathfrak{m})$ verifica la condizione (H), ed inoltre esiste una base locale in 0 formata da ideali di A; (cfr. [3], pag. 89). Se B è l'anello delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A, la coppia $(B, \mathfrak{m} B)$ verifica la condizione (H). Infatti si vede facilmente che in tali ipotesi ogni ideale finitamente generato contenuto in $\mathfrak{m}$ è topologicamente nilpotente, e la conclusione segue dall'esempio precedente.

LEMMA 1.13. *Sia B un anello (anche non commutativo) e sia $c \in B$ tale che $c^2 - c \in \text{rad } B$. Allora $2c - 1$ è invertibile, ed il suo inverso commuta con c.*

PROVA. Si ha, posto $s = c^2 - c$, $(2c - 1)^2 = 4s + 1$, e poichè $s \in \operatorname{rad} B$, $4s + 1$ è invertibile. Ne segue che $2c - 1$ è invertibile. Inoltre $2c - 1$ commuta con s, e quindi anche il suo inverso commuta con s, come volevasi.

PROPOSIZIONE 1.14. *Siano B un anello (anche non commutativo) ed $\mathfrak{m}$ un ideale bilatero di B. Se la coppia $(B, \mathfrak{m})$ verifica la condizione (H) (def, 1.9), ogni idempotente di $B/\mathfrak{m}$ è immagine di un idempotente di B.*

Questa proposizione estende un risultato classico (cfr. [9], pag. 54) e la prova che qui diamo è un adattamento di quella data in [9]).

PROVA. Sia $u \in B/\mathfrak{m}$ un idempotente, e sia $c \in B$ tale che $\bar{c} = u$. Ci proponiamo di mostrare che esiste $z \in \mathfrak{m}$ tale che $e = c - (2c - 1)z$ sia idempotente. Supponiamo che z commuti con c, affichè e sia idempotente deve essere:

$$0 = e^2 - e = (2c - 1)^2 z^2 - (2c - 1)^2 z + s'$$

dove si è posto $s' = c^2 - c$, e quindi si ha l'equazione in z:

$$z^2 - z + s = 0 \tag{1}$$

dove $s = s'(2c - 1)^{-2}$ (lemma 1. 13). Sviluppando in serie la soluzione della (1) si trova:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \qquad a_n \in \mathfrak{m},\ n = 1,2, \ldots$$

e poichè la coppia $(B, \mathfrak{m} B)$ verifica la condizione (H), si vede facilmente che z esiste ed appartiene ad $\mathfrak{m}$. Inoltre dal lemma 1.13 segue subito che $zc = cz$, e una semplice verifica mostra che $e = c - (2c - 1)z$ è un idempotente che rileva u.

PROPOSIZIONE 1.15. *Siano A un anello (anche non commutativo) ed $\mathfrak{m}$ un ideale bilatero di A. Supponiamo che la coppia $(A, \mathfrak{m})$ verifichi la condizione (H) e che ogni ideale finitamente generato contenuto in $\mathfrak{m}$ sia topologicamente nilpotente. Allora per ogni $(A/\mathfrak{m})$-modulo proiettivo finitamente generato $\bar{P}$, esiste un A-modulo proiettivo finitamente generato P tale che $\bar{P} = P/\mathfrak{m}P$. (La tesi vale in particolare se $(A, \mathfrak{m})$ verifica la condizione di Hensel (cfr. es. 1.12)).*

PROVA. Supponiamo che $\bar{P}$ sia generato da n elementi. Allora esiste un endomorfismo idempotente $u : (A/\mathfrak{m})^n \to (A/\mathfrak{m})^n$ tale che $\bar{P} = \operatorname{Im}(u)$. Se

B è l'anello delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A, $B/\mathfrak{m} B$ si identifica con l'anello delle matrici $n \times n$ su $A/\mathfrak{m}$, e quindi u si può considerare come un elemento idempotente di $B/\mathfrak{m} B$. Ma la coppia $(B, \mathfrak{m} B)$ verifica la condizione (H) (es. 1.11), e quindi esiste un idempotente $e \in B$ che rileva u (prop. 1.14). Una semplice verifica mostra allora che $P = \mathrm{Im}\,(e)$ è un A-modulo proiettivo finitamente generato tale $\bar{P} = P/\mathfrak{m} P$.

LEMMA 1.16. *Siano A un anello (commutativo) ed $\mathfrak{m}$ un ideale di A contenuto nel radicale di A. Sia P un A-modulo proiettivo finitamente generato. Se l'$(A/\mathfrak{m})$-modulo proiettivo $P/\mathfrak{m} P$ ha rango n, il rango di P è definito, ed è uguale ad n.*

PROVA. Sia $\mathfrak{n}$ un ideale massimale di A. Poichè $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$ si ha:

$$(P \otimes_A A_\mathfrak{n}) \otimes_{A_\mathfrak{n}} (A_\mathfrak{n}/\mathfrak{m} A_\mathfrak{n}) = P \otimes_A (A_\mathfrak{n}/\mathfrak{m} A_\mathfrak{n}) =$$

$$= (P \otimes_A (A/\mathfrak{m})_{\mathfrak{n}/\mathfrak{m}} = (P/\mathfrak{m} P) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (A/\mathfrak{m})_{\mathfrak{n}/\mathfrak{m}} .$$

Poichè $P/\mathfrak{m} P$ è proiettivo di rango n, l'$A/\mathfrak{m})_{\mathfrak{n}/\mathfrak{m}}$-modulo $(P/\mathfrak{m} P) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (A/\mathfrak{m})_{\mathfrak{n}/\mathfrak{m}}$ è libero di rango n, e quindi si vede subito che l'$A_\mathfrak{n}$-modulo libero $P \otimes A_\mathfrak{n}$ deve avere rango n. Ciò prova che P ha rango n, come volevasi.

Dal lemma precedente e dalla proposizione 1.15 segue subito il

COROLLARIO 1.17. *Siano A un anello ed $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Se la coppia $(A, \mathfrak{m})$ verifica la condizione di Hensel* (es. 1.12), *per ogni $A/\mathfrak{m}$-modulo proiettivo $\bar{P}$ di rango n esiste un A-modulo proiettivo P di rango n tale che $\bar{P} = P/\mathfrak{m} P$.*

Dal corollario precedente e dalla proposizione 1.4 segue il

TEOREMA 1.18. *Siano A un anello ed $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Se la coppia $(A, \mathfrak{m})$ verifica la condizione di Hensel, l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$ è bigettivo. (Ciò vale, in particolare, se A è completo e separato per la topologia $\mathfrak{m}$-adica).*

COROLLARIO 1.19. *Siano A un anello noetheriano $\mathfrak{m}$-completo e separato e supponiamo che A ed $A/\mathfrak{m}$ siano localmente fattoriali. Allora A è fattoriale se e solo se $A/\mathfrak{m}$ è fattoriale.*

PROVA. Se A è fattoriale, si ha $\mathbf{P}(A) = 0$ e quindi $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}) = 0$. (teorema 1.18). Inoltre $\mathrm{spec}\,(A)$ è connesso, e quindi $\mathrm{spec}\,(A/\mathfrak{m})$ è connesso ([7], cor. 3.3). Ne segue che $A/\mathfrak{m}$ è fattoriale ([8], prop. 3.8). Il viceversa è già stato dimostrato in [10] (prop. 4).

Corollario 1.20. *Siano A un anello noetheriano regolare $\mathfrak{m}$ un ideale di A, $\widehat{A}$ il completato separato di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Allora $\widehat{A}$ è fattoriale se e solo se* spec $(A/\mathfrak{m})$ *è connesso e* $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}) = 0$.

Prova. Se $\widehat{A}$ è fattoriale si ha, per il teorema 1.18: $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}) = \mathbf{P}(\widehat{A}/\mathfrak{m}\widehat{A}) = \mathbf{P}(\widehat{A}) = 0$. Inoltre spec$(A/\mathfrak{m})$ è connesso ([7], cor. 3.3). Il viceversa è stato dimostrato in [7] (teor. 4.3).

2. In questo numero vengono studiate alcune proprietà dell'omomorfismo canonico $\varphi: \mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$, dove A è un anello noetheriano, ed S una parte moltiplicativa di A. Il teorema 2.1 permette di determinare il nucleo di φ. e generalizza un risultato ottenuto da L. Claborn per i domini di Dedekind (cfr. [5], teor. 1.4); dal teorema 2.1 si deduce che φ è iniettivo se S è generato da elementi primi e non divisori di zero (teor. 2.3). Quest'ultimo risultato permette di dare una condizione sufficiente per l'iniettività degli omomorfismi canonici $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$ (cor. 2.4) e $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(\widehat{A})$ (cor. 2.5). Seguono infine un inverso parziale del teorema 2.3, e alcune ulteriori considerazioni sull'omomorfismo φ nel caso di anelli di dimensione 1, e nel caso di anelli localmente fattoriali.

Avvertiamo che in questo numero e nei successivi tutti gli anelli saranno supposti noetheriani. In questa ipotesi il gruppo $\mathbf{P}(A)$ è isomorfo al gruppo delle classi di ideali invertibili di A (cfr. [2], pag. 152 rem. 2) e si verifica facilmente che ogni suo elemento è del tipo $\overline{\mathfrak{a}}$ dove $\mathfrak{a}$ è un ideale intero invertibile di A.

Sia A un anello, e sia S una parte moltiplicativa di A. Diremo che S è *regolare* se S non contiene divisori di zero; e diremo che S è *generata da elementi primi* (brevemente g. e. p.) se ogni elemento di S è prodotto di elementi primi.

Siano $\mathbf{F}$ l'insieme degli ideali propri invertibili (interi) di A, ed $\mathbf{M}$ l'insieme degli elementi massimali di $\mathbf{F}$.

Sia ora S una parte moltiplicativa dell'anello A, e indichiamo con $\mathbf{N}$ l'insieme degli elementi di $\mathbf{M}$ che intersecano A, e con $\overline{\mathbf{M}}$ l'immagine di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{P}(A)$. Si ha il seguente

Teorema 2.1. *Sia φ: $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$ l'omomorfismo canonico. Se S è regolare si ha:*

(a) $$Ker\, \varphi = \{\pm \overline{\mathfrak{a}} \in \mathbf{P}(A) \mid \mathfrak{a} \in \mathbf{F}, \mathfrak{a} \cap S \neq \Phi\}.$$

(b) *Ker φ è generato da* $\overline{\mathbf{N}}$.

PROVA. Se $\mathfrak{a} \in \mathbf{F}$ e se $\mathfrak{a} \cap S \neq \Phi$ si ha $\mathfrak{a} \otimes A_S = \mathfrak{a} A_S = A_S$ e quindi $\varphi(\bar{\mathfrak{a}}) = 0$. Viceversa sia $\mathfrak{a} \in \mathbf{F}$ tale che $\varphi(\bar{\mathfrak{a}}) = 0$. Allora $\mathfrak{a} A_S$ è un A_S-modulo libero di rango 1, e quindi esiste $x \in \mathfrak{a}$ tale che $\mathfrak{a} A_S = (x/1)$ e $x/1$ non è divisore dello zero. Poichè S è regolare, A si immerge canonicamente in A_S e quindi anche x non è divisore dello zero. Ne segue che l'ideale (x) è invertibile. Poniamo $\mathfrak{b} = (x)\,\mathfrak{a}^{-1}$. Allora $\mathfrak{b}$ è un ideale frazionario invertibile, e $\bar{\mathfrak{b}} = -\bar{\mathfrak{a}}$; e poichè $x \in \mathfrak{a}$ si ha $(x)\,\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = A$, da cui segue che $\mathfrak{b}$ è un ideale intero. Inoltre si ha

$$\mathfrak{b} A_S = [(x)\, A_S]\,[\mathfrak{a}^{-1} A_S] = (\mathfrak{a} A_S)(\mathfrak{a}^{-1} A_S) = A_S$$

onde $\mathfrak{b} \cap S \neq \Phi$, e poichè $\bar{\mathfrak{a}} = -\bar{\mathfrak{b}}$ la (a) è provata.

Se $\bar{\mathfrak{b}} \neq 0$, si ha $\mathfrak{b} \neq A$, ossia $\mathfrak{b} \in \mathbf{F}$. Esistono quindi $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \mathbf{M}$ tali che $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n$ ([8], teor. 2.1). Poichè $\mathfrak{b} \cap S \neq \Phi$ si ha $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{N}$ $(i = 1, .., n)$. Ne segue $\bar{\mathfrak{a}} = -\bar{\mathfrak{b}} = -\sum_{1}^{n}{}_i\, \bar{\mathfrak{p}}_i$ con $\bar{\mathfrak{p}}_i \in \bar{\mathrm{N}}$, e ciò prova (b).

Dal teorema 2.1 si ha subito il

COROLLARIO 2.2. *Nelle ipotesi del teorema precedente le seguenti condizioni sono equivalenti :*

(a) *φ è iniettivo*

(b) *ogni ideale invertibile che interseca S è libero*

(c) *ogni ideale proprio invertibile che interseca S è contenuto in un ideale proprio principale.*

TEOREMA 2.3. *Siano A un anello ed S una parte moltiplicativa di A, regolare e* g. e. p.. *Allora l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A_S)$ è iniettivo.*

PROVA. Basta mostrare che è verificata la condizione (c) del corollario 2.2. Sia allora $\mathfrak{a} \in \mathbf{F}$ tale che $\mathfrak{a} \cap S \neq \Phi$. Poichè $\mathfrak{a}$ è un ideale proprio invertibile, esiste un ideale primo $\mathfrak{p}$ di altezza 1 contenente $\mathfrak{a}$ ([8], prop. 1.2), e poichè $\mathfrak{p} \cap S \neq \Phi$, ed S è g. e. p. e regolare, $\mathfrak{p}$ contiene un elemento p primo non divisore di zero. Si ha allora $\mathfrak{p} = (p)$, e quindi $\mathfrak{p}$ è libero. La condizione (c) del corollario 2.2 è quindi verificata, e la prova è completa.

OSSERVAZIONE. Il risultato precedente è solo parzialmente analogo ad un classico teorema di Nagata (cfr. Nagata, *A remark on Unique factorization domains.* J. Math. Soc. Japan, 9 (1957), 143-155) che può enunciarsi nel modo seguente: « I gruppi delle classi di divisori $\mathbf{C}(A)$ e $\mathbf{C}(A_S)$ sono isomorfi se S è generato da elementi primi » (cfr. [4], pag. 22, prop. 17). Nel nostro caso l'omomorfiamo iniettivo $\mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A_S)$ non è sempre surgettivo, come ci è stato mostrato personalmente con un esempio da M. Nagata.

Corollario 2.4. *Siano A un anello ed $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Se l'insieme moltiplicativo $S = 1 + \mathfrak{m}$ è regolare e* g. e. p. *l'omomorfismo canonico $\varphi : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$ è iniettivo.*

Prova. Si consideri il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}(A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varrho"'] & \mathbf{P}(A_S) \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathbf{P}(A/\mathfrak{m}) \arrow[r, "\sim", "\tau"'] & \mathbf{P}(A_S/\mathfrak{m}A_S) \end{tikzcd}$$

dove tutti gli omomorfismi sono canonici. Poichè $\mathfrak{m} A_S \subset \operatorname{rad} A_S$, σ è iniettivo (prop. 1.4); inoltre φ è iniettivo per l'ipotesi e il teorema 2.3. Ne segue che ϱ è iniettivo, come volevasi.

Corollario 2.5. *Siano A un anello, $\mathfrak{m}$ un ideale di A* ed *$\hat{A}$ il separato completato di A per la $\mathfrak{m}$-topologia. Se l'insieme moltiplicativo $S = 1 + \mathfrak{m}$ è regolare e* g. e. p., *l'omomorfismo canonico $\varrho : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(\hat{A})$ è iniettivo.*

Prova. Poichè $(\widehat{A, \mathfrak{m}}) = (\widehat{A_S, \mathfrak{m} A_S})$ e $\mathfrak{m} A_S \subset \operatorname{rad} A_S$, la tesi segue subito dal teorema 2.3 e dalla proposizione 1.7.

Corollario 2.6. *Siano A un anello e X una indeterminata su A. Se $1 + (X)$ è* g. e. p., *l'omomorfismo canonico $\varphi : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A[X])$ è un'isomorfismo.*

Prova. È ovvio che $1 + (X)$ è regolare, e quindi l'omomorfismo $\psi : \mathbf{P}(A[X] \to \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A[X]/(X))$ è iniettivo per il corollario 2.4. Si verifica facilmente che ψ è un inverso sinistro di φ, e pertanto è surgettiva. Ne segue che ψ è un isomorfismo, e che φ è il suo inverso, e ciò prova la tesi.

Corollario 2.7. *Sia A un anello integro con $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Allora gli elementi irriducibili non primi di A generano l'ideale unità.*

Prova. Basta provare che per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A esiste un elemento irriducibile non primo e non contenuto in $\mathfrak{m}$. Ma essendo $A/\mathfrak{m}$ un corpo si ha $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}) = 0$ e quindi l'omomorfismo $\mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$ non è iniettivo. Ne segue che $1 + \mathfrak{m}$ non è generato da elementi primo, e quindi esiste $x \in 1 + \mathfrak{m}$, irriducibile non primo. Ciò prova la tesi.

Il viceversa del teorema 2.3 è falso in generale, come si vede facilmente considerando un opportuno anello di frazioni di un anello locale non fattoriale. Vale però la seguente

PROPOSIZIONE 2.8. *Siano A un anello ed S un insieme moltiplicativo regolare. Supponiamo inoltre che per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ che interseca S, l'anello locale $A_{\mathfrak{m}}$ sia fattoriale. Allora l'omomorfismo canonico $\varphi : \mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$ è iniettivo se e solo se S è* g. e. p.

PROVA. Supponiamo che φ sia iniettivo, e sia x un divisore irriducibile di un elemento di S. Vogliamo provare che x è primo. Sia allora $\mathfrak{p}$ un ideale primo di altezza 1 contenente x; per provare la tesi basta mostrare che $\mathfrak{p}$ è libero. Sia allora $\mathfrak{m}$ un ideale massimale contenente $\mathfrak{p}$; si ha allora $\mathfrak{m} \cap S \neq \Phi$, e quindi $A_{\mathfrak{m}}$ è fattoriale per ipotesi. Ne segue che $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{m}}$ è libero ([4], pag. 32, teor. 1, condizione e)). Ciò prova che $\mathfrak{p}$ è localmente libero e quindi invertibile ([2], pag. 148, teor. 4). Poichè $\mathfrak{p} \cap S \neq \Phi$, e φ è iniettivo, $\mathfrak{p}$ è libero (cor. 2.2), e ciò completa la dimostrazione.

COROLLARIO 2.9. *Siano A un anello, $\mathfrak{m}$ un ideale di A e supponiamo che $A_{\mathfrak{n}}$ sia fattoriale per ogni ideale massimale $\mathfrak{n}$ contenente $\mathfrak{m}$. Allora l'omomorfismo canonico $\varphi : \mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A/\mathfrak{m})$ è iniettivo se e solo se $1 + \mathfrak{m}$ è* g. e. p.

PROVA. Se φ è iniettivo, l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$ dove $S = 1 + \mathfrak{m}$, è iniettivo. Allora S è g. e. p. per la proposizione 2.8. Il viceversa è dato dal corollario 2.4.

Ci proponiamo ora di dimostrare che se A è un anello di dimensione 1 l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$ è surgettivo. Ciò segue subito dal seguente

LEMMA 2.10. *Siano A un anello di dimensione 1, S una parte moltiplicativa regolare di A e $\mathfrak{b}$ un ideale invertibile di A_S. Allora esiste un ideale invertibile $\mathfrak{a}$ di A tale che $\mathfrak{a} A_S = \mathfrak{b}$.*

PROVA. Sia $\mathfrak{a} = \{x \in A \mid x/s \in \mathfrak{b}$ per qualche $s \in S\}$; allora $\mathfrak{a} A_S = \mathfrak{b}$. Proveremo ora che $\mathfrak{a}$ è invertibile. Poichè A si immerge in A_S e $\mathfrak{b}$ è non degenere, anche $\mathfrak{a}$ è non degenere. Basta quindi provare che $\mathfrak{a}$ è localmente libero ([2], pag. 148, teor. 4). Siano $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ i primi associati ad $\mathfrak{a}$; poichè A ha dimensione 1, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ sono gli unici ideali massimali che contengono $\mathfrak{a}$. Inoltre, per la definizione stessa di $\mathfrak{a}$, si ha $\mathfrak{p}_i \cap S = \Phi$ da cui $A_{\mathfrak{p}_i} = (A_S)_{\mathfrak{p}_i A_S}$ per ogni $i = 1, \ldots, k$. Ne segue

$$\mathfrak{a} A_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{a} (A_S)_{\mathfrak{p}_i A_S} = \mathfrak{b} (A_S)_{\mathfrak{p}_i A_S}$$

ed essendo $\mathfrak{b}$ invertibile, $\mathfrak{a} A_{\mathfrak{p}_i}$ è libero ([2], pag. 148, teor. 4). Di qui la tesi.

Corollario 2.11. *Siano A un anello di dimensione* 1 *ed S una parte moltiplicativa regolare di A. Allora l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$ è surgettivo.*

Teorema 2.12. *Siano A un anello di dimensione* 1 *ed S una parte moltiplicativa regolare di A. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*:

(a) *L'omomorfismo canonico $\varphi: \mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$ è un isomorfismo*

(b) *Ogni ideale primario invertibile che interseca S è libero.*

Prova. Per il corollario 2.2 da (a) segue (b). Inoltre, poichè $\dim A = 1$, ogni ideale proprio invertibile è contenuto in un idele primario invertibile ([7], teor. 5.1), e quindi, se vale (b), φ è iniettivo (cor. 2.2). Ma φ è surgettivo per il corollario 2.11, e quindi (b) $\Longrightarrow$ (a). Ciò prova il teorema.

Ci proponiamo ora di studiare gli omomorfismi canonici $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$ e $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A[X])$ quando A è un anello localmente fattoriale. Ricordiamo il seguente noto risultato (cfr. [4], pag. 34, prop. 1):

Proposizione 2.13. *Sia A un anello integro. Allora A è localmente fattoriale se e solo se si ha $\mathbf{P}(A) = \mathbf{C}(A)$.* (*Con $\mathbf{C}(A)$ si è indicato il monoide delle classi di divisori di A, cfr.* [4], *pag.* 1-5).

Corollario 2.14. *Siano A un anello integro localmente fattoriale e S una parte moltiplicativa di A. Allora l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$ è surgettivo.*

Prova. Poichè l'omomorfismo canonico $\mathbf{C}(A) \longrightarrow \mathbf{C}(A_S)$ è surgettivo ([4], pag. 22, prop. 17), e A_S è localmente fattoriale, la tesi segue dalla proposizione 2.13.

Proposizione 2.15. *Siano A un anello integro localmente fattoriale, ed S una parte moltiplicativa di A. Allora l'omomorfismo canonico $\varphi: \mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A_S)$ è bigettivo se e solo se S è* g.e.p..

Prova. Per la proposizione 2.8, φ è iniettivo se e solo se S è g.e.p.. L'asserto segue allora dal corollario 2.14.

Proposizione 2.16. *Siano A un anello localmente fattoriale, e X un insieme finito di indeterminate su A. Allora $A[X]$ è localmente fattoriale, e l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A[X])$ è bigettivo.*

Prova. Si ha $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, con $A_1, \ldots, A_n$ integri e localmente fattoriali. Inoltre per ogni i si ha $\mathbf{C}(A_i) = \mathbf{C}(A_i[X])$ ([4], pag. 22, prop. 18),

$\mathbf{P}(A_i) \subset \mathbf{P}(A_i[X])$ (cor. 1.2), e $\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{C}(A_i)$ (prop. 2.13). Ne segue $\mathbf{P}(A_i[X]) = \mathbf{C}(A_i[X])$, e quindi $A_i[X]$ è localmente fattoriale (prop. 2.13). E poichè si ha $A[X] = A_1[X] \oplus \ldots \oplus A_n[X]$, anche $A[X]$ è localmente fattoriale. Si ha inoltre $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{P}(A_n)$, e $\mathbf{P}(A[X]) = \mathbf{P}(A_1[X]) \oplus \ldots \oplus \mathbf{P}(A_n[X])$ ([8], prop. 4.1), e poichè si ha $\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{C}(A_i) = \mathbf{C}(A_i[X]) = \mathbf{P}(A_i[X])$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A[X])$ è bigettivo, e ciò completa la dimostrazione.

COROLLARIO 2.17. *Siano A un anello localmente fattoriale ed X un insieme finito di indeterminate su A. Allora l'insieme moltiplicativo $S = 1 + (X)$ è regolare e* g. e. p..

PROVA. E' evidente che S è regolare. Inoltre per il corollario 2.6 l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A[X]) \longrightarrow \mathbf{P}(A[X]/(X)) = \mathbf{P}(A)$ è iniettivo. Allora anche l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A[X]) \longrightarrow \mathbf{P}(A[X]_S)$ è iniettivo, come si verifica facilmente. D'altra parte $A[X]$ è localmente fattoriale (prop. 2.16), e pertanto S è g. e. p. (prop. 2.8), come volevasi.

Le proposizioni 2.15 e 2.16 sono state ottenute sfruttando risultati noti per il gruppo delle classi di divisori, e tenendo conto che, nelle ipotesi assunte, tale gruppo è isomorfo al gruppo delle classi di ideali.

Si può adesso seguire il procedimento inverso, sfruttando alcuni risultati relativi al gruppo delle classi di ideali per dedurne proprietà del gruppo delle classi di divisori. A titolo di esempio ritroviamo il seguente risultato di Claborn ([6], cor. 4):

PROPOSIZIONE 2.18. *Siano A un anello integro regolare e X un insieme finito di indeterminate su A. Allora l'omomorfismo canonico $\mathbf{C}(A) \longrightarrow \mathbf{C}(A[[X]])$ è bigettivo.*

PROVA. Per il corollario 1.5 si ha $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A[[X]])$. Inoltre $A[[X]]$ è regolare e quindi localmente fattoriale. La tesi segue allora dalla proposizione 2.13.

3. In questo numero si dimostra dapprima che se B è un sopraanello di A, fedelmente piatto su A e localmente fattoriale, anche A è localmente fattoriale (teor. 3.5). Da tale teorema discendono una generalizzazione del teorema di Mori sulla fattorialità degli anelli di Zariski, (teor. 3.10), ed una condizione sufficiente per la locale fattorialità di certi completamenti $\mathfrak{m}$-adici, espressa dal teorema 3.13.

Ricordiamo che un A-modulo M si dice *piatto* se per ogni successione esatta di A-moduli

(1) $$P \longrightarrow Q \longrightarrow R$$

anche la successione esatta

$$P \otimes M \to Q \otimes M \to R \otimes M \tag{2}$$

è esatta. M si dice *fedelmente piatto* se l'esattezza della successione (1) è equivalente all'esattezza della successione (1).

Se $\varphi : A \to B$ è un omomorfismo di anelli, diremo che B è piatto (fedelmente piatto) su A, se B è un A-modulo piatto (fedelmente piatto), con la struttura indotta da φ. Se B è fedelmente piatto su A, φ è iniettivo, e quindi A si identifica ad un sottoanello di B ([2], pag. 51, prop. 9).

Lemma 3.1. *Siano A un anello e B un sopraanello di A fedelmente piatto su A. Se B è fattoriale e $\mathbf{P}(A) = 0$ anche A è fattoriale.*

Prova. Basta dimostrare che l'ideale $(a) \cap (b)$ è principale per ogni coppia di elementi non nulli a, b di A. Poichè B è piatto su A si ha

$$[(a) \cap (b)] \otimes B \simeq aB \cap bB$$

([2], pag. 32, prop. 6). Ma B è fattoriale, e quindi $aB \cap bB$ è principale. Ne segue che $[(a) \cap (b)] \otimes B$ è un B-modulo proiettivo di rango 1, e pertanto, essendo B fedelmente piatto su A, si ha che $(a) \cap (b)$ è un A-modulo proiettivo ([2], pag. 53, prop. 1.2) che ha evidentemente rango 1. E poiché $\mathbf{P}(A) = 0$ si ha la tesi.

Osservazione 3.2. Il lemma precedente è falso, in generale, senza l'ipotesi $\mathbf{P}(A) = 0$. Siano infatti $A = \mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ e $B = \mathbf{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$. Evidentemente B è un A-modulo libero e quindi è un sopraanello di A fedelmente piatto su A. E' noto inoltre che B è fattoriale, mentre A non lo è. Il lemma precedente è falso anche, in generale, se B è soltanto piatto su A. Se infatti A è un anello locale integro non fattoriale, e B è l'anello delle frazioni di A, si ha $\mathbf{P}(A) = 0$ ([2], pag. 107, cor. 2) e B è A-piatto ([2], pag. 88, teor. 1).

La prossima proposizione 3.4 mostra che la locale fattorialità di una A-algebra piatta su A implica la fattorialità di certi localizzati di A. Per dimostrare questo risultato ci occorre il seguente

Lemma 3.3. *Sia $\varphi : A \to B$ un omomorfismo di anelli tale che B sia un A-modulo piatto. Sia $\mathfrak{n}$ un ideale massimale di A, e poniamo $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{n})$. Allora $B_{\mathfrak{n}}$ è un $A_{\mathfrak{m}}$-modulo fedelmente piatto.*

PROVA. E' noto che $B_{\mathfrak{n}}$ è un $A_{\mathfrak{n}}$-modulo piatto ([2], pag. 116, prop. 15) e basta quindi provare che $(\mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}}) B_{\mathfrak{n}} \neq B_{\mathfrak{n}}$ ([2], pag. 44, prop. 1), ossia che se $x \in \mathfrak{m}$, $\varphi(x)/1$ non è unità in $B_{\mathfrak{n}}$. Ma se $x \in \mathfrak{m}$ si ha $\varphi(x) \in \mathfrak{n}$, da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 3.4. *Sia $\varphi : A \to B$ un omomorfismo di anelli tale che B sia piatto su A. Sia poi $\mathfrak{n}$ un ideale massimale di B e poniamo $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{n})$. Allora se $B_{\mathfrak{n}}$ è fattoriale, anche $A_{\mathfrak{m}}$ è fattoriale.*

PROVA. Poichè $B_{\mathfrak{n}}$ è fedelmente piatto su $A_{\mathfrak{m}}$ (lemma 3.3), $A_{\mathfrak{m}}$ si identifica ad un sottoanello di $B_{\mathfrak{n}}$. Inoltre si ha $P(A_{\mathfrak{m}}) = 0$ essendo $A_{\mathfrak{m}}$ locale. La tesi segue allora dal lemma 3.1.

TEOREMA 3.5. *Siano A un anello e B un sopraanello di A fedelmente piatto su A. Allora, se B è localmente fattoriale, anche A è localmente fattoriale.*

PROVA. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A. Poichè B è fedelmente piatto su A, esiste un ideale massimale $\mathfrak{n}$ di B tale che $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ ([2], pag. 51, prop. 9). Ora $B_{\mathfrak{n}}$ è fattoriale per ipotesi, e quindi $A_{\mathfrak{m}}$ è fattoriale per la proposizione 3.4. Ciò prova il teorema.

COROLLARIO 3.6. *Siano A un anello e X un insieme finito di indeterminate su A. Allora $A[X]$ è localmente fattoriale se e solo se A è localmente fattoriale.*

PROVA. $A[X]$ è un A-modulo libero, e quindi è fedelmente piatto. Ne segue che se $A[X]$ è localmente fattoriale anche A è tale per il teorema 3.5. Il viceversa segue dalla proposizione 2.16.

COROLLARIO 3.7. *Siano A un anello semilocale con* spec(A) *connesso, e X un insieme finito di indeterminate su A. Allora $A[X]$ è fattoriale se e solo se è localmente fattoriale.*

PROVA. Se $A[X]$ è localmente fattoriale, anche A è tale (cor. 3.6). Inoltre A è semilocale, e quindi si ha $\mathbf{P}(A) = 0$ ([2], pag. 143, prop. 5). Ne segue che A è fattoriale ([8], prop. 3.8), e quindi $A[X]$ è fattoriale. Il viceversa è immediato.

COROLLARIO 3.8. *Siano A un anello e X un insieme finito di indeterminate su A. Se $A[[X]]$ è localmente fattoriale, anche A è localmente fattoriale.*

Prova. Per il teorema 3.5 basta provare che $A[[X]]$ è fedelmente piatto su A. Ora $A[[X]]$ è piatto su A ([3], pag 70, cor. 3), e se $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di A si ha evidentemente $\mathfrak{m} A[[X]] \neq A[[X]]$. Ciò prova che $A[[X]]$ è fedelmente piatto, ([2], pag. 44, prop. 1), come volevasi.

Corollario 3.9. *Siano A un anello, $\mathfrak{m}$ un ideale di A, e $B = (A, \mathfrak{m})\{X\}$ l'anello delle serie formali ristrette in un numero finito di indeterminate, rispetto alla topologia* $\mathfrak{m}$-adica (*cfr. n.* 4). *Se B è localmente fattoriale, anche A è localmente fattoriale.*

Prova. Poichè B è il completato di $A[X]$ rispetto alla topologia $\mathfrak{m}(X)$-adica ([10], teor. 2) si ha che B è un $A[X]$-modulo piatto ([3], pag 68, teor. 3). Ma $A[X]$ è un A-modulo libero e quindi piatto. Ne segue che B è un A-modulo piatto ([2], pag. 35, cor. 3). Inoltre se $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di A si ha subito $\mathfrak{m} B \neq B$, e quindi B è fedelmente piatto su A ([2], pag. 44, prop. 1). La tesi segue allora dal teorema 3.5.

Il prossimo teorema è una generalizzazione di un teorema classico di Mori sulla fattorialità degli anelli di Zariski (cfr. [4], pag. 37, prop. 4).

Teorema 3.10. *Siano A e B due anelli di Zariski tali che $A \subset B$, $\widehat{A} = \widehat{B}$. Se* spec$(A)$ *è connesso e B è somma diretta di anelli fattoriali, A è fattoriale.*

Prova. Poichè A e B sono anelli di Zariski, $\widehat{A}$ è fedelmente piatto su A e su B ([3], pag. 72, prop. 9), e quindi B è fedelmente piatto su A ([2], pag. 49, rem. 2[0]). Inoltre B è localmente fattoriale, e quindi A è localmente fattoriale (teor. 3.5). Essendo poi spec(A) connesso, basta provare ancora che $\mathbf{P}(A) = 0$ ([8], prop. 3.8). Si consideri allora il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}(A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varrho"'] & \mathbf{P}(B) \arrow[d, "\psi"] \\ & \mathbf{P}(\widehat{A}) \end{tikzcd}$$

dove gli omomorfismi sono indotti dalle immersioni. Per la proposizione 1.7, ϱ è iniettivo, e quindi anche φ è iniettivo. D'altra parte, essendo B una somma diretta di anelli fattoriali si ha $\mathbf{P}(B) = 0$ ([8], teor. 4.2), e quindi $\mathbf{P}(A) = 0$, come volevasi.

TEOREMA 3.11. *Siano A un anello, $\mathfrak{m}$ un ideale di A e $\widehat{A}$ il completato separato di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Se $\widehat{A}$ è localmente fattoriale, $A_{\mathfrak{n}}$ è fattoriale per ogni ideale massimale $\mathfrak{n}$ contenente $\mathfrak{m}$.*

PROVA. Sia $\varphi : A \longrightarrow \widehat{A}$ l'omomorfismo canonico. Se $\mathfrak{n}$ è un ideale massimale di A contenente $\mathfrak{m}$, esiste un ideale massimale $\mathfrak{n}'$ di $\widehat{A}$ tale che $\mathfrak{n} = \varphi^{-1}(\mathfrak{n}')$ ([3], pag. 70, prop. 8). Inoltre $\widehat{A}$ è piatto su A ([3], pag. 68, teor. 3), e quindi la tesi discende dalla proposizione 3.4.

Diamo ora una condizione sufficiente per la locale fattorialità di un completamento $\mathfrak{m}$-adico, nel caso in cui $\mathfrak{m}$ è un prodotto di ideali. Tale risultato segue dal teorema precedente e dal lemma seguente:

LEMMA 3.12. *Siano A un anello, e $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ due ideali di A con $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}_2$. Poniamo $A_i = (\widehat{A, \mathfrak{m}_i})$ $(i = 1, 2)$ e $A_{12} = (\widehat{A_1\, \mathfrak{m}_2} A_1)$. Allora $A_2 = A_{12}$.*

PROVA. Si hanno le uguaglianze:

$$A/\mathfrak{m}_1^n = A_1/(\mathfrak{m}_1 A_1)^n$$

$$\mathfrak{m}_2^n A_1 = (\mathfrak{m}_2 A_1)^n$$

per $n = 1, 2, \dots$ ([3], pag. 69, cor. 1). È noto inoltre che se B è un anello ed $\mathfrak{n}$ è un ideale di B si ha: $(\widehat{B, \mathfrak{n}}) = \varprojlim B/\mathfrak{n}^n$ ([3], pag. 48). Ne segue:

$$\begin{aligned} A_2 &= \varprojlim A/\mathfrak{m}_2^n = \varprojlim (A/\mathfrak{m}_1^n)/(\mathfrak{m}_2^n/\mathfrak{m}_1^n) \\ &= \varprojlim [A_1/(\mathfrak{m}_1 A_1)^n] \,/\, [(\mathfrak{m}_2 A_1)^n/(\mathfrak{m}_1 A_1)^n] \\ &= \varprojlim A_1/(\mathfrak{m}_2 A_1)^n = A_{12} \end{aligned}$$

come volevasi.

TEOREMA 3.13. *Siano A un anello, $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ n ideali di A ed $\mathfrak{m} = \prod_i^n \mathfrak{m}_i$. Poniamo $A_i = (\widehat{A, \mathfrak{m}_i})$ $(i = 1, \dots, n)$, e $\widehat{A} = (\widehat{A, \mathfrak{m}})$. Se A_i è localmente fattoriale $(i = 1, \dots, n)$, anche $\widehat{A}$ è localmente fattoriale.*

PROVA. Per il lemma 3.12 si ha $A_i = (\widehat{\widehat{A}, \mathfrak{m}_i \widehat{A}})$ $(i = 1, \dots, n)$ e quindi $\widehat{A}$ è fattoriale per ogni ideale massimale $\mathfrak{n}$ di $\widehat{A}$ contenente $\mathfrak{m}_i \widehat{A}$ per almeno un i (teor. 3.11). Basta allora provare che ogni ideale massimale di $\widehat{A}$ contiene $\mathfrak{m}_i \widehat{A}$ per almeno un i. Si ha ([3], pag. 69. cor. 1)

$$\mathfrak{m}\widehat{A} = \left(\prod_1^n{}_i\, \mathfrak{m}_i\right)\widehat{A} = \prod_1^n{}_i(\mathfrak{m}_i\widehat{A})$$

e, inoltre $\mathfrak{m}\widehat{A} \subset \operatorname{rad}\widehat{A}$. Quindi se $\mathfrak{n}$ è un ideale massimale di $\widehat{A}$ si ha $\prod_1^n{}_i(\mathfrak{m}_i\widehat{A}) \subset \mathfrak{n}$, da cui $\mathfrak{m}_i\widehat{A} \subset \mathfrak{n}$ per almeno un i. Ciò prova la tesi.

4. In questo numero viene dato un criterio di annullamento per il gruppo delle classi di certi anelli quozienti (teor. 4.1), dal quale si deducono poi dei teoremi di fattorialità per certi completamenti (teor. 4.6 o 4.8), che estendono analoghi risultati ottenuti da P. Salmon in [10] per anelli di serie formali ristrette (teor. 6 e 7).

Si dimostra poi che ogni anello di serie formali ristrette su un dominio principale è fattoriale (teor. 4.12), e si conclude con qualche esempio.

Teorema 4.1. *Sia B un anello, e supponiamo che si abbia la decomposizione diretta di gruppi additivi $B = A \oplus \mathfrak{b}$, dove A è un sottoanello e $\mathfrak{b}$ è un ideale di B. Sia poi $\mathfrak{m}$ un ideale di A, e poniamo $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$. Se $1 + \mathfrak{m}$ è regolare e* g. e.p. *(in A), l'omomorfismo canonico* $\mathbf{P}(B/\mathfrak{n}\mathfrak{b}) \longrightarrow \mathbf{P}(B/\mathfrak{n})$ *è iniettivo.*

Prova. Poichè si ha: $B/\mathfrak{n} = (B/\mathfrak{n}\mathfrak{b})/(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}\mathfrak{b})$, basta dimostrare che la parte moltiplicativa $S = 1 + \mathfrak{n}/\mathfrak{n}\mathfrak{b}$ di $B/\mathfrak{n}\mathfrak{b}$ è regolare e generata da elementi primi (cor. 2.4). Osserviamo, innanzi tutto, che $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}\mathfrak{b}$, e quindi ogni elemento di $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}\mathfrak{b}$ è immagine di un elemento di $\mathfrak{m}$. Sia allora $1 + \bar{x} \in S$, con $x \in \mathfrak{m}$, e sia $\bar{y} \in B/\mathfrak{n}\mathfrak{b}$ tale che $(1 + \bar{x})\bar{y} = 0$. Vogliamo provare che $\bar{y} = 0$.

Poniamo $y = a + b$, con $a \in A$, e $b \in \mathfrak{b}$; si ha allora:

$$(1 + x)a + (1 + x)b \in \mathfrak{n}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}. \tag{1}$$

Ma $(1 + x)a \in A$, e $(1 + x) \in \mathfrak{b}$, e quindi si ha $(1 + x)a = 0$, da cui $a = 0$ perchè $1 + x$ è regolare in A. Dalla (1) segue allora $b \in \mathfrak{n}\mathfrak{b}$, e quindi si ha $\bar{y} = \bar{b} = 0$. Ciò prova che S è regolare.

Proviamo ora che S è g. e. p. Sia $1 + \bar{x} \in S$, con $x \in \mathfrak{m}$; per ipotesi $1 + x$ è prodotto di elementi primi di A. Basta quindi provare che se p è un divisore primo di $1 + x$ in A, la sua immagine $\bar{p}$ è elemento primo di $B/\mathfrak{n}\mathfrak{b}$, ossia che $(p, \mathfrak{n}\mathfrak{b})$ è un ideale primo di B. Ma per ogni $b \in \mathfrak{b}$ si ha, essendo $1 + x \in pA$:

$$b(1 + x) \in pB \tag{1}$$

e inoltre $bx \in \mathfrak{n}\mathfrak{b}$, perchè $x \in \mathfrak{m}$. Dalla (1) segue allora: $b \in (p, \mathfrak{n}\mathfrak{b})$. Si ha pertanto $\mathfrak{b} \subset (p, \mathfrak{n}\mathfrak{b})$, da cui $(p, \mathfrak{b}) = (p, \mathfrak{n}\mathfrak{b})$. Ne segue:

$$B/(p, \mathfrak{n}\mathfrak{b}) = (A \oplus \mathfrak{b})/(p, \mathfrak{b}) = A/(p)$$

e poichè p è primo si ha la tesi.

COROLLARIO 4.2. *Siano A un anello, $\mathfrak{m}$ un ideale di A e X un insieme finito di indeterminate su A. Se $1 + \mathfrak{m}$ è regolare e* g. e. p. *l'omomorfismo canonico*

$$\mathbf{P}(A[X]/\mathfrak{m}X) \to P(A/\mathfrak{m}[X])$$

è iniettivo.

COROLLARIO 4.3. *Siano A un anello integro localmente fattoriale. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(*a*) *A è fattoriale.*
(*b*) $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}[X]) = 0 \Longrightarrow \mathbf{P}(A[X]/\mathfrak{m}X) = 0$ *per ogni ideale* $\mathfrak{m}$ di A.
(*c*) $\mathbf{P}(A[X]/\mathfrak{m}X) = 0$ *per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A.*
(*d*) *Esiste un ideale $\mathfrak{m}$ di A tale che* $\mathbf{P}(A[X]/\mathfrak{m}X) = 0$.

PROVA. È ovvio che $(b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d)$; inoltre $(a) \Longrightarrow (b)$ per il corollario 4.2. Resta allora da provare che $(d) \Longrightarrow (a)$. Poichè A è localmente fattoriale, la parte moltiplicativa $1 + (X)$ è g. e. p. (cor. 2.17), e quindi anche $1 + \mathfrak{m}X$ è g. e.p.. Ne segue che l'omomorfismo canonico $\mathbf{P}(A[X]) \to$ $\to \mathbf{P}(A[X]/\mathfrak{m}X)$ è iniettivo (cor. 2.4), e quindi si ha $\mathbf{P}(A[X]) = 0$. Ne segue che $\mathbf{P}(A) = 0$ (cor. 1.2) ed essendo A localmente fattoriale, si ha la (*a*). Ciò completa la dimostrazione.

Diamo ora alcune applicazioni del teorema 4.1 agli anelli di serie formali ristrette.

Siano A un anello, $\mathfrak{m}$ un ideale di A ed X un insieme finito di indeterminate su A. Sia $C = (A, \mathfrak{m})\{X\}$ l'anello delle serie formali ristrette su A, rispetto alla topologia $\mathfrak{m}$-adica, nelle indeterminate X; C è il sottoanello di B costituito dalle serie i cui coefficienti tendono a zero nella topologia $\mathfrak{m}$-adica, e coincide col separato completato di $A[X]$ per la topologia $\mathfrak{m}X$-adica: $C = (A\,\widehat{[X], \mathfrak{m}}\,X)$ ([10], cor. alla prop. 1.). Inoltre si ha $C/\mathfrak{m}C = A/\mathfrak{m}[X]$ ([10], lemma 2).

COROLLARIO 4.4. *Se $1 + \mathfrak{m}$ è regolare e* g. e. p., *l'omomorfismo canonico* $\mathbf{P}(C) \to \mathbf{P}(A/\mathfrak{m}[X])$ *è iniettivo*

PROVA. Poichè si ha $C = (A\,\widehat{[X], \mathfrak{m}}\,X)$ il teorema 1.18 mostra che $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A[X]/\mathfrak{m}X)$. La tesi segue allora dal corollario 4.2.

Corollario 4.5. *Sia* $\widehat{C} = (\widehat{A}, \mathfrak{m}\widehat{A})\{X\}$ *dove* $\widehat{A}$ *è il separato completato di* A *per la* $\mathfrak{m}$*-topologia. Se* $1 + \mathfrak{m}$ *è regolare e* g.e.p., *l'omomorfismo canonico* $\mathbf{P}(C) \rightarrow \mathbf{P}(\widehat{C})$ *è iniettivo.*

Prova. Si ha $\widehat{C} = (\widehat{C, \mathfrak{m}C})$ e quindi $\mathbf{P}(\widehat{C}) = \mathbf{P}(C/\mathfrak{m}C)$ (teor. 1.18). Ma si ha $C/\mathfrak{m}C = A/\mathfrak{m}[X]$ ([10], lemma 2), e la tesi segue dal corollario 4.4.

Il seguente teorema 4.6 generalizza il teorema 6 di [10] (cfr. il successivo corollario 4.7).

Teorema 4.6. *Siano* B *un anello, e supponiamo che si abbia la decomposizione diretta di gruppi additivi* $B = A \oplus \mathfrak{b}$, *dove* A *è un sottoanello di* B, *e* $\mathfrak{b}$ *un suo ideale. Sia* $\mathfrak{m}$ *un ideale di* A *e poniamo* $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$. *Supponiamo verificate le seguenti ipotesi*:

(*a*) $1 + \mathfrak{m}$ *è regolare e* g. e. p.,

(*b*) $(\widehat{B, \mathfrak{b}})$ *è localmente fattoriale,*

(*c*) $(\widehat{B, \mathfrak{n}})$ *è somma diretta di anelli fattoriali.*

Allora $C = (\widehat{B, \mathfrak{n}\mathfrak{b}})$ *è somma diretta di anelli fattoriali.* (*In particolare, se* C *è integro,* C *è fattoriale*).

Prova. Basta provare che C è locamente fattoriale e che si ha $\mathbf{P}(C) = 0$ ([8], teor. 4.2). La prima asserzione segue subito da (*b*) e (*c*) e dal teorema 3.13. Inoltre per la (*c*) si ha $\mathbf{P}(\widehat{B, \mathfrak{n}}) = 0$ ([8], teor. 4.2), e pertanto $\mathbf{P}(B/\mathfrak{n}) = 0$ (teor. 1.18). Allora per la (*a*) si ha $\mathbf{P}(B/\mathfrak{n}\mathfrak{b}) = 0$ (teor. 4.1), e quindi $\mathbf{P}(C) = 0$ (teor. 1.18). Ciò completa la dimostrazione.

Corollario 4.7. *Siano* A *un anello fattoriale,* $\mathfrak{m}$ *un ideale di* A, $\widehat{A}$ *l'*$\mathfrak{m}$*-completamento di* A, *e* X *un insieme finito di indeterminate. Se* $A[[X]]$ *è localmente fattoriale e* $(\widehat{A}, \mathfrak{m}\widehat{A})\{X\}$ *è somma diretta di anelli fattoriali, l'anello* $(A, \mathfrak{m})\{X\}$ *è fattoriale.*

Prova. Si ha $(A, \mathfrak{m})\{X\} = (\widehat{A[X], (X)})$ ([10], cor. alla prop. 1) e inoltre si verifica facilmente che vale l'uguaglianza $(\widehat{A}, \mathfrak{m}\widehat{A})\{X\} = (\widehat{A[X], \mathfrak{m}A[X]})$. Poichè $(A, \mathfrak{m})\{X\}$ è ovviamente integro, la tesi segue dal teorema 4.6, ponendo $B = A[X]$ e $\mathfrak{m} = (X)$.

Osservazione. Nel corollario precedente l'ipotesi « A è integro e $1 + \mathfrak{m}$ è g. e. p. » è solo apparentemente meno restrittiva dell'ipotesi « A fattoriale » data nell'enunciato. Infatti essendo $A[[X]]$ localmente fattoriale, anche A è tale (cor. 3.8); inoltre, essendo $\mathbf{P}[(\widehat{A}, \mathfrak{m}\widehat{A})\{X\}] = \mathbf{P}(\widehat{C}) = 0$, si ha $\mathbf{P}(\widehat{A}) = 0$ (prop. 1.1), e quindi, se $1 + \mathfrak{m}$ è g. e. p., si ha anche $\mathbf{P}(A) = 0$ (cor. 2.5). Ne segue che A è fattoriale, come nell'enunciato del corollario 4.7.

Il seguente teorema 4.8 generalizza il teorema 4.5 di [7] (cfr. il successivo corollario 4.9).

TEOREMA 4.8. *Sia B un anello regolare, e supponiamo che si abbia la decomposizione diretta di gruppi additivi $B = A \oplus \mathfrak{b}$, dove A è un sottoanello di B e $\mathfrak{b}$ è un suo ideale. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A e poniamo $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$. Se $1 + \mathfrak{m}$ è regolare e* g. e. p. *(in A) e se $\mathbf{P}(B/\mathfrak{n}) = 0$, l'anello $C = (B, \mathfrak{n}\mathfrak{b})$ è somma diretta di anelli fattoriali (in particolare, se C è integro, C è fattoriale).*

PROVA. Poichè B è regolare, anche C è tale ([10], prop. 3) e quindi localmente fattoriale. Inoltre per il teorema 4.1 si ha $\mathbf{P}(B/\mathfrak{n}\mathfrak{b}) = 0$, da cui segue $\mathbf{P}(C) = 0$. Di qui la tesi (cfr. [8] teor. 4.2).

COROLLARIO 4.9. *Siano A un anello regolare e fattoriale, $\mathfrak{m}$ un ideale di A ed X un insieme finito di indeterminate.*

Allora se $\mathbf{P}((A/\mathfrak{m})[X]) = 0, (A, \mathfrak{m})\{X\}$ è fattoriale.

PROVA. La tesi segue subito dal teorema precedente ponendo $B = A[X]$, e $\mathfrak{b} = (X)$.

Il corollario 4.9 permette di ottenere una classe di anelli di serie ristrette che sono fattoriali, nella quale sono compresi tutti gli anelli di serie ristrette su domini principali. (teor. 4.11 e 4.12).

Premettiamo il seguente

LEMMA 4.10. *Siano A un anello, X un insieme finito di inderminate e $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ n ideali di A tali che*

(a) $A/\mathfrak{m}_i$ è fattoriale $(i = 1, \dots, n)$

(b) $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = A \quad 1 \leq i < j \leq n$.

Allora se $\mathfrak{m} = \bigcap_1^n \mathfrak{m}_i$ si ha $\mathbf{P}((A/\mathfrak{m})[X]) = 0$.

PROVA. Poniamo $\overline{\mathfrak{m}}_i = \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}$ $(i = 1, \dots, n)$. Ovviamente si ha $\overline{\mathfrak{m}}_i + \overline{\mathfrak{m}}_j = A/\mathfrak{m}\,(1 \leq i < j \leq n)$, e $\bigcap_{1}^{n}{}_i\, \overline{\mathfrak{m}}_i = 0$.

Quindi si ha ([11], pag. 178, teor. 12):

$$A/\mathfrak{m} = \bigoplus_{1}^{n}{}_i\, (A/\mathfrak{m})/(\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}) = \bigoplus_{1}^{n}{}_i\, A/\mathfrak{m}_i$$

e, pertanto ([8]; prop. 4.1):

$$\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}[X]) = \bigoplus_{1}^{n}{}_i\, \mathbf{P}(A/\mathfrak{m}_i[X]). \tag{2}$$

Ma $A/\mathfrak{m}_i[X]$ è fattoriale, e pertanto $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}_i[X]) = 0$. La tesi segue allora dalla (2) e dalla proposizione 4.1 di [8].

Teorema 4.11. *Siano A un anello regolare e fattoriale, X un insieme finito di indeterminate su A, $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ n ideali di A, ed $\mathfrak{m} = \bigcap_1^n {}_i \mathfrak{m}_i$. Se $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ verificano le condizioni (a) e (b) del lemma 4.10, l'anello di serie ristrette $(A, \mathfrak{m})\{X\}$ è regolare e fattoriale.*

Prova. Poichè $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}[X]) = 0$ (lemma 4.10), la tesi segue subito dal corollario 4.9.

Teorema 4.12. *Siano A un dominio principale, $\mathfrak{m}$ un ideale di A, e X un insieme finito di indeterminate. Allora l'anello $(A, \mathfrak{m})\{X\}$ è regolare e fattoriale.*

Prova. Se $\mathfrak{m} = 0$ si ha $(A, \mathfrak{m})\{X\} = A[X]$, e quindi la tesi è banale. Se $\mathfrak{m} \neq 0$ si può supporre $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}}$, ossia $\mathfrak{m} = \bigcap_1^n {}_i \mathfrak{p}_i$, dove $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ sono ideali massimali distinti di A. La tesi segue allora dal teorema 4.11.

5. Diamo ora alcuni esempi atti ad illustrare i precedenti risultati.

Esempio 5.1. *Siano B un anello fattoriale, $X_1, \ldots, X_n$ n indeterminate su B, e poniamo $B_k = B[X_1, \ldots, X_n]/(X_1 X_2 \ldots X_k)$. Allora $\mathbf{P}(B_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.*

Prova. Se $k = 1$, B_k è fattoriale, e la tesi è immediata. Procedendo per induzione su k, supponiamo che sia $\mathbf{P}(B_{k-1}) = 0$. Allora $\mathbf{P}(B_k) = 0$ per il corollario 4.2 applicato ad

$$A = B[X_1, \ldots, \widehat{X}_k, \ldots, X_n], \quad \mathfrak{m} = (X_1 X_2 \ldots X_{k-1}), \quad X = X_k.$$

È immediato infatti che $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}[X]) = \mathbf{P}(B_{k-1}) = 0$.

Esempio 5.2. *Siano A un anello regolare e fattoriale e siano $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_s$ $n + s$ indeterminate. Siano $B = A[X_1, \ldots, X_n]$, $\mathfrak{m} = (X_1 X_2 \ldots X_k)$ $(1 \leq k \leq n)$, e $C = (B, \mathfrak{m})\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Allora C è regolare e fattoriale.*

Prova. Per l'esempio precedente si ha $\mathbf{P}(B/\mathfrak{m}[Y_1, \ldots, Y_n]) = 0$. La tesi discende quindi dal corollario 4.9.

ESEMPIO 5.3. *Siano k un corpo, $X_1, \dots, X_n$ n indeterminate su k, $A = k[X_1, \dots, X_n]$ e $\mathfrak{m} = (X_1 X_2 \dots X_n)$ $(1 \leq k \leq n)$. Allora $\hat{A} = \widehat{(A, \mathfrak{m})}$ è regolare e fattoriale.*

PROVA. Per l'esempio 5.2 si ha $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}) = 0$. Inoltre $\operatorname{spec}(A/\mathfrak{m})$ è connesso, come si verifica facilmente. La tesi segue allora dal corollario 1.20.

ESEMPIO 5.4. *Siano A un anello fattoriale, $X_1, \dots, X_n$ n indeterminate, $\mathfrak{a}$ l'ideale di $A[X_1, \dots, X_n]$ generato da tutti i prodotti $X_i X_j$ con $1 \leq i < j < n$, e poniamo $B = A[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$. Allora $\mathbf{P}(B) = 0$.*

PROVA. Si ha $B = A[x_1, \dots, x_{n-1}][X_n]/(x_1, \dots, x_{n-1}) X_n$ dove $x_i x_j = 0$ se $i \neq j$ e inoltre

$$\mathbf{P}\{(A[x_1, \dots, x_{n-1}]/(x_1, \dots, x_{n-1}))[X_n]\} = \mathbf{P}(A[X_n]) = 0$$

essendo A fattoriale. Basta allora provare (cor. 4.2), che la parte moltiplicativa $S = 1 + (x_1, \dots, x_{n-1})$ è regolare e g. e. p. in $A[x_1, \dots, x_{n-1}]$. La prima asserzione si verifica facilmente. Inoltre essendo $x_i x_j = 0$ se $i \neq j$, ogni elemento di S si può scrivere nella forma $1 + \sum_{1}^{n-1}{}_i \, x_i f_i(x_i) = \prod_{1}^{n-1}{}_i (1 + x_i f_i(x_i))$. Basta provare quindi che $1 + x_i f_i(x_i)$ è prodotto di elementi primi $(i = 1, \dots, n-1)$. Poichè A è fattoriale si ha, in $A[X_i]$:

$$1 + X_i f_i(X_i) = \prod_{1}^{r}{}_s \, p_s(X_i)$$

dove i $p_s(X_i)$ sono primi in $A[X_i]$. Proveremo ora che $p_1(x_i), \dots, p_r(x_i)$ sono primi in $A[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Se $i \neq j$ si ha:

$$x_j = x_j(1 + x_i f_i(x_i)) \in (p_s(x_i)) \qquad s = 1, \dots, r.$$

e quindi per ogni $s = 1, \dots, r$ si ha:

$$(p_s(x_i)) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n-1}, p_s(x_i)).$$

Ne segue

$$\begin{aligned} A[x_1, \dots, x_{n-1}]/(p_s(x_i)) &= A[X_1, \dots, X_{n-1}]/(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{n-1}, p_s(X_i)) \\ &= A[X_i]/(p_s(X_i)) \end{aligned}$$

da cui la tesi.

ESEMPIO 5.5. *Siano A un anello regolare e fattoriale, $X_1, \dots, X_n$ n indeterminate su A, $B = A[X_1, \dots, X_n]$ ed $\mathfrak{m}$ l'ideale di B generato dei prodotti $X_i X_j$ con $1 \leq i < j \leq n$.*

Allora $\widehat{B} = \widehat{(B, \mathfrak{m})}$ è fattoriale.

PROVA. Per l'esempio 5.4, si ha $\mathbf{P}(B/\mathfrak{m}) = 0$. Inoltre si verifica facilmente che spec $(B/\mathfrak{m})$ è connesso. La tesi discende allora dal corollario 1.20.

OSSERVAZIONE. L'esempio 5.4 mostra che se K è un corpo e X, Y, Z sono indeterminate, si ha $\mathbf{P}(K[X, Y, Z]/(XY, XZ, YZ)) = 0$. Cioè, l'anello delle coordinate dei tre assi cartesiani ortogonali di K^3 ha il gruppo delle classi nullo (tale risultato vale più in generale, almeno in caratteristica $\neq 2$, per tre rette non complanari e concorrenti in un punto). Si noti invece che il risultato viene meno per tre rette complanari con un punto in comune, come segue subito dall'esempio seguente.

ESEMPIO 5.6. *Siano K un corpo, X, Y due indeterminate su K, e $A = K[X, Y]/(XY(X - Y))$. Allora $\mathbf{P}(A) \neq 0$.*

PROVA. Si ha $A = K[x, y]$ con $xy(x - y) = 0$. Mostriamo che l'ideale $\mathfrak{a} = (x + y^2, x^2)$ è invertibile ma non libero. Si osservi che $\mathfrak{a}$ è un primario dell'ideale massimale $\mathfrak{m} = (x, y, z)$, e pertanto $\mathfrak{m}$ l'unico ideale massimale contenente $\mathfrak{a}$. Inolre si ha $x(x + y^2) - (y + 1)x^2 = 0$. Inoltre $x + y^2$ non è divisore dello zero in A, e pertanto è non degenere. Ne segue che $\mathfrak{a}$ è invertibile ([8], prop. 1.4).

Proviamo ora che $\mathfrak{a}$ non è principale. Se ciò non fosse, esisterebbe $f \in K[X, Y]$ tale che

$$(X + Y^2, X^2) = (XY(X - Y), f). \tag{1}$$

L'ideale di sinistra è nullo, nella chiusura algebrica di K solo per $X = 0$, $Y = 0$, dunque $f(X, 0) = X^m$ e $f(0, Y) = aY^n$, da cui

$$f(X, Y) = X^m + aY^n + XYh, \qquad h \in K[X, Y].$$

Poichè $X + Y^2 \in (XY(X - Y), f)$ segue che $m = 1$, $a = 1$, $n = 2$ e $f = X + Y^2 + XYh$.

Posto $X = Y$, con analogo ragionamento si vede che si può supporre

$$f = X + Y^2 - XY.$$

Se ora fosse $X + Y^2 \in (XY(X - Y), X + Y^2 - XY)$ si avrebbe $XY \in (XY(X - Y), X + Y^2 - XY)$ il che contraddice la (1), perchè $XY \notin (X^2, X + Y^2)$.

Quindi $\mathfrak{a}$ non è libero, e $\mathbf{P}(B) \neq 0$, come volevasi.

ESEMPIO 5.7. *L'anello* $(\widehat{K[X, Y]}, XY(X - Y)) = B$ *è un dominio di integrità regolare ma non fattoriale.*

PROVA. B è regolare, perchè $K[X, Y]$ è tale ([10], prop. 3). Inoltre spec$(K[X, Y]/(XY(X - Y)))$ è connesso e quindi B è integro ([7], cor. 3.5). Infine B non è fattoriale per l'esempio 5.6 e il corollario 1.20.

Istituto di Matematica
Genova

BIBLIOGRAFIA

[1] BASS H.: *K. theory and stable algebra.* I. H. E. S. 1964.
[2] BOURBAKI N.: *Algèbre Commutative,* cap. I, II, Herman, 1961.
[3] BOURBAKI N.: *Algèbre Commutative,* eap. III, IV, Herman 1961.
[4] BOURBAKI N.: *Algèbre Commutative,* cap. VII, Herman, 1965.
[5] CLABORN L.: *Dedekind domains and rings of quotients.* Pacific Math. Journal 15 (1965), 58-64.
[6] CLABORN L. *Note generalizing a result of Samuel.* Pacific Math. Journal 15 (1965), 805-808.
[7] GRECO S.: *Sull'integrità e la fattorialità dei complementi $\mathfrak{m}$-adici.* Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova 36 (1966), 50-65.
[8] GRECO S.: *Sugli ideali frazionari invertibili.* Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, 36 (1966), 315-333.
[9] JACOBSON N.: *Structure of Rings.* Amer. Math. Soc. 1956.
[10] SALMON P.: *Sur les séries formelles restreintes.* Bull. Soc. Math. de France, 92 (1964), 385-410.
[11] ZARISKI O. SAMUEL P.: *Commutative Algebra.* Vol. I, Van Nostrand 1958.