Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Jan Kadlec
Jindřich Nečas

Sulla regolarita delle soluzioni di equazioni ellittiche negli spazi $H^{k,\lambda}$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 4 (1967), p. 527-545

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_527_0>

SULLA REGOLARITÀ DELLE SOLUZIONI DI EQUAZIONI ELLITTICHE NEGLI SPAZI $H^{k,\lambda}$

JAN KADLEC (Pisa), JINDŘICH NEČAS (Praga)

In questo lavoro si studia la regolarità delle soluzioni di una equazione differenziale di tipo ellittico di ordine $2k$ con coefficienti solo misurabili e limitati in un aperto Ω. Supponendo una certa regolarità del secondo membro dell'equazione si ottiene che la soluzione del problema di Dirichlet e le sue derivate di ordine k appartengono allo spazio di MORREY [4] $L^{(2,\lambda)}(\Omega)$ dove λ dipende dalla ellitticità dell'equazione. Da questo risultato segue che nel caso che l'aperto Ω abbia dimensione due tutte le derivate di ordine $k-1$ sono hölderiane. Questo risultato è analogo a quello stabilito, per equazioni del secondo ordine, da DE GIORGI [5], G. STAMPACCHIA [8] e altri autori, ed è applicabile anche ad equazioni non lineari.

Alcune dimostrazioni di questo lavoro sono ottenute modificando analoghe dimostrazioni contenute in [2].

La parte fondamentale del lavoro è la dimostrazione dei lemmi 3.I e 2.II. Il primo di questi lemmi permette di estendere il metodo di CAMPANATO al caso dei coefficienti discontinui mentre il lemma 2.II permette di studiare gli operatori di tipo ellittico con coefficienti discontinui come perturbazioni di operatori ellittici con coefficienti costanti.

Useremo le seguenti notazioni.

Se Ω è un aperto limitato dello spazio euclideo R^N, indichiamo con $\partial\Omega$ la frontiera di Ω, e con $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ la chiusura. Con $W_2^{(k)}(\Omega)$ si indica lo spazio delle funzioni $u(X)$ di quadrato sommabile in Ω con tutte le loro derivate

$$D^i u = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N}} \qquad (i = (i_1, \dots, i_N))$$

Pervenuto alla Redazione il 15 Aprile 1967.

di ordine $|i| = i_1 + \dots + i_N \leqq k$, munito della norma

$$|u;\ W_2^{(k)}(\Omega)| = (\sum_{|i| \leqq k} |D^i u;\ L_2(\Omega)|^2)^{1/2}.$$

In generale indichiamo con $|u; B|$ la norma u nello spazio B e nel caso particolare che $B = R^N$ scriviamo $|X;\ R^N| = |X| = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} |x_\alpha|^2\right)^{1/2}$, dove x_α sono le coordinate di $X \in R^N$.

Indichiamo con $\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni u che appartengono a $W_2^{(k)}(\Omega)$ e che si possono approssimare nella norma di $W_2^{(k)}(\Omega)$ con funzioni $u_n \in W_2^{(k)}(\Omega)$ aventi supporto compatto contenuto in Ω. Per $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$ la norma $|u;\ W_2^{(k)}(\Omega)|$ è equivalente alla seminorma

$$[u]_\Omega = (\sum_{|i| = k} |D^i u;\ L_2(\Omega)|^2)^{1/2}$$

(cfr. SOBOLEV [7]).

Indichiamo con $\mathcal{J}(S, r)$ la sfera $\{X;\ X \in R^N\,|\,X - S| < r\}$ e poniamo $I(S, r) = \Omega \cap \mathcal{J}(S, r)$. Quando S non varia scriveremo semplicemente $\mathcal{J}(r)$ e $I(r)$.

Nel seguito considereremo funzioni $u \in W_2^{(k)}(\Omega)$ tali che

$$[u]_{I(S,r)} \leqq K r^{\frac{\lambda}{2}} \qquad (0 \leqq \lambda < N)$$

per ogni $S \in \Omega$ e per ogni $r > 0$. Diremo allora che $u \in H^{k,\lambda}(\Omega)$. In $H^{k,\lambda}(\Omega)$ si assume come norma la seguente

$$|u;\ H^{k,\lambda}(\Omega)| = |u;\ W_2^{(k)}(\Omega)| + (\sup_{S \in \Omega} r^{-\lambda} [u]^2_{I(S,r)})^{1/2}$$

(cfr. [2]).

È noto (cfr. [3]) che per $N - 2 < \lambda < N$ e per aperti Ω sufficientemente regolari è $H^{k,\lambda}(\Omega) \subset C^{k-1, \frac{1}{2}(\lambda+2-N)}(\bar{\Omega})$, cioè $u \in H^{k,\lambda}(\Omega)$ implica che le derivate di ordine $k - 1$ di u sono $\frac{1}{2}(\lambda + 2 - N)$-hölderiane in $\bar{\Omega}$.

Nel seguito noi supporremo che l'aperto Ω sia abbastanza regolare e quindi (usando localmente trasformazioni di coordinate cfr. [2]) è sufficiente limitarci a considerare delle sfere oppure semisfere di R^N.

1. Proprietà locali della soluzione del problema di Dirichlet per operatori con coefficienti costanti.

Consideriamo un operatore differenziale ellittico A con coefficienti costanti

$$(1.1) \qquad A = \sum_{|i|=|j|=k} a_{ij} D^{i+j}$$

dove $i + j = (i_1 + j_1, \dots, i_N + j_N)$. Indichiamo con

$$(1.2) \qquad H = H_A = \max_{|i|=|j|=k} |a_{ij}|$$

$$(1.3) \qquad \nu = \nu_A = \inf_{\xi_i} \Big(\sum_{|i|=k} |\xi_i|^2 \Big)^{-1} \operatorname{Re} \Big(\sum_{|i|=|j|=k} a_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \Big)$$

e supponiamo $\nu > 0$.

Sia Ω l'insieme $X_N > 0$ e $S = (0, \dots, 0, b)$. Indichiamo con $\partial_1 I(S, r)$ l'insieme $\mathcal{I}(S, r) \cap \{X_N = 0\}$ e $\partial_2 I(S, r) = \partial I(S, r) - \partial_1 I(S, r)$.

Lemma 1.I Sia $u \in W_2^{(k)}(I(1))$ e

$$(1.4) \qquad u(X) = \frac{\partial u}{\partial x_N}(X) = \dots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_N^{k-1}}(X) = 0$$

per ogni $X \in \partial_1 I(1)$. Supponiamo

$$(1.5) \qquad A(u, v) = \sum_{|i|=|j|=k} \int_{I(1)} a_{ij} D^i u \overline{D^j v} \, d\Omega = 0$$

per ogni $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(I(1))$. Esiste una costante positiva C dipendente da ϱ, $\frac{H}{\nu}$ tale che (per $\varrho < 1$)

$$(1.6) \qquad [u]^2_{I(\varrho)} \leqq C \, | u ; W_2^{(k-1)}(I(1)) |^2 .$$

Dim. Poniamo $\varphi_m(t) = \frac{1}{2}(1 - t^2)$ e $\Phi(X) = [\varphi(|X - S|)]^{2m}$ (m sufficientemente grande). Allora

$$(1.7) \qquad | D^j \Phi(X) | \leqq C (1 - |X - S|)^{2m - |j|}$$

$$(1.8) \qquad \Phi(X) \geqq C (1 - |X - S|)^{2m}$$

(le costanti C possono essere differenti tra loro; questo anche nel seguito).

Dalle (1.3) e (1.5) segue che

$$\nu \sum_{|i|=k} |\Phi^{1/2} D^i u\,;\ L_2(I(1))|^2 \leqq \sum_{|i|=|j|=k} \operatorname{Re} \int_{I(1)} \Phi\, a_{ij} D^i u\, \overline{D^j u}\, d\Omega =$$

$$= \operatorname{Re}(A(u, \Phi u)) + \operatorname{Re} \sum_{\substack{|i|=k \\ |j|+|e|=k \\ |e|\leqq k-1}} C_{ije} \int_{I(1)} D^i u\, \overline{D^e u}\, D^j \Phi\, d\Omega$$

dove C_{ije} sono costanti tali che $\max |C_{ije}| \leqq CH$. Sfruttiamo la relazione $A(u, \Phi u) = 0$ e la maggiorazione

$$\left| \int_{I(1)} D^i u\, \overline{D^e u}\, D^j \Phi\, d\Omega \right| \leqq |\Phi^{1/2} D^i u\,;\ L_2(I(1))|\ |\Phi^{-1/2} D^j \Phi\, D^e u\,;\ L_2(I(1))|\,.$$

Allora

$$\nu \sum_{|i|=k} |\Phi^{1/2} D^i u\,;\ L_2(I(1))|^2 \leqq CH \Big(\sum_{|i|=k} |\Phi^{1/2} D^i u\,;\ L_2(I(1))|^2 \Big)^{1/2} \cdot \tag{1.9}$$

$$\cdot \Big(\sum_{|i|<k-1} |D^i u\,;\ L_2(I(1))|^2 \Big)^{1/2}.$$

Perchè dalle (1.7) e (1.8) segue che $\Phi^{-1/2} D^i \Phi$ è limitato per $|i| \leqq k$. Dalla (1.9) segue la tesi.

OSSERVAZIONE 1.I. Se $u \in W_2^{(k)}(I(r))$, $A(u, v) = 0$ per ogni $v \in \mathring{W}_2^{(k)}(I(r))$ e valgono la (1.4) per ogni $X \in \partial_1 I(r)$, si ha

$$[u]^2_{I(\varrho)} \leqq C\, |u\,;\ W_2^{(k-1)}(I(r))|^2 \tag{1.10}$$

dove la costante C dipende da ϱ, r, $\dfrac{H}{\nu}$.

Questa asserzione segue dal lemma 1.I ponendo $Y = rX$.

LEMMA 1.II. Nelle stesse ipotesi del lemma 1.I e $b \notin \left\langle \dfrac{3}{4}, 1 \right\rangle$ si ha per ogni ϱ, $0 < \varrho < r \leqq 1$ e $e \geqq k$

$$|u\,;\ W_2^{(e)}(I(\varrho))|^2 \leqq C\, |u\,;\ W_2^{(k-1)}(I(r))|^2 \tag{1.11}$$

dove la costante C dipende da ϱ, r, $\dfrac{H}{\nu}$.

DIM. A meno di un'omotetia possiamo supporre $\varrho > \frac{7}{8}$. Nel caso $e = k$ la tesi del lemma segue dalla osservazione 1.I. Supponiamo che il lemma 1.II sia vero per un $e \geqq k$. Scriviamo la maggiorazione (1.11) per le derivate $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ $(\alpha \neq N)$ (tutte le derivate di u sono continue (cfr. [1])); abbiamo

$$(1.12) \qquad \sum_{\alpha \neq N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\,;\; W_2^{(e)}(I(\varrho)) \right|^2 \leqq$$

$$\leqq \left| C u\,;\; W_2^{(k)}\left(I\left(\frac{\varrho + r}{2}\right)\right) \right|^2 \leqq C \,|\, u\,;\; W_2^{(k-1)}(I(r)) \,|^2.$$

Per ottenere la maggiorazione della derivata $\frac{\partial^{e+1} u}{\partial x_N^{e+1}}$ sfruttiamo (1.5); per ogni v abbastanza regolare con supporto compatto in $I(1)$ si ha

$$\int_{I(1)} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x_N^{2k}} \bar{v}\, d\Omega = a^{-1}_{(0,0,\dots,0,k)(0,\dots,0,k)}$$

$$\left(\sum_{\substack{|i|=|j|=k \\ i,j \neq (0,\dots,0,k)}} a_{ij} \int_{I(1)} D^{i+j} u\, \bar{v}\, d\Omega \right).$$

Dalla (1.3) segue che $H \geqq |\, a_{(0,\dots,0,k),(0,\dots,0,k)} \,| \geqq \nu$ e quindi per ogni p intero e per $0 < \varrho < 1$

$$(1.13) \qquad \left| \frac{\partial^{2k} u}{\partial x_N^{2k}}\,;\; W_2^{(p)}(I(\varrho)) \right| \leqq C \frac{H}{\nu} \sum_{\substack{|i|=p \\ i \neq (0,\dots,0,2k)}} |\, D^i u\,;\; W_2^{(p)}(I(\varrho)) \,|.$$

D'altra parte dalla (1.12) si ha per $i \neq (0,\dots,2k)$, $i = 2k$,

$$D^i u \in W_2^{(e+1-2k)}(I(\varrho))$$

e

$$(1.14) \qquad |\, D^i u\,;\; W_2^{(e+1-2k)}(I(\varrho)) \,|^2 \leqq \sum_{\substack{|j|=e+1 \\ j \neq (0,\dots,0,e+1)}} |\, D^j u\,;\; L_2(I(\varrho)) \,|^2.$$

Dalle (1.13) e (1.14) segue immediatamente

$$\sum_{|i|=2k} |\, D^i u\,;\; W_2^{(e+1-2k)}(I(\varrho)) \,| + |\, u\,;\; W_2^{(e+1-2k)}(I(\varrho)) \,| \leqq C \,|\, u\,;\; W_2^{(k-1)}(I(r)) \,|$$

dove C dipende da $\frac{H}{\nu}$, ϱ, r.

A questo punto dal Teorema 2 del lavoro di NEČAS [6], segue che

$$| u ; \ W_2^{(e+1)}(I(\varrho)) | \leqq C \, | u ; \ W_2^{(k-1)}(I(r)) |$$

e quindi la tesi ([1]).

Per un noto teorema di SOBOLEV se prendiamo e sufficientemente grande, dal lemma 1.II segue che

LEMMA 1.III. Se u verifica le ipotesi dette sopra, esiste una costante C dipendente soltanto dalla $\frac{H}{\nu}$, tale che

$$\max_{\substack{X \in I\left(\frac{1}{2}\right) \\ |i| = k}} | D^i u(X) |^2 \leqq C \, | u ; \ W_2^{(k-1)}(I(1)) |^2 . \tag{1.15}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $b \in \left\langle \frac{3}{4}, 1 \right\rangle$, sfruttiamo l'omotetia $Y = \frac{4}{3} X$, e applichiamo il lemma precedente alla funzione $v(Y) = u(X)$ e il teorema di SOBOLEV. Se $b \notin \left\langle \frac{3}{4}, 1 \right\rangle$, la (1.15) segue dal lemma 1.III immediatamente.

Indichiamo con P_{k-1} l'insieme dei polinomi di grado $< k - 1$, $P_{k-1}(I(\varrho))$ l'insieme dei polinomi di grado $\leqq k - 1$ verificanti (1.4) per $X \in \partial_1 I(\varrho)$.

Abbiamo il seguente:

LEMMA 1.IV. Per ogni $u \in W_2^{(k)}(I(2))$, che verifica la (1.4) per $X \in \partial_1 I(2)$; si ha

$$\inf_{p \in P_{k-1(I(1))}} | u - p ; \ W_2^{(k-1)}(I(1)) |^2 \leqq C \, [u]_{I(2)}^2 . \tag{1.16}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $| b | \geqq 1$ abbiamo $P_{k-1} = P_{k-1}(I(1))$ e dal teorema di SOBOLEV segue che

$$\inf_{p \in P_{k-1}} | u - p ; \ W_2^{(k-1)}(I(1)) |^2 \leqq C \sum_{|i| = k} | D^i u ; \ L_2(I(1)) |^2 \leqq C \, [u]_{I(2)}^2 .$$

Se $| b | \leqq 1$ è $P_{k-1}(I(1)) = \emptyset$ e per il teorema di SOBOLEV

$$| u ; \ W_2^{(k-1)}(I(1)) |^2 \leqq | u ; \ W_2^{(k-1)}(I(2)) |^2 \leqq C \, [u]_{I(2)}^2 .$$

([1]) Abbiamo posto $\frac{7}{8} < \varrho$ e $b \notin \left\langle \frac{3}{4}, 1 \right\rangle$ per ottenere per ogni $I(\varrho)$ la stessa costante che figura nel Teorema 2 di [6].

LEMMA 1.V. Se u verifica le ipotesi del lemma 1.III e 1.IV si ha per ogni $0 < \varrho < 2$ la maggiorazione

$$[u]^2_{I(\varrho)} \leqq C\,\varrho^N\,[u]^2_{I(2)}\,. \tag{1.17}$$

DIMOSTRAZIONE. Se è $\varrho < \frac{1}{2}$, dalla (1.15) per $u - p$, $p \in P_{k-1}(I(1))$, e dalla (1.16) per $|i| = k$, si ottiene la maggiorazione

$$[u]^2_{I(\varrho)} \leqq C\varrho^N \max_{X \in I\left(\frac{1}{2}\right)} |D^i u(X)|^2 = C\varrho^N \max_{X \in I\left(\frac{1}{2}\right)} |D^i(u-p)(X)|^2 \leq$$

$$\leqq C\varrho^N \inf_{p \in P_{k-1}(I(1))} |u - p\,;\, W_2^{(k-1)}(I(1))|^2 \leqq C\varrho^N\,[u]^2_{I(2)}\,.$$

Se $\frac{1}{2} \leqq \varrho \leqq 2$,

$$[u]^2_{I(\varrho)} \leqq [u]^2_{I(\varrho)} \leqq \varrho^N\,2^N\,[u]^2_{I(2)}$$

e quindi la tesi.

TEOREMA 1.I. Se $u \in W_2^{(k)}(I(1))$, e verifica la (1.4) per ogni $X \in \delta_1 I(1)$ e la (1.5), esiste una costante C, dipendente soltanto da $\frac{H}{\nu}$ tale che

$$[u]^2_{I(\varrho_1)} \leqq C\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^N [u]^2_{I(\varrho_2)}\,. \tag{1.18}$$

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo la (1.17) alla funzione $v(X) = u\left(\frac{1}{2}\varrho_2 X\right)$; si ottiene

$$[v]^2_{I\left(\frac{2}{\varrho_2}S,\,r\right)} \leqq Cr^N\,[v]^2_{I\left(\frac{2}{\varrho_2}\right)(S,\,2)}.$$

Applicando l'omotetia $X = \frac{2}{\varrho_2}\,Y$ si ottiene

$$[u]^2_{I\left(S,\,\frac{\varrho_2}{2}r\right)} \leqq Cr^N\,[u]^2_{I(S,\,\varrho_2)}\,.$$

Ponendo $\varrho_1 = \frac{\varrho_2}{2}\,r$ abbiamo la (1.18).

2. Perturbazioni degli operatori con coefficienti costanti.

Sia

$$A(u, v) = \sum_{|i|=|j|=k} \int_\Omega a_{ij} D^i u \overline{D^j v} \, d\Omega \tag{2.1}$$

la forma sesquilineare con coefficienti costanti verificante le condizioni del n⁰ 1 e sia

$$\mathscr{A}(u, v) = \sum_{|i|=|j|=k} \int_\Omega \omega_{ij} D^i u \overline{D^i v} \, d\Omega \tag{2.2}$$

dove ω_{ij}, sono funzioni misurabili su Ω.

Se M è un aperto contenuto in Ω, indichiamo con $\mathcal{M}$ l'insieme delle coppie di funzioni (u, v) tali che $[u]_M < 1$, $[v]_M < 1$ e $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(M)$.

Poniamo

$$|A - \mathscr{A}|_M = \sup_{(u,v)\in\mathcal{M}} |A(u, v) - \mathscr{A}(u, v)|. \tag{2.3}$$

Supponiamo $u \in W_2^{(k)}(\Omega)$ e

$$\mathscr{A}(u, v) = f(v)$$

per ogni $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$, dove f è un funzionale su $\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$.

Allora

$$A(u, v) = A(u, v) - \mathscr{A}(u, v) + f(v) \equiv F(v).$$

Evidentemente

$$|F|_M \leq |f|_M + |A - \mathscr{A}|_M [u]_M \tag{2.4}$$

dove

$$|f|_M = \sup_{[v]_M = 1} |f(v)|.$$

LEMMA 2.I. Nelle ipotesi sopra elencate e inoltre $|\mathscr{A} - A|_{I(S,1)} < \nu_A$, $\Omega = I(S, 1)$ e se vale la (1.4) per $X \in \partial_1 I(S, 1)$, esistono due costanti E_1, E_2, dipendenti soltanto da $\nu_A^{-1} H_A$, tali che

$$[u]_{I(S,\varrho_1)} \leqq \left[\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\frac{N}{2}} E_1 + \frac{1}{\nu} |A - \mathscr{A}|_{I(S,\varrho_2)}\right] [u]_{I(S,\varrho_2)} + \frac{E_2}{\nu} |f|_{I(S,\varrho_2)} \tag{2.5}$$

per ogni $\varrho_1 < \varrho_2 < 1$.

DIMOSTRAZIONE. Esiste una $u_1 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)} I(S, \varrho_2))$ tale che per ogni $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)} I(S, \varrho_2))$

$$A(u_1, v) = F(v).$$

Abbiamo

$$[u_1]_{I(S,\varrho_2)} \leqq \frac{1}{\nu_A} | F |_{I(S,\varrho_2)} . \tag{2.6}$$

Allora $A(u - u_1, v) = 0$. Sfruttando la (1.18), scritta per la funzione $u - u_1$, e inoltre la (2.6) e (2.4) si ottiene

$$[u]_{I(\varrho_1)} \leqq [u - u_1]_{I(\varrho_1)} + [u_1]_{I(\varrho_1)} \leqq C\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\frac{N}{2}}[u - u_1]_{I(\varrho_2)} + [u_1]_{I(\varrho_2)} \leqq$$

$$\leqq C\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\frac{N}{2}}[u]_{I(\varrho_2)} + \left[\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\frac{N}{2}} C + 1\right][u_1]_{I(\varrho_2)} \leqq$$

$$\leqq \left[\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\frac{N}{2}} C(1 + \nu_A^{-1} | A - \mathscr{A} |_{I(\varrho_2)}) + \nu_A^{-1} | A - \mathscr{A} |_{I(\varrho_2)}\right][u]_{I(\varrho_2)} +$$

$$+ \nu_A^{-1}\left[\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\frac{N}{2}} C + 1\right] | f |_{I(\varrho_2)} .$$

Poniamo $E_1 = 2C$ e $E_2 = C + 1$; si ha

$$C(1 + \nu_A^{-1} | A - \mathscr{A} |_{I(\varrho_2)} E_1)$$

$$\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\frac{N}{2}} C + 1 \leqq E_2$$

e quindi la tesi.

Fissiamo una forma bilineare $\mathscr{A}$. Indichiamo con $\varepsilon(\nu, H)$ l'insieme delle forme bilineari A, con coefficienti costanti, verificanti le condizioni

$$\max_{|i|=|j|=k} | a_{ij} | < H$$

$$\nu < \inf_{\xi_i}\Big(\sum_{|i|=k} | \xi_i |^2\Big)^{-1} \operatorname{Re}\Big(\sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}\, \xi_i\, \bar{\xi}_j\Big)$$

e poniamo

$$P_{\nu, H}(\mathscr{A}) = \limsup_{\varrho \to 0} \max_{S \in \Omega} \inf_{A \in \varepsilon(\nu, H)} \nu_A^{-1} | \mathscr{A} - A |_{I(S,\varrho)} .$$

I lemmi seguenti danno delle maggiorazioni per $P_{\nu, H}(\mathcal{A})$.

LEMMA 2.II. Supponiamo che per ogni $X \in \Omega$

$$\nu \sum_{|i|=r} |\xi_i|^2 \leq \sum_{|i=|j|=k} \omega_{ij}(X)\, \xi_i \bar{\xi}_j \leqq H \sum_{|i|=k} |\xi_i|^2$$

$(\nu > 0)$ e $\omega_{ij}(X) = \overline{\omega_{ij}(X)}$. Allora

$$P_{H.\, H}(\mathcal{A}) \leqq 1 - \frac{\nu}{H} < 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo:

$$A(u, v) = \int_M \sum_{|i|=|j|=k} H D^i u\, \overline{D^j v}\, d\Omega,$$

$$\mathcal{B}(u, v) = A(u, v) - \mathcal{A}(u, v).$$

Abbiamo $\mathcal{B}(u, v) = \overline{\mathcal{B}(v, u)}$ e $0 \leqq \mathcal{B}(u, u) \leqq (H - \nu)\, [u]_M^2$. Allora

$$|\mathcal{B}(u, v)| \leqq |\mathcal{B}(u, u)|^{\frac{1}{2}} |\mathcal{B}(v, v)|^{\frac{1}{2}} \leqq (H - \nu)\, [u]_M [v]_M .$$

D'altra parte $\nu_A = H$ e per ogni M

$$\nu_A^{-1} |\mathcal{A} - A|_M \leqq \frac{H - \nu}{H} = 1 \; \frac{\nu}{H}$$

e quindi la tesi.

LEMMA 2.III. Supponiamo che $\omega_{ij}(X)$ siano continui in Ω; e inoltre

$$\mathrm{Re} \sum_{|i|=|j|=k} \omega_{ij}(X)\, \xi_i \bar{\xi}_j \geqq \nu \sum_{|i|=k} |\xi_i|_j^2 \quad (\nu > 0) \text{ e}$$

$$\max_{\substack{|i|=|j|=k \\ X \in \Omega}} |\omega_{ij}(X)| = H < \infty.$$

Allora $P_{\nu, H}(\mathcal{A}) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo

$$A(u, v) = \int_{I(S, \varrho)} \sum_{|j|=|j|=k} \omega_{ij}(S)\, D^i u\, \overline{D^j v}\, d\Omega.$$

Allora

$$|\mathcal{A}(u,v) - A(u,v)| \leqq \int\limits_{I(S,\varrho)} \sum_{|i|=|j|=k} |\omega_{ij}(S) - \omega_{ij}(X)| \, |D^i u| \, |D^j v| \, d\Omega \leqq$$

$$\leqq C\omega(\varrho) [u]_{I(S,\varrho)} [v]_{I(S,\varrho)}$$

dove

$$\omega(\varrho) = \sup_{\substack{X, Y \in \Omega \\ |X-Y| < \varrho}} \sup_{|i|=|j|=k} |\omega_{ij}(X) - \omega_{ij}(Y)| \to 0$$

per $\varrho \to 0$.

Quindi

$$\sup_{X \in \Omega} \min_{A \in \varepsilon(\nu, H)} \nu_A^{-1} |\mathcal{A} - A|_{I(S,\varrho)} \leqq C\omega(\varrho)$$

e $P_{\nu,H}(\mathcal{A}) = 0$.

3. Un lemma fondamentale.

Lemma 3.I. Sia $\varphi(\varrho)$ una funzione non negativa, per $0 < \varrho < R$, tale che per $0 < \varrho_1 < \varrho_2 \leqq R$

$$\varphi(\varrho_1) \leqq \left(E_1 \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\omega} + E_3\right) \varphi(\varrho_2) + E_2 \varrho_2^{\alpha}, \tag{3.1}$$

$$\varphi(R) < \infty. \tag{3.2}$$

Supponiamo che esiste un $K \in (0,1)$ tale che

$$\varepsilon = E_1 K^{\omega - \alpha} + E_3 K^{-\alpha} < 1. \tag{3.3}$$

Allora

$$\frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^{\alpha}} \leqq M$$

dove

$$M = \max\left(\frac{E_2 K^{-\alpha}}{1-\varepsilon}, \sup_{\varrho \in \langle KR, R \rangle} \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^{\alpha}}\right).$$

Dimostrazione. Dalle (3.1) e (3.2) per $\varrho_2 = R$ si ottiene

$$\sup_{\varrho \in \langle \varrho_1, R \rangle} \varphi(\varrho) < \infty.$$

Indichiamo con

$$M_n = \sup_{\varrho \in \langle \frac{1}{n}, R \rangle} \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^\alpha} .$$

Evidentemente $M_n \quad M = \sup_{\varrho \in \langle 0, R \rangle} \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^\alpha}$.

Nel caso che

$$M = \sup_{\varrho \in \langle KR, R \rangle} \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^\alpha}$$

abbiamo la tesi.

Se invece

$$M > \sup_{\langle KR, R \rangle} \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^\alpha}$$

esiste una successione $\{r_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ tale che $\frac{1}{n} < r_n < KR$ e

$$\left| \frac{\varphi(r_n)}{r_n^\alpha} - M_n \right| < \frac{1}{n} M_n .$$

Dalla (3.1) ponendo $\varrho_1 = r_n$ e $\varrho_2 = \frac{r_n}{K}$ abbiamo

$$\frac{\varphi(r_n)}{r_n^\alpha} \leqq (E_1 K^{\omega - \alpha} + E_3 K^{-\alpha}) \frac{\varphi\left(\frac{r_n}{K}\right)}{\left(\frac{r_n}{K}\right)^\alpha} + E_2 K^{-\alpha}.$$

Poichè $\frac{r_n}{K} \in \ \frac{1}{n}, R \rangle$ segue

$$\frac{\varphi\left(\frac{r_n}{K}\right)}{\left(\frac{r_n}{K}\right)^\alpha} \leqq M_n$$

e quindi

$$M_n - \frac{1}{n} M_n \leqq \frac{\varphi(r_n)}{r_n^\alpha} \leqq \varepsilon M_n + E_2 K^{-\alpha}.$$

Allora

$$\left(1 - \varepsilon - \frac{1}{n}\right) M_n \leqq E_2 K^{-\alpha}.$$

L'affermazione del lemma si ottiene per $n \to \infty$.

4. Regolarità della soluzione.

LEMMA 4.I. Sia $\Omega = \{X_N > 0\}$ oppure $\Omega = \{X_N > -2\}$. Sia $u \in W_2^{(k)}(I(0,1))$ la funzione tale che:

$$u(X) = \frac{\partial u}{\partial x_N}(X) = \dots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_N^{k-1}}(X) = 0$$

per $X \in \partial_1 I(0,1)$ e

$$\mathcal{A}(u, v) = f(v)$$

per ogni $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(I(0,1))$. Supponiamo che

$$|f|_{I(S,\varrho)} \leqq C\varrho^{\lambda} \qquad (\lambda > 0)$$

per $|S| < \frac{1}{2}$ e ϱ, $0 < \varrho < \frac{1}{2}$. Supponiamo ancora che esistano $K \in (0,1)$, $\nu > 0$, $H > 0$ tali che

$$\varepsilon = K^{\frac{N}{2}-\lambda} E_1 + P_{\nu,H}(\mathcal{A}) K^{-\lambda} < 1 \text{ (2)}.$$

Allora esiste una costante M tale che per $\varrho < \frac{1}{2}$ e $|S| < \frac{1}{2}$

$$[u]_{I(S,\varrho)} \leqq M\varrho^{\lambda}.$$

DIMOSTRAZIONE. Esiste un $P_0 > P_{\nu,H}(\mathcal{A})$ per cui

$$K^{\frac{N}{2}-\lambda} E_1 + P_0 K^{-\lambda} < 1$$

ed esiste un R, $0 < R < \frac{1}{2}$, tale che per ogni $|S| < \frac{1}{2}$ e $0 < \varrho < R$

$$\inf_{A \in \varepsilon(\nu, H)} \nu_A^{-1} |\mathcal{A} - A|_{I(S,\varrho)} < P_0 .$$

Allora esiste un $A \in \varepsilon(\nu, H)$ tali che $\nu_A^{-1} |\mathcal{A} - A|_{I(S,\varrho)} < P_0$.

---

(2) E_1 è la costante del lemma 2.I, dipendente da (ν, H).

Usando il lemma 2.I si ottiene

$$[u]_{I(S,\varrho_1)} \leqq \left[\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\frac{N}{2}} E_1 + P_0\right] [u]_{I(S,\varrho_2)} + \frac{E_2}{\nu} \,|\, f \,|_{I(S,\varrho_2)} \qquad \forall\ 0 < \varrho_1 < \varrho_2 < R.$$

Fissiamo S, $|S| < \frac{1}{2}$, e poniamo $\varphi(\varrho) = [u]_{I(S,\varrho)}$.

Allora

$$\varphi(\varrho_1) \leqq \left[\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\frac{N}{2}} E_1 + P_0\right] \varphi(\varrho_2) + \frac{E_2}{\nu} C \varrho_2^{\lambda}.$$

Usando ii lemma 3.I otteniamo

$$\varphi(\varrho) \leqq M \varrho^{\lambda}$$

per $0 < \varrho < \frac{1}{2}$. La costante M non dipende da S, $|S| < \frac{1}{2}$.

Applicando il lemma 2.II si ottiene

TEOREMA 4.I. Sia Ω un aperto limitato abbastanza regolare e sia $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$ la soluzione debole dell'equazione

$$\sum_{|i|=|j|=k} D^i \omega_{ij} D^j u = f \text{ (3)} \tag{4.1}$$

i cui coefficienti verificano le condizioni $\omega_{ij}(X) = \overline{\omega_{ij}(X)}$ e

$$\nu \sum_{|i|=k} |\xi_i|^2 \leqq \sum_{|i|=|j|=k} \omega_{ij}\, \xi_i \overline{\xi_j} \leqq H \sum_{|i|=k} |\xi_i|^2$$

($\nu > 0$). Sia f un funzionale tale che

$$|f|_{I(S,\varrho)} \leqq C \varrho^{\lambda}$$

per ogni $S \in \Omega$, $\varrho > 0$ e λ fissato nell'intervallo $0 < \lambda < \frac{N}{2}$. Allora esiste

---

(3) cioè per ogni $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$

$$\sum_{|i|=|j|=k} \int_{\Omega} \omega_{ij} D^i u \overline{D^j v}\, d\Omega = f(v).$$

una costante $\lambda_0 > 0$ dipendente da Ω, k, $\dfrac{H}{\nu}$ tale che

$$[u]_{I(S,\varrho)} \leqq M\varrho^{\min(\lambda_0,\lambda)}$$

DIMOSTRAZIONE. L'aperto Ω è regolare e quindi mediante trasformazioni locali di coordinate possiamo ridurci al caso che Ω sia un semispazio. Con questi cambiamenti di coordinate i coefficienti ω_{ij}, e quindi ν e H variano di poco e inoltre resta ancora verificata la condizione di simmetria $\omega_{ij} = \overline{\omega_{ij}}$. A meno di omotetie possiamo limitarci al caso in cui $\Omega = \{X_N > 0\}$ oppure $\Omega = \{X_N > -2\}$ e $S \in I(0,1)$.

Per K abbastanza piccolo

$$E_1\, K^{\frac{N}{2}} + P_{H,H}(\mathscr{A}) < 1$$

perchè $P_{H,H}(\mathscr{A}) \leqq 1 - \dfrac{\nu}{H}$ (E_1 è costante per $A \in \varepsilon(H,H)$ e quindi non dipende da ν e H). Esiste un λ_0 tale che per $\lambda < \lambda_0$

$$E_1\, K^{\frac{N}{2}} + P_{H,H}(\mathscr{A}) < K^{\lambda}.$$

Possiamo allora usare il lemma 4.I e si ottiene la tesi nel caso che Ω sia un semispazio. Ritornando infine alle coordinate originali si ottiene la tesi.

OSSERVAZIONE 4.I. Il valore λ_0 che abbiamo ottenuto nella dimostrazione precedente non è in generale molto grande ma è positivo. Per le proprietà di immersione degli spazi $H^{k,\lambda}$ (cfr. [2], [3]) otteniamo che nel caso $N = 2$, le derivate di ordine $\leqq k-1$ della soluzione sono α-hölderiane in $\overline{\Omega}$ con $\alpha = \dfrac{\lambda}{2}$.

Il teorema seguente generalizza il teorema [9.I] di [2] al caso di operatori ellittici di ordine > 2.

TEOREMA 4.II. Sia Ω un aperto limitato abbastanza regolare $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$ la soluzione debole della (4.1), dove i coefficienti ω_{ij} sono continui in $\overline{\Omega}$. Supponiamo

$$\mathrm{Re} \sum_{|i|=|j|=k} \omega_{ij}(X)\, \xi_i\, \overline{\xi_j} \geqq \nu \sum_{|i|=k} |\xi_i|^2$$

$(\nu > 0)$. Sia f tale che $|f|_{I(S,\varrho)} \leqq C\varrho^{\lambda}\left(\lambda < \frac{N}{2}\right)$ per $S \in \Omega$, $\varrho > 0$. Esiste una costante M tale che

$$[u]_{I(S,\varrho)} \leqq M\varrho^{\lambda}.$$

DIMOSTRAZIONE. Come nella dimostrazione del teorema 4.I ci limiteremo al caso $I(S,\varrho) = I(0,1)$ e $\Omega = \{X_N > 0\}$ oppure $\Omega = \{X_N > -2\}$. Per K abbastanza piccolo

$$E_1 K^{\frac{N}{2}-\lambda} < 1$$

e $P_{\nu,H}(\mathscr{A}) = 0$. Usando il lemma 4.I si dimostra il teorema prima localmente, cioè nell'intorno di ogni punto $S \in \Omega$, e quindi su Ω.

5. Un'applicazione alle equazioni quasi-lineari nel caso di dimensione $N = 2$.

Consideriamo una soluzione $u \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ dell'equazione

$$\sum_{|i|=|j|=k} D^i \omega_{ij}(X, \partial u)\, D^j u = f$$

in un aperto $\Omega \subset R^2$ abbastanza regolare. Si è indicato con ∂u il vettore delle derivate $D^i u$ dell'ordine $\leqq k-1$. Supponiamo $\omega_{ij}(X, \partial u) = \overline{\omega_{ji}(X,\partial u)}$ e

$$\sum_{|i|=|j|=k} \omega_{ij}(X, \partial u)\, \xi_i \overline{\xi_j} \geqq \nu \sum_{|i|=k} |\xi_i|^2,$$

$$\max_{\substack{|i|=|j|=k \\ X \in \Omega}} |\omega_{ij}(X, \partial u)| < \infty$$

$$|f|_{I(S,\varrho)} \leqq C\varrho^{\frac{N}{2}}$$

per ogni S, $S \in \Omega$ e $\varrho > 0$.

I coefficienti ω_{ij} sono funzioni continue rispetto a tutte le variabili X, ∂u. Dal teorema 4.I e dall'osservazione 4.I segue che il vettore ∂u (cioè le sue componenti) è λ_0-hölderiano e quindi u risolve l'equazione lineare

$$\sum_{|i|=|j|=k} D^i b_{ij} D^j u = f$$

con coefficienti $b_{ij}(X) = \omega_{ij}(X, \partial u(X))$ continui. Usando il teorema 4.II si ottiene allora che $u \in H^{k,\lambda}(\Omega)$ per ogni $\lambda < N$.

Quando ω_{ij} ed f sono più regolari, anche i coefficienti b_{ij} sono più regolari e possiamo usare i risultati di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [1] per ottenere la regolarità delle derivate della soluzione di ordine arbitrario.

Supponiamo ora che il funzionale f dipende da u:

$$f(v) = \sum_{|i| \leqq k} \int_{\Omega} f_i(u) \overline{D^i v} \, d\Omega,$$

dove le f_i sono funzioni di X, $D^i u(X)$ $(|i| \leqq k)$ e

$$|f_i(u)(X)| \leqq C\left(1 + \sum_{|i|=k} |D^i u(X)|^{p_1} + \sum_{|i| \leqq k-1} |D^i u(X)|^{p_2}\right)$$

dove $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 < \infty$.

Allora per $p_3 > 2p_2$, $N = 2$

$$|f(u)|_{I(S,\varrho)} \leqq C \sum_{|i| \leqq k} |f_i(u); L_2(I(S,\varrho))| \leqq \tag{5.1}$$

$$\leqq C\left(\int_{I(S,\varrho)} \left(1 + \sum_{|j|=k} |D^j u(X)|^{2p_1} + \sum_{|j| \leqq k-1} |D^j u(X)|^{2p_2}\right) d\Omega\right)^{1/2}$$

$$\leqq C\left[\varrho^N + \sum_{|j|=k} \left(\int_{I(S,\varrho)} |D^j u|^2 \, d\Omega\right)^{p_1} \varrho^{N(1-p_1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{|j| \leqq k-1} \left(\int_{I(S,\varrho)} |D^j u|^{p_3} \, d\Omega\right)^{\frac{2p_2}{p_3}} \varrho^{N\left(1-\frac{2p_2}{p_3}\right)}\right]^{1/2}.$$

Se $u \in W_2^{(k)}(\Omega)$, si ha dal teorema di SOBOLEV

$$|f(u)|_{I(S,\varrho)} \leqq C\left(\varrho^{\frac{N}{2}} + \varrho^{\frac{N}{2}(1-p_1)} + \varrho^{\frac{N}{2}\left(1-\frac{2p_2}{p_3}\right)}\right) |u; W_2^{(k)}(\Omega)|$$

$$\leqq C \varrho^{\frac{N}{2}\min\left(1,\, 1-p_1,\, 1-\frac{2p_2}{p_3}\right)} |u; W_2^{(k)}(\Omega)|$$

per ogni $0 < \varrho < \operatorname{diam}\Omega$ e quindi per ogni $\varrho > 0$.

Dal teorema 4.I segue come nel caso precedente che $u \in H^{k,\lambda}(\Omega)$ per $\lambda = \min\left[\lambda_0, N, N(1-p_1), N\left(1 - \frac{2p_2}{p_3}\right)\right]$. Allora per $N = 2$ e $|i| \leqq k-1$ le $D^i u$ sono funzioni limitate e $\frac{1}{2}$ λ-hölderiane.

Dalla (5.1) segue inoltre

$$|f(u)|_{I(S,\varrho)} \leqq C\left[\varrho^{\frac{N}{2}} + [u]^{p_1}_{I(S,\varrho)}\,\varrho^{\frac{N}{2}(1-p_1)}\right] \tag{5.2}$$

Ora se $[u]_{I(S,\varrho)} \leqq C\,\varrho^{\lambda}$ si ha

$$|f(u)|_{I(S,\varrho)} \leqq C\left[\varrho^{\frac{N}{2}} + \varrho^{\lambda p_1 + \frac{N}{2}(1-p_1)}\right]$$

e dal teorema 4.II

$$[u]_{I(S,\varrho)} \leqq C\,\varrho^{\lambda p_1 + \frac{N}{2}(1-p_1)}$$

nell'ipotesi che sia $\lambda p_1 + \frac{N}{2}(1-p_1) < \frac{N}{2}$ $\left(\text{cioè per } \lambda < \frac{N}{2}\right)$.

Per questi valori di λ si ha

$$\lambda p_1 + \frac{N}{2}(1-p_1) > \lambda$$

e quindi per ogni $\lambda < \frac{N}{2}$ si ottiene $u \in H^{k,2\lambda}(\Omega)$.

Una maggiore regolarità della u si può ottenere dai risultati di ADN [1] facendo ulteriori ipotesi di regolarità su ω_{ij} e $f_i(u)$ come funzioni di X e $D^i u$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON - A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I,* Comm. on Pure and Appl. Mathem. vol. XII (1959). Idem II, Comm. Pure and Appl. Mathem. vol. XVII (1964).

[2] S. CAMPANATO, *Equazioni ellittiche del II⁰ ordine e spazi* $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}$. Annali di Matematica S. IV, Tomo LXIX (1965).

[3] S. CAMPANATO, *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali,* Annali Sc. Norm. Sup. di Pisa, S. III, Vol. XVIII, I (1964).

[4] S. CAMPANATO, *Proprietà di inclusione per spazi di Morrey.* Ricerche di Matem., Vol. XII (1963).

[5] E. DE GIORGI, *Sulla differenziabilità e l'analiticità degli estremali e degli integrali multipli regolari.* Mem. Accad. Sc. di Torino, S. III, Parte I (1957).

[6] J. NEČAS, *Sur les normes equivalentes dans* $W_p^{(k)}(\Omega)$ *et sur la coercitivite des formes formellement positives.* Séminaire de Mathématiques Supérieures (Montreal) (1965).

[7] S. L. SOBOLEV, *Nekotorye primenenia funkcionalnovo analiza v matematicekoj fizike.* Novosibirsk, 1963.

[8] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinues.* Annales de l'Instit. Fourier, VI, 1 (1965).