Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

S. Campanato

Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 4 (1967), p. 701-707

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_701_0>

UN RISULTATO RELATIVO AD EQUAZIONI ELLITTICHE DEL SECONDO ORDINE DI TIPO NON VARIAZIONALE

S. CAMPANATO (*)

Consideriamo l'operatore ellittico

$$Eu = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u$$

i cui coefficienti sono funzioni reali misurabili e limitate, definite su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, limitato e convesso, e inoltre sono tali, se $n > 2$, che gli autovalori della matrice simmetrica $\{a_{ij}(x)\}$ sono fra loro abbastanza vicini (n. 1 condizione c)).

Si dimostra che esistono due numeri reali p_0 e p_1, $1 < p_0 < 2 < p_1$, tali che per tutti i p dell'intervallo (p_0, p_1) l'operatore E è un isomorfismo di $H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega)$ su $L^p(\Omega)$. In particolare il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u \in H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega) \\ Eu = f \in L^p(\Omega) \qquad\qquad p_0 < p < p_1 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione.

Per $p = 2$ si ritrova un risultato già dimostrato per altra via da Talenti [10] (per il caso bidimensionale cfr. [1], [11]).

Per $n = 2$ un analogo risultato è stato ottenuto da Pucci in un recente lavoro [9].

Pervenuto alla Redazione il 17 Luglio 1967.

(*) Lavoro parzialmente finanziato da « the United States Air Force » con il contratto AF EOAR grant 67-38 attraverso « the European office of Aerospaces Research ».

Il risultato di questa nota, come quello di Pucci, è di tipo qualitativo nel senso che si prova l'esistenza di p_0 e p_1 ma non se ne dà una esatta valutazione. Se indichiamo con $\Delta^{-1}(p)$, $p > 1$, l'inverso dell'isomorfismo $\Delta: H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$, una valutazione esatta di p_0 e p_1 è legata alla valutazione della norma $\| \Delta^{-1}(p) \|$.

Per $n = 2$, dal risultato stabilito in questa nota e dal teorema di immersione di Sobolev, segue che la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u \in H^{2,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega) \\ Eu = f \in L^p(\Omega), \qquad p > 2 \end{cases}$$

ha le derivate prime holderiane. L'esponente di Holder che si ottiene per questa via non è certamente il migliore (cfr. i risultati di Talenti [11], Niremberg [8], Finn-Serrin [3], Hartman [4], ...).

1. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ convesso (¹) e con frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare; per fissare le idee supponiamo che $\partial\Omega$ sia di classe C^3. Indichiamo con $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$, $p > 1$, la chiusura dell'insieme delle funzioni u

$$u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad u = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega$$

rispetto alla norma

$$(1.1) \qquad |u|_{p,\Omega} = \left\{ \int_\Omega \left[\sum_{ij=1}^n (D_i D_j u)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Si può osservare che

$$H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega) = H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega).$$

È noto che per ogni $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, il problema di Dirichlet

$$\Delta u = f$$

$$u \in H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$$

ammette una e una sola soluzione u e si ha la maggiorazione

$$(1.2) \qquad |u|_{p,\Omega} \leq c(p) \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

(¹) Se $n > 2$ si può supporre, più in generale, che la curvatura media di $\partial\Omega$ abbia segno costante non positivo (retta normale orientata verso l'esterno).

In particolare, per $p = 2$, si ha la maggiorazione [2]

$$|u|_{2,\Omega} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} . \tag{1.3}$$

Quindi Δ è un isomorfismo di $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$ su $L^p(\Omega)$ per ogni $p > 1$. Indichiamo con $\Delta^{-1}(p)$ l'isomorfismo inverso il quale applica $L^p(\Omega)$ su $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$. Dalla (1.3) segue che

$$\|\Delta^{-1}(2)\| \leq 1.$$

Allora se fissiamo un r nell'intervallo $(2, +\infty)$ si ottiene, per interpolazione, che per tutti i p dell'intervallo $2 \leq p \leq r$

$$\|\Delta^{-1}(p)\| \leq \|\Delta^{-1}(r)\|^{\frac{r(p-2)}{p(r-2)}} . \tag{1.4}$$

Analogo discorso se fissiamo un r dell'intervallo $(1,2)$.

Sia dato in Ω l'operatore differenziale del secondo ordine

$$Eu = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_i D_j u$$

a coefficienti reali e simmetrici e supponiamo che

a) $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$.

b) Esistono due costanti positive ν ed M tali che

$$\nu |\lambda|^2 \leq \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \leq M|\lambda|^2 \quad \text{per} \quad x \in \Omega \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

c) Indichiamo con $\mu_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ gli autovalori della matrice $\{a_{ij}(x)\}$; facciamo l'ipotesi che sia

$$\inf_{\Omega} \frac{[\sum_i \mu_i(x)]^2}{\sum_i \mu_i^2(x)} > n - 1. \tag{1.6}$$

---

(2) Ciò segue dal fatto che se $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ allora

$$\int_\Omega \sum_{ij=1}^{n} (D_i D_j u)^2 dx - (n-1)\int_{\partial\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 H(x)\, d\sigma = \int_\Omega (\Delta u)^2 dx$$

dove $H(x)$ è la curvatura media di $\partial\Omega$ nel punto x (Talenti [10]).

Questa condizione è banalmente verificata se $n = 2$ mentre per $n > 2$ l'ipotesi (1.6) equivale ad imporre che gli autovalori della matrice $\{a_{ij}(x)\}$ siano abbastanza vicini tra loro [3].

Poniamo

$$\mathrm{K} = \sup_{\Omega} \left\{ n - \frac{[\sum_i \mu_i(x)]^2}{\sum_i \mu_i^2(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} = \sup_{\Omega} \left\{ \frac{\sum_{ij} (\mu_i - \mu_j)^2}{2 \sum_i \mu_i^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

In virtù dell'ipotesi (1.6) risulta [4]

$$0 \leq \mathrm{K} < 1. \tag{1.8}$$

Consideriamo la funzione

$$\alpha(x) = \frac{\sum_i \mu_i(x)}{\sum_i \mu_i^2(x)} \tag{1.9}$$

$\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$ ed è strettamente positiva, allora l'operatore $\Delta - \alpha E$ è una applicazione lineare e continua di $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $p > 1$.

Se indichiamo con $\| \Delta - \alpha E \|_p$ la norma dell'applicazione $\Delta - \alpha E$: $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$, si ha questo teorema che è fondamentale ai fini del nostro risultato

TEOREMA 1.I. *Per ogni $p > 1$ risulta*

$$\| \Delta - \alpha E \|_p \leq \mathrm{K}. \tag{1.10}$$

DIM. Sia $u(x)$ una funzione appartenente ad $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$; per quasi tutti gli $x \in \Omega$ risulta

$$| (\Delta - \alpha E) u |^2 = \left\{ \sum_{ij=1}^{n} (\delta_{ij} - \alpha a_{ij}) D_i D_j u \right\}^2 \leq \tag{1.11}$$

$$\leq \sum_{ij=1}^{n} (\delta_{ij} - \alpha a_{ij})^2 \cdot \sum_{ij=1}^{n} (D_i D_j u)^2.$$

---

(3) È provato da un esempio (Talenti [10]) che, se l'ipotesi (1.6) non è verificata, l'operatore E può non essere un isomorfismo di $H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ su $L^2(\Omega)$.

(4) Ovviamente $\mathrm{K} = 0$ se e solo se gli autovalori sono tutti uguali quindi se e solo se $E = g(x)\Delta$. Osserviamo anche che per $n = 2$ si può dare una maggiorazione di K in termini delle costanti di ellitticità ν ed M; infatti

$$\mathrm{K} = \sup_{\Omega} \left\{ \frac{[\mu_1(x) - \mu_2(x)]^2}{\mu_1^2(x) + \mu_2^2(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{M - \nu}{\sqrt{M^2 + \nu^2}} \leq \left(1 - \frac{\nu}{M}\right).$$

Tenuto conto delle relazioni

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x), \qquad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}^2(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2(x)$$

si ha che

$$\sum_{ij=1}^{n} (\delta_{ij} - \alpha a_{ij})^2 = n - \frac{[\sum_i \mu_i(x)]^2}{\sum_i \mu_i^2(x)} \leq \mathbb{k}^2. \tag{1.12}$$

Da (1.11) e (1.12) segue che

$$|(\Delta - \alpha E) u| \leq \mathbb{k} \left\{ \sum_{ij=1}^{n} (D_i D_j u)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\| (\Delta - \alpha E) u \|_{L^p(\Omega)} \leq \mathbb{k} \, | u |_{p, \Omega}$$

da cui la tesi.

Teorema 1.II. *Esistono due numeri reali p_0 e p_1, $1 < p_0 < 2 < p_1$, tali che per ogni p dell'intervallo (p_0, p_1) il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} u \in H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega) \\ Eu = f \in L^p(\Omega) \end{cases} \tag{1.13}$$

ammette una e una sola soluzione u la quale verifica la maggiorazione

$$| u |_{p, \Omega} \leq \frac{M}{\nu^2} \frac{\| \Delta^{-1}(p) \|}{1 - \mathbb{k} \| \Delta^{-1}(p) \|} \| f \|_{L^p(\Omega)} . \tag{1.14}$$

Dim. Fissiamo un r nell'intervallo $(2, +\infty)$; poichè $\| \Delta^{-1}(r) \|$ non è limitata sulla semiretta $(2, +\infty)$ possiamo supporre che sia $\| \Delta^{-1}(r) \| > \frac{1}{\mathbb{k}}$ (ciò non è affatto essenziale). Per tutti i p dell'intervallo $[2, r]$ si ha la maggiorazione (1.4)

$$\| \Delta^{-1}(p) \| \leq \| \Delta^{-1}(r) \|^{\frac{r(p-2)}{p(r-2)}} = c(p)$$

$c(p)$ è una funzione continua di p nell'intervallo $[2, r]$, è monotona in senso stretto e $c(p) \to 1$ quando $p \to 2$. Quindi esiste un numero p_1 dell'intervallo $(2, r]$ tale che

$$\| \Delta^{-1}(p) \| < \frac{1}{\mathbb{k}} \tag{1.15}$$

per ogni $p \in [2, p_1)$.

Con ragionamento del tutto analogo si prova che esiste un numero $p_0 \in (1, 2)$ tale che per tutti i p dell'intervallo $(p_0, 2]$ vale la maggiorazione (1.15). A questo punto si conclude in modo standard: sia f una funzione di $L^p(\Omega)$ con $p \in (p_0, p_1)$. Consideriamo l'applicazione

$$\varphi : u \longrightarrow \Delta^{-1}(p)(\alpha f) + \Delta^{-1}(p)(\Delta - \alpha E) u$$

φ applica $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$ in $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$ ed è una contrazione, in virtù delle maggiorazioni (1.10) e (1.15), infatti

$$|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)|_{p,\Omega} = |\Delta^{-1}(p)(\Delta - \alpha E)(u_1 - u_2)|_{p,\Omega} \leq \mathfrak{K} \| \Delta^{-1}(p) \| \cdot |u_1 - u_2|_{p,\Omega}$$

e $\mathfrak{K} \| \Delta^{-1}(p) \|$ è minore di 1. Quindi esiste una e una sola $u \in H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$ tale che

$$u = \Delta^{-1}(p)(\alpha f) + \Delta^{-1}(p)(\Delta - \alpha E) u \tag{1.16}$$

La (1.16) è equivalente a scrivere che

$$Eu = f.$$

Inoltre dalla (1.16) si ha che

$$\begin{aligned} |u|_{p,\Omega} &\leq |\Delta^{-1}(p)(\alpha f)|_{p,\Omega} + |\Delta^{-1}(p)(\Delta - \alpha E) u|_{p,\Omega} \leq \\ &\leq \| \Delta^{-1}(p) \| \sup_\Omega \alpha \, \|f\|_{L_p(\Omega)} + \| \Delta^{-1}(p) \| \, \mathfrak{K} \, |u|_{p,\Omega} . \end{aligned}$$

Quindi, tenuto conto che $\mathfrak{K} \| \Delta^{-1}(p) \|$ è minore di 1 e che $\sup_\Omega \alpha \leq \frac{M}{\nu^2}$,

$$|u|_{p,\Omega} \leq \frac{M}{\nu^2} \frac{\| \Delta^{-1}(p) \|}{1 - \mathfrak{K} \| \Delta^{-1}(p) \|} \|f\|_{L^p(\Omega)} .$$

Istituto Matematico
Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] L. BERS-L. NIRENBERG - « *On linear and non linear elliptic boundary value problem in the plane* ». Convegno sulle equaz. a derivate parz., Trieste (1954).

[2] B. V. BOYARSKII - « *Soluzioni generalizzate di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine di tipo ellittico a coefficienti discontinui* ». Mat. Sbornik N. S. 43 (1957).

[3] R. FINN-J. SERRIN - «*On the Holder continuity of quasi conformal and elliptic mappings* » Trans. Amer. Math. Soc. 89 (1958).

[4] P. HARTMAN - « *Holder continuity and non linear elliptic partial differential equations* ». Duke Math. J ; 25 (1958).

[5] N. G. MEYERS - « *On L^p estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations* ». Annali Scuola N.S. di Pisa vol. XVII (1963).

[6] C. B. MORREY - « *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations* ». Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938).

[7] J. NEČAS - « *Sur la régularité des solutions variationnelles des équations non-linéaires d'ordre 2k en deux dimension* ». Ann. S. N. Sup. di Pisa, vol. XXI (1967) pp. 427-457.

[8] L. NIRENBERG - « *On non linear elliptic partial differential equations and Holder continuity* ». Comm. Pure Appl. Math. VI (1953).

[9] C. PUCCI - « *Equazioni ellittiche con soluzioni in $W^{2,p}$, $p < 2$* ». Convegno sulle equaz. alle deriv. parz., Bologna (1967).

[10] G. TALENTI - « *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili* ». Annali di Matematica, vol. LXIX (1965).

[11] G. TALENTI - « *Equazioni lineari ellittiche in due variabili* ». Le Matematiche vol. XXI (1966).