ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CLAUDIO REA

Sulla riducibilità di una famiglia di connessioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 1 (1968), p. 31-39

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_1_31_0>

SULLA RIDUCIBILITÀ DI UNA FAMIGLIA DI CONNESSIONI

CLAUDIO REA (*)

Lo scopo di questo lavoro è di mettere in relazione la riducibilità di una certa famiglia di connessioni su un fibrato principale P con il primo gruppo di coomologia a valori in $\mathbf{R}$ della base M del fibrato.

La famiglia di connessioni in questione è $\mathcal{F} = \{\omega - \psi\pi\}_{\psi \in A^1(M, \mathfrak{z})}$ ove ω è un'assegnata connessione e $A^1(M, \mathfrak{z})$ è lo spazio vettoriale delle 1-forme a valori nel centro $\mathfrak{z}$ dell'algebra di Lie del gruppo strutturale. Nel n. 1 sono elencate alcune nozioni sulla riducibilità e riducibilità locale delle connessioni e si da un criterio necessario e sufficiente mediante l'olonomia.

Il n. 2 riguarda alcune identità nei gruppi di Lie, necessarie per lo studio dell'olonomia di $\mathcal{F}$, studio che viene compiuto nel n. 3, ove si da anche una condizione necessaria e sufficiente per la riducibilità di $\mathcal{F}$ ad un sottogruppo del gruppo strutturale, mediante la coomologia $H^1(M, \mathfrak{z})$. Infine nel n. 4 vengono applicati i risultati precedenti allo studio della metricità della famiglia di connessioni indotta da $\mathcal{F}$ in un fibrato vettoriale appartenente alla classe di P, e tale metricità è messa in relazione con l'annullamento di $H^1(M, \mathbf{R})$.

1. Il fibrato tangente di una varietà differenziabile [1] $\mathcal{V}$ e lo spazio tangente a $\mathcal{V}$ in un suo punto ξ saranno sempre indicati con $T(\mathcal{V})$ e $T_\xi(\mathcal{V})$ rispettivamente. Data una applicazione differenziabile $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$, con $\mathcal{V}'$ varietà differenziabile, l'applicazione tangente $T(\mathcal{V}) \to T(\mathcal{V}')$ ad essa associata sarà indicata con df oppure con $\dot{f}$ e la sua restrizione $T_\xi(\mathcal{V}) \to T_{f(\xi)}(\mathcal{V}')$ con $(df)_\xi$ o $\dot{f}_\xi$. In particolare, se $\{\xi_\lambda\}$ è un cammino differenziabile in $\mathcal{V}$, $\dot{\xi}_{\lambda_0}$ indica il vettore ad esso tangente in ξ_{λ_0}.

Pervenuto alla Redazione il 28 Luglio 1967.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 35 del C. N. R..

(1) Il termine «differenziabile» è usato, qui e nel seguito, nel senso di C^∞.

Siano M una varietà differenziabile paracompatta, connessa e $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato differenziabile principale di base M e gruppo strutturale $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{H}$ un sottogruppo di Lie chiuso di $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}$ le algebre di Lie di $\mathfrak{H}$ e $\mathfrak{G}$ rispettivamente.

Una riduzione di P ad $\mathfrak{H}$ è una coppia (Q, φ), ove Q è un fibrato principale differenziabile su M di gruppo strutturale $\mathfrak{H}$, φ è un'immersione di Q in P ed il diagramma

$$
\begin{array}{ccc}
Q & \xrightarrow{\varphi} & P \\
& \searrow \quad \swarrow^{\pi} & \\
& M &
\end{array}
\tag{1}
$$

è commutativo. Il fibrato $Q \longrightarrow M$ può essere naturalmente identificato ad un sottofibrato di P. E' noto che l'assegnare una riduzione (Q, φ) di P ad $\mathfrak{H}$ equivale a dare una sezione σ del fibrato $P/\mathfrak{H}$: se α è la proiezione di P su $P/\mathfrak{H}$ e Q_x è la fibra di Q in $x \in M$, si ha $\sigma x = \alpha \circ \varphi(Q_x)$.

Se sono dati un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di M e, per ogni $U \in \mathcal{U}$, una riduzione (Q_U, φ_U) di $P \mid U$ ad $\mathfrak{H}$ ($P \mid U$ è la restrizione di P ad U), allora P dicesi localmente ridotto ad $\mathfrak{H}$; ciò equivale ad aver assegnato una famiglia $\{\sigma_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ di sezioni $\sigma_U : U \longrightarrow P/\mathfrak{H}$ di $P/\mathfrak{H}$.

Naturalmente P è sempre localmente riducibile ad $\mathfrak{H}$ mentre non lo è globalmente per ogni $\mathfrak{H}$. Osserviamo che se P è riducibile ad $\mathfrak{H}$, esso è anche riducibile ad ogni suo coniugato interno $g\,\mathfrak{H}\,g^{-1}$, $(g \in \mathfrak{G})$.

Sia data una riduzione (Q, φ) di P ad $\mathfrak{H}$. Una connessione ω si dice ridotta ad $\mathfrak{H}$ mediante la riduzione (Q, φ) se, identificato Q ad un sottofibrato di P, si ha $\mathfrak{Im}(\omega \mid T(Q)) \subset \mathfrak{h}$. Per ogni $p \in P$ sia $\mathcal{H}_p = \ker \omega_p$ il sottospazio orizzontale di $T_p(P)$. Un vettore $w \in T_{\alpha p}(P/\mathfrak{H})$ dicesi orizzontale se $w \in \alpha p\, \mathcal{H}_p$. E' noto ([1], p. 88) che, se σ è la sezione di $P/\mathfrak{H}$ associata a (Q, φ), perchè ω sia ridotta ad $\mathfrak{H}$ mediante la riduzione (Q, φ), occorre e basta che σ sia orizzontale; una connessione ω su P è dunque riducibile ad $\mathfrak{H}$ se e soltanto se $P/\mathfrak{H}$ ammette una sezione orizzontale.

Ovviamente la connessione ω è localmente ridotta ad $\mathfrak{H}$ mediante la riduzione locale $(Q_U, \varphi_U)_{U \in \mathcal{U}}$, se $\mathfrak{Im}(\omega \mid T(Q_U)) \subset \mathfrak{h}$, per ogni $U \in \mathcal{U}$. Perchè ω sia localmente riducibile ad $\mathfrak{H}$, occorre e basta che esista una famiglia $\{\sigma_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ di sezioni locali orizzontali $\sigma_U : U \longrightarrow P/\mathfrak{H}$ di $P/\mathfrak{H}$, con $\mathcal{U}$ ricoprimento aperto di M.

Osserviamo che se ω è riducibile ad $\mathfrak{H}$ mediante la riduzione (Q, φ), essa è anche riducibile ad ogni suo coniugato interno $g\,\mathfrak{H}\,g^{-1}$ $(g \in \mathfrak{G})$, e la nuova riduzione è $(Qg, \mathcal{R}_g \circ \varphi \circ \mathcal{R}_{g^{-1}})$, dove $\mathcal{R}_g$ indica l'operazione di g su P. Altrettanto vale per la riducibilità locale.

Sia $p_0 \in P$ e sia $\Phi(p_0) \subset \mathfrak{G}$ il gruppo d'olonomia di ω in p_0. Se $x_0 = \pi p_0$ e $C(x_0)$ è il gruppoide dei lacci differenziabili di M aventi origine in x_0, è canonicamente definito ([1] p. 72) l'omomorfismo surgettivo di gruppoidi

$$\beta: \; C(x_0) \longrightarrow \Phi(p_0).$$

Il fibrato P e la connessione ω sono sempre riducibili a $\Phi(p_0)$, ([1], p. 83), anzi il gruppo $\Phi(p_0)$ è, a meno di coniugio interno, minimale rispetto a questa proprietà. Sussiste di fatti la seguente

PROPOSIZIONE 1.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la connessione ω sia riducibile ad $\mathfrak{H}$ è che, per qualche $p_0 \in P$, sia $\Phi(p_0) \subset \mathfrak{H}$.*

DIMOSTRAZIONE. Proviamo la necessità della condizione. Sia Q il sottofibrato di P avente $\mathfrak{H}$ per gruppo strutturale, dimostriamo che, se $p_0 \in Q$, allora $\Phi(p_0) \subset \mathfrak{H}$. Sia in effetti $x_0 = \pi p_0$ e $l = \{x_\lambda\}_{0 \le \lambda \le 1} \in C(x_0)$, indichiamo allora con $\{p_\lambda\}_{0 \le \lambda \le 1}$ il cammino orizzontale uscente da p_0 in P, al disopra di l. Per definizione dell'applicazione β è $p_1 = p_0 \beta(l)$. Del resto, indicato con $\{y_\lambda\}_{0 \le \lambda \le 1}$ il cammino orizzontale in $P/\mathfrak{H}$, uscente da αp_0, al disopra di l, dato che, essendo $p_0 \in Q$, è $\alpha p_0 = \sigma x_0$, l'intero cammino $\{y_\lambda\}$ deve appartenere alla sezione orizzontale σ, ne segue $y_0 = y_1$. Ma $\{\alpha p_\lambda\}$ è anche esso orizzontale in $P/\mathfrak{H}$, è al disopra di l e $\alpha p_0 = y_0$, dunque $\alpha p_\lambda = y_\lambda = \sigma x_\lambda$. In particolare $\alpha p_0 = \alpha p_1$ e pertanto $p_1 \in p_0 \mathfrak{H}$, dunque deve essere $\beta(l) \in \mathfrak{H}$ e cioè $\Phi(p_0) \subset \mathfrak{H}$.

La necessità della condizione è pertanto dimostrata.

Sia ora $\Phi(p_0) \subset \mathfrak{H}$ per un certo $p_0 \in P_0$.

Osserviamo che, posto $\{x_\lambda\}_{0 \le \lambda \le 1} = l \in C(x_0)$, se $\{p_\lambda\}_{0 \le \lambda \le 1}$ è il cammino orizzontale in P, uscente da p_0, al disopra di l, allora il cammino $\{\alpha p_\lambda\}$ è chiuso in $P/\mathfrak{H}$. Difatti è $p_1 = p_0 \beta(l)$, ma $\beta(l) \in \mathfrak{H}$, donde $\alpha p_0 = \alpha p_1$.

Sia ora $x_1 \in M$ e $c \equiv \{x_\lambda\}_{0 \le \lambda \le 1}$ un cammino in M che congiunge x_0 ad x_1. Per quanto abbiamo precedentemente osservato, detto $\{p_\lambda\}_{0 \le \lambda \le 1}$ il cammino orizzontale in P, uscente da p_0 al disopra di c, l'elemento αp_1 non dipende da c ma solo da x_1, poniamo $\alpha p_1 = \sigma x_1$. In questo modo costruiamo una sezione σ di $P/\mathfrak{H}$. Questa sezione è differenziabile ed orizzontale per la ragione che segue: quale che sia il cammino differenziabile $\{x_\lambda\}_{0 \le \lambda \le 1}$ in M, il cammino $\{\sigma x_\lambda\}$ è differenziabile ed orizzontale in $P/\mathfrak{H}$. Difatti, se al solito $\{p_\lambda\}_{0 \le \lambda \le 1}$ è il cammino orizzontale in P uscente da p_0 al disopra di $\{x_\lambda\}$, è $\sigma x_\lambda = \alpha p_\lambda$ e le applicazioni $\lambda \longrightarrow p_\lambda$ ed α sono differenziabili. La proposizione è così dimostrata.

2. Siano $\mathfrak{z}$ e $\mathfrak{Z}$ i centri di $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{G}$ rispettivamente, $\mathfrak{Z}_0$ la componente connessa di $\mathfrak{Z}$. Per ogni $X \in \mathfrak{g}$ lo spazio $T_X(\mathfrak{g})$ viene usualmente identificato

a $\mathfrak{g}$ stessa ([2], p. 11). Ciò posto, per ogni $Y \in T_X(\mathfrak{g})$ vale la formula

$$(d \exp)_X Y = \exp X \sum_0^\infty{}_k \frac{1}{(k+1)!} (-ad^{(k)} X)(Y)$$

([2], p. 95). In particolare se $[X, Y] = 0$ si ha

$$(d \exp)_X Y = (\exp X) Y. \tag{2}$$

Siano ora $\psi : T(M) \to \mathfrak{z}$ una 1-forma su M a valori in $\mathfrak{z}$ e $\{x_\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq 1}$ un cammino differenziabile in M.

PROPOSIZIONE 2.1. *Il cammino differenziabile di* $\mathbf{Z}$

$$g_\lambda = \exp \int_0^\lambda \psi(\dot{x}_\lambda)\, d\lambda$$

ha, nel punto g_λ, *vettore tangente* $\dot{g}_\lambda = g_\lambda \psi(\dot{x}_\lambda)$.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri il cammino $X_\lambda = \int_0^\lambda \psi(\dot{x}_\lambda)\, d\lambda$ in $\mathfrak{z}$. Si ha ovviamente $\dot{X}_\lambda = \psi(\dot{x}_\lambda)$, pertanto sarà $\dot{g}_\lambda = (d \exp)_{X_\lambda} [\psi(\dot{x}_\lambda)]$, dato che $[X_\lambda, \psi(\dot{x}_\lambda)] = 0$, si ha per la (2)

$$\dot{g}_\lambda = \exp X_\lambda\, \psi(\dot{x}_\lambda) = g_\lambda\, \psi(\dot{x}_\lambda).$$

La proposizione è così dimostrata.

3. Sia ora ω una connessione su P e ψ una 1-forma su M a valori in $\mathfrak{z}$. Ricordiamo che se $p \in P$ e $X \in \mathfrak{g}$, pX indica il valore in p del campo fondamentale associato ad X. Naturalmente X è a sua volta l'elemento di $\mathfrak{g}$ generato da pX.

PROPOSIZIONE 3.1. *La forma* $\omega' = \omega - \psi\pi$ *è una connessione su* P; *indicate con* Ω *ed* Ω' *le forme di curvatura di* ω *ed* ω', *si ha*

$$\Omega - \Omega' = d\, \psi\dot{\pi}, \tag{i}$$

$$\omega\tau_p = \omega'(\tau_p + p\, \psi\dot{\pi}\tau_p), \quad \textit{per ogni } \tau_p \in T_p(P), \tag{ii}$$

(iii) *Se* $\{p_\lambda\}$ *e* $\{p'_\lambda\}$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ *sono i cammini* ω *orizzontale ed* ω'*-orizzontale in* P, *uscenti dallo stesso punto* p_0 *e al disopra dello stesso cammino* $\{x_\lambda\}$ *di* M, *si ha*

$$p'_\lambda = p_\lambda \exp \int_0^\lambda \psi(\dot{x}_\lambda)\, d\lambda .$$

DIMOSTRAZIONE. Siano τ_p e $\bar{\tau}_p$ elementi di $T_p(P)$, con $\dot{\pi}\bar{\tau}_p = 0$, sia X l'elemento di $\mathfrak{g}$ generato da $\bar{\tau}_p$ e g un qualunque elemento di $\mathfrak{G}$. Dato che $\psi\dot{\pi}\tau_p \in \mathfrak{z}$, è $Adg^{-1}(\psi\dot{\pi}\tau_p) = \psi\dot{\pi}\tau_p$, pertanto $\omega'(\tau_p g) = Adg^{-1}(\omega\tau_p) - \psi\dot{\pi}\tau_p =$ $= Adg^{-1}(\omega\tau_p - \psi\dot{\pi}\tau_p) = (Adg^{-1})\,\omega'\tau_p$. Inoltre $\psi\dot{\pi}\bar{\tau}_p = 0$, dunque $\omega'\bar{\tau}_p =$ $= \omega\bar{\tau}_p = X$. Ne segue che ω' è una connessione. Osserviamo ora che, poichè $\psi\dot{\pi}$ è a valori in $\mathfrak{z}$, si ha $[\omega, \psi\dot{\pi}] = [\psi\dot{\pi}, \psi\dot{\pi}] = 0$, dunque $[\omega', \omega'] =$ $= [\omega, \omega]$. Dalle equazioni strutturali otteniamo allora $\Omega - \Omega' = d\omega -$ $- \frac{1}{2}[\omega, \omega] - d\omega' + \frac{1}{2}[\omega', \omega'] = d\omega - d\omega' = d\psi\dot{\pi}$. La (i) è così dimostrata.

Notiamo che $\dot{\pi}(p\psi\dot{\pi}\tau_p) = 0$, perchè $p\psi\dot{\pi}\tau_p$ è verticale e che $\omega(p\psi\dot{\pi}\tau_p) =$ $= \psi\dot{\pi}\tau_p$, dato che $\psi\dot{\pi}\tau_p$ è l'elemento di $\mathfrak{g}$ generato da $p\psi\dot{\pi}\tau_p$; otteniamo allora $\omega'(\tau_p + p\psi\dot{\pi}\tau_p) = \omega\tau_p + \omega(p\psi\dot{\pi}\tau_p) - \psi\dot{\pi}\tau_p - \psi\dot{\pi}(p\psi\dot{\pi}\tau_p) = \omega\tau_p +$ $+ \psi\dot{\pi}\tau_p - \psi\dot{\pi}\tau_p = \omega\tau_p$. La (ii) è dimostrata.

Ricordiamo ora che, se $\{p_\lambda\}$ e $\{g_\lambda\}$ sono cammini differenziabili in P e $\mathfrak{G}$ rispettivamente, posto $p'_\lambda = p_\lambda g_\lambda$, si ha $\dot{p}'_\lambda = \dot{p}_\lambda g_\lambda + p'_\lambda g_\lambda^{-1}\dot{g}_\lambda$ ([1], p. 69).

Resta da provare che se $\{p_\lambda\}$ è ω-orizzontale e $g_\lambda = \exp\int_0^\lambda \psi(\dot{x})\, d\lambda$, allora $\{p'_\lambda\}$ è ω'-orizzontale. Dalla proposizione 2.1 segue $\dot{p}'_\lambda = \dot{p}_\lambda g_\lambda + p'_\lambda \psi \dot{x}_\lambda$.

Osserviamo che si ha $\dot{x}_\lambda = \dot{\pi}(\dot{p}_\lambda g_\lambda)$, applicando allora la (ii) con $p = p'_\lambda$ e $\tau_p = \dot{p}_\lambda g_\lambda$ otteniamo $\omega'\dot{p}'_\lambda = \omega'[\dot{p}_\lambda g_\lambda + p'_\lambda\psi\dot{\pi}(\dot{p}_\lambda g_\lambda)] = \omega\dot{p}'_\lambda g_\lambda = 0$, dunque il cammino $\{p'_\lambda\}$ è ω'-orizzontale e la proposizione è interamente dimostrata.

TEOREMA 3.1. *Sia* ω *riducibile ad* $\mathfrak{H}$. *Condizione sufficiente affinchè anche* ω' *lo sia è che* ψ *sia un gradiente* (2). *Se poi* $\mathfrak{Z}$ *è semplicemente connesso e si ha* $\mathfrak{H} g \mathfrak{H} g^{-1} \cap \mathfrak{Z}_0 = \{e\}$ *per ogni* $g \in \mathfrak{G}$, *allora la condizione è anche necessaria.*

DIMOSTRAZIONE. Si fissi $x_0 \in M$ e si consideri l'applicazione $C(x_0) \longrightarrow \mathfrak{Z}_0$ definita ponendo $r(l) = \exp\int_l \psi$.

Siano al solito λ un parametro variabile tra 0 e 1, $\{x_\lambda\} = l \in C(x_0)$, $p_0 \in \pi^{-1} x_0$ in modo che $\Phi(p_0) \subset \mathfrak{H}$, p_λ e p'_λ i cammini ω-orizzontale ed ω'-

(2) In tal caso ω ed ω' hanno la stessa olonomia.

orizzontale uscenti da p_0 al disopra di l. Indichiamo con $\beta'\colon C(x_0) \to \Phi'(p_0)$; l'applicazione analoga alla β per la connessione ω'. Per definizione delle applicazioni β e β' è $p_1 = p_0\,\beta(l)$ e $p_1' = p_0(l)$, per la proposizione 3.1, parte (iii), è $p_1' = p_1\, r(l)$, donde

$$\beta'(l) = \beta(l)\, r(l). \tag{3}$$

Se ψ è un gradiente, si ha $r(l) = \exp 0 = e$, per ogni $l \in C(x_0)$. Dunque $\beta'(l) = \beta(l)$ e $\Phi'(p_0) = \Phi(p_0) \subset \mathfrak{H}$.

Pertanto (prop. 1.1) ω' è riducibile ad $\mathfrak{H}$. Sia ora ω' riducibile ad $\mathfrak{H}$, dunque $\Phi'(p_0) \subset g\,\mathfrak{H}\,g^{-1}$, per un opportuno $g \in \mathfrak{G}$. Dato che $\beta(l) \in \mathfrak{H}$, dalla (3) otteniamo $r(l) \in \mathfrak{H}\,g\,\mathfrak{H}\,g^{-1}$, ne segue che, se $\mathfrak{H}\,g\,\mathfrak{H}\,g^{-1} \cap \mathfrak{Z}_0 = \{e\}$, deve aversi $r(l) = \exp \int_l \psi = e$. Se poi $\mathfrak{Z}_0$ è semplicemente connesso, da $\mathfrak{Z}_0 \ni \exp \int_l \psi = e$ segue $\int_l \psi = 0$. Per l'arbitrarietà di l in $C(x_0)$ ψ deve essere un gradiente.

Il teorema è così dimostrato.

Dal lemma di Poincaré segue immediatamente il seguente

Corollario 3.1. *Sia ω localmente riducibile ad $\mathfrak{H}$. Condizione sufficiente affinchè anche ω' lo sia è che sia $d\psi = 0$. Se poi $\mathfrak{Z}_0$ è semplicemente connesso e si ha $\mathfrak{H}\,g\,\mathfrak{H}\,g^{-1} \cap \mathfrak{Z}_0 = \{e\}$, per ogni $g \in \mathfrak{G}$, allora tale condizione è anche necessaria.*

Osservazione. La condizione che $\mathfrak{Z}_0$ sia semplicemente connesso e che $\mathfrak{H}\,g\,\mathfrak{H}\,g^{-1} \cap \mathfrak{Z}_0 = \{e\}$, per ogni $g \in \mathfrak{G}$, è sempre verificata se $\mathfrak{G} = GL(n, \mathbf{R})$ e $\mathfrak{H} \subseteq SL(n, \mathbf{R})$.

Corollario 3.2. *Se ω è riducibile ad $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{Z}_0$ è semplicemente connesso e $\mathfrak{H}\,g\,\mathfrak{H}\,g^{-1} \cap \mathfrak{Z}^0 = \{e\}$, allora ogni connessione localmente riducibile ad $\mathfrak{H}$, del tipo ω', è riducibile ad $\mathfrak{H}$, se e soltanto se $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$.*

4. Caso lineare e caso riemanniano.

Siano $\mathbf{F}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbf{R}$, $\varrho\colon \mathfrak{G} \to GL(\mathbf{F})$ una rappresentazione fedele di $\mathfrak{G}$ su $\mathbf{F}$, con «centro di $\varrho\mathfrak{G}$» $= \mathbf{R}^* \mathbf{I}_F$, E_ϱ il fibrato vettoriale individuato da ϱ nella classe di P e P_ϱ il fibrato principale di gruppo $\varrho\mathfrak{G}$, dei riferimenti di E_ϱ, $(P_\varrho \simeq P)$. Siano ω_ϱ ed ω_ϱ' le connessioni su P associate ad ω ed ω' rispettivamente. Se, per ogni $X \in T(M)$, si pone

$\varrho\,\psi(X) = \varphi(X)\cdot\mathbf{I}_F$, la φ viene ad essere una 1-forma su M a valori in $\mathbf{R}$ e si può scrivere, per ogni $u \in T(P_\varrho)$,

$$\omega'_\varrho\, u = \omega_\varrho\, u - \varphi(\dot{\pi}_\varrho\, u)\,\mathbf{I}_F\,, \tag{4}$$

ove $\pi_\varrho : P_\varrho \longrightarrow M$.

Viceversa, se sono date ω ed una 1-forma φ su M a valori in $\mathbf{R}$, posto $\psi(X) = \dot{\varrho}^{-1}[\varphi(X)\cdot\mathbf{I}_F]$, la ψ è una 1-forma su M a valori in $\mathfrak{z}$ e la connessione $\omega' = \omega - \psi\dot{\pi}$ induce su P_ϱ proprio la connessione data dalla (4). Notiamo che, se c è un cammino in M, si ha

$$\varrho\left(\exp\int_c \psi\right) = e^{\int_c \varphi}\,\mathbf{I}_F$$

e pertanto, se τ e τ' sono i trasporti ω_ϱ-parallelo ed ω'_ϱ-parallelo relativi a c, la (iii) della prop. 3.1 da

$$\tau' = e^{\int_c \varphi}\,\tau. \tag{5}$$

Osserviamo che, se $\mathbf{K}$ è un compatto massimale in $\varrho\,\mathfrak{G}$, si ha

$$\mathbf{K}\,\gamma\,\mathbf{K}\,\gamma^{-1} \cap \varrho\,\mathbf{Z}^0 = \{\mathbf{I}_F\}. \tag{6}$$

Difatti $\det(\mathbf{K}\,\gamma\,\mathbf{K}\,\gamma^{-1}) = \{\pm 1\}$ e $\det(\varrho\,\mathbf{Z}^0) = \mathbf{R}^+$.

Una connessione su P_ϱ dicesi (localmente) metrica se P_ϱ ammette una metrica (locale) invariante rispetto al trasporto parallelo relativo a tale connessione; ciò equivale a che quest'ultima sia (localmente) riducibile ai compatti massimali di $\varrho\,\mathfrak{G}$.

Siano ω_ϱ ed ω'_ϱ localmente metriche; tenendo conto del teorema 3.1 e del lemma di Poincaré, possiamo supporre M dotata di un ricoprimento semplicemente connesso $\{U_i\}$ tale che, al disopra di ciascun U_i, E_ϱ sia munito di due prodotti scalari $\langle\,,\,\rangle_i$ e $\langle\,,\,\rangle'_i$, invarianti rispetto ai trasporti paralleli τ_i e τ'_i indotti da ω_ϱ ed ω'_ϱ su $E_\varrho\,|\,U_i$ e che φ sia integrabile in U_i. Indicata con $f_i + \log A_i$ la famiglia delle funzioni su U_i aventi per gradiente φ, con A_i costante positiva arbitraria, si fissi un punto $x_0^{(i)}$ in U_i. Esiste certamente $\sigma_i \in \varrho\,(\mathfrak{G})$ tale che, per ogni v ed ogni w in $E_{x_0^{(i)}}$ (fibra di E_ϱ su $x_0^{(i)}$), si abbia $\langle v, w\rangle'_i = \langle \sigma_i v, \sigma_i w\rangle_i$. Siano ora $x \in U_i$, c un cammino uscente da $x_0^{(i)}$ in M ed avente estremo in x, τ e τ' i trasporti paralleli relativi ad ω_ϱ ed ω'_ϱ al disopra di c, ed infine siano τv e τw due elementi arbitrari di E_x. Tenendo conto della (5) si ha

$$\langle \tau v, \tau w \rangle_i' = A_i^2 e^{-2f_i(x)} \langle \tau' v, \tau' w \rangle_i' = A_i^2 e^{-2f_i(x)} \langle v, w \rangle_i' =$$

$$= A_i^2 e^{-2f_i(x)} \langle \sigma_i v, \sigma_i w \rangle_i = A_i^2 e^{-2f_i(x)} \langle \sigma_i \tau v, \sigma_i \tau w \rangle =$$

$$= \langle A_i e^{-f_i(x)} \sigma_i \tau v, A_i e^{-f_i(x)} \sigma_i \tau w \rangle .$$

Ne segue che, se $\| \ \|_i$ e $\| \ \|_i'$ indicano le metriche associate a $\langle , \rangle_i$ ed a $\langle , \rangle_i'$, si ha

$$\| v_x \|_i' = A_i e^{-f_i(x)} \| \sigma_i v_x \|_i , \quad \text{per ogni} \quad v_x \in E_x . \tag{7}$$

Analogamente se ω_ϱ ed ω_ϱ' sono globalmente metriche, allora per il teorema 3.1, si può scrivere $\varphi = df$. Con lo stesso metodo ed analogo significato dei simboli si giunge a scrivere

$$\| v_x \|' = A \, e^{-f(x)} \| \sigma v_x \| , \quad \text{per ogni} \quad v_x \in E_x . \tag{8}$$

Dalle relazioni (6), (7), (8), dal teorema 3.1 e dal teorema di de Rham possiamo concludere

TEOREMA 4.1.

(i) *Sia la connessione ω_ϱ localmente metrica. La connessione ω_ϱ' è localmente metrica se e solo se $d\varphi = 0$, e lo è rispetto a tutte e sole le metriche locali definite dalla* (7), *ove le A_i sono costanti arbitrarie positive e le σ_i elementi arbitrari di $\varrho\,\mathfrak{G}$.*

(ii) *Sia ω_ϱ metrica. La connessione ω_ϱ' è metrica se e solo se φ è un gradiente, e lo è rispetto ad ogni metrica definita dalla* (8), *con A costante arbitraria positiva e σ elemento arbitrario in $\varrho\,\mathfrak{G}$. Ogni connessione ω_ϱ' localmente metrica è metrica, se e soltanto se $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$.*

OSSERVAZIONE. Il teorema precedente può applicarsi senza cambiamenti al caso in cui sia $E_\varrho = T(M)$. Allora l'ipotesi — «centro di $\varrho\,\mathfrak{G} = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{I}_F$» — è identicamente verificata. Indicate con ∇ e ∇' le derivate covarianti rispetto ad ω_ϱ ed ω_ϱ', la relazione (3) si traduce nella

$$\nabla_X' Y = \nabla_X Y - \varphi(Y) X.$$

Istituto Matematico - Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] S. KOBAYASHI-K. NOMIZU, « *Foundation of differential Geometry* » Interscience (1963).

[2] S. HELGASON, « *Differential geometry and Symmetric Spaces* » Academic Press (1962).