ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. DINCA

Grandes déformations des fils élastiques (le problème thermique couplé)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 1 (1968), p. 41-65

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_1_41_0>

GRANDES DÉFORMATIONS DES FILS ÉLASTIQUES

(Le problème thérmique couplé)

G. DINCA

1. Introduction.

Les problèmes de la dynamique des fils extensibles dans diverses conditions initiales et à la limite et pour diverses lois constitutives ont été considerés par Rakhmatulin [1], [2], [3], [4], Ryabova [5], Smith et al. [6], [7], etc. Une bibliographie detaillée dans cette direction on trouve dans le travail de Cristescu [8].

Dans cette étude, est abordé le problème du mouvement spatial d'un fil extensible en prenant en considération l'influence de la température pour une lois constitutive élastiqne. Dans le cas quand cette influence n'est pas considerée des études ont été faites par Cristescu [9], [10], Pavlenko [11], Keller [12]. Dans ce dernier cas le système des équations du problème est totalement hyperbolique en ayant quatre familles caracteristiques differentes, avec la pente variable dépendant de la déformation (pour une loi constitutive entière) ou de la tension et de la déformation si dans la loi constitutive on tient compte de l'influence de la vitesse de déformation. Utilisant les relations satisfaites sur les lignes caractéristiques le système des équations du problème peut être integré à l'aide d'une méthode numérique, les conditions initiales et à la limite et la loi constitutive etant données d'une façon concrète [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19].

Dans le cas que l'on considère aussi l'influence de la température dans l'étude de la déformation des fils, le système des équations du problème contient les équations du mouvement, les relations qui donnent respectivement la loi constitutive et la définition de la déformation et en plus une équation qui est l'expression du premier principe de la thérmodynamique

Pervenuto alla Redazione il 21 Luglio 1967.

et une équation qui donne la liaison entre le courant calorique et la température. Dans le cas classique cette liaison est la loi de Fourier. De cette manière le problème a été abordé par Manacorda [20].

Le problème est repris dans cette étude. Le résultat essentiel, au point de vue mathématique, est que le système des équations du problème ne garde pas le caractère hyperbolique en étant d'un type intermédiaire hyperbolique-parabolique. La terminologie n'étant pas consacrée, le contenu de cette dénomination sera precisé ulterieurement. Le système possede cinq familles des lignes caractéristiques dont quatre sont des correspondantes naturelles des familles caractéristiques trouvées par Cristescu [9] et gardent leur caractère hyperbolique. Mais le système possede encore les caractéristiques $dt = 0$ ayant simultanement un caractère hyperbolique et parabolique. À l'aide des relations du saut verifiées quand on traverse les fronts des ondes, nous distinguerons les ondes propagables en regardant leur effet mécanique et thermique. Le caractère intermediaire du système est donné par la loi de Fourier qui s'attache aux équations du mouvement et à l'équation qui exprime le premier principe de la thérmodynamique. En utilisant à la place de cette loi une loi proposée par Kaliski [22], dans le dernière partie de cette étude, on montre que le système des équations du problème garde le caractère totalement hyperbolique qu'il possède quand l'influence de la température n'est pas prise en considération, ayant six familles des lignes caractéristiques différentes. À l'aide des relations satisfaites sur les lignes caractéristiques, le schéma d'integration numérique donnée par Cristescu [14], [15], [16], [17], [18], [19], peut être facilement adaptée.

2. Formulation du problème. Équations du mouvement.

Nous supposerons que à l'instant initial, la température, que nous designerons avec θ_0, est la même dans chaque point du fil. Soit θ_e la température du milieu extérieur et θ la température actuelle, fonction du point et du temps. La position des points du fil sera étabile à l'aide de la coordonnée curviligne s, considerée le long du fil, en commençant d'une origine arbitraire. Cette coordonnée caractérise la position des points du fil deformé à l'instant actuel t. La tension, qui varie le long du fil et dans le temps sera adnotée avec $\vec{T}$. Dans le cas du fil extensible parfaitement flexible elle est orientée dans chaque point après la direction de la tangente du fil. Sur une portion ds peuvent actionner des forces extérieures, la tension et une force dûe à la résistance du milieu dans lequel se passe le mouvement. Les forces extérieures et celles de la résistance seront considerées proportionnelles avec la longuer ds de la portion considerée. La force de la résistance du milieu sera considerée en chaque point de la forme de $-R(v)\vec{v}\,ds$, $\mathcal{R}$ étant une fonction positive dans le module de la vitesse du point consideré $\left(v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)$. Les équations du mouvement de la portion ds, en projection sur les axes coordonées sont

$$\varrho\, ds \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T \frac{\partial x}{\partial s}\right) ds + X ds - \mathcal{R} \frac{\partial x}{\partial t}\, ds \qquad (x, y, z) \tag{2,1}$$

et encore deux similaires pour y et z.

Dans (2,1) $\varrho\, ds$ est la masse de la portion ds considerée donc ϱ est la densité (la masse de l'unité de longueur) evidemment fonctions de s et de t. Nous rappelons aussi que les projection de $\vec{T}$ et $\vec{R}$ sur les axes sont $T\frac{\partial x}{\partial s} \cdot T\frac{\partial y}{\partial s}$, $T\frac{\partial z}{\partial s}$ et respectivement $-\mathcal{R}\frac{\partial x}{\partial t}\,ds$, $-\mathcal{R}\frac{\partial y}{\partial t}\,ds$, $-\mathcal{R}\frac{\partial z}{\partial t}\,ds$. Comme s est coordonnée curviligne actuelle nous écrirons les équations (2,1) en utilisant la coordonnée de Lagrange s_0, qui correspond à l'état initial non déformé. Les fonction inconnnes x, y, z, seront considerées dépendantes de s_0, par l'intermédiaire s, et de t: $x = x(s(s_0), t)$ etc. Donc, pour un t donné nous pouvons utiliser les relations

$$\frac{\partial x}{\partial s_0} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{ds}{ds_0} \qquad (x, y, z) \tag{2,2}$$

la notation (x, y, z) à la droite d'une relation, montre que encore deux relations similaires peuvent être écrites en changeant x avec y et respectivement avec z. La déformation sera définie par

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s_0}\right)^2} - 1. \tag{2,3}$$

Tenant compte de (2,3) dans (2,2) on obtient

$$\frac{\partial x}{\partial s_0} = (1 + \varepsilon)\frac{\partial x}{\partial s} \qquad (x, y, z) \tag{2,4}$$

et par conséquence la loi de la conservation de la masse

$$\varrho\, ds = \varrho_0\, ds_0$$

donne

$$\varrho_0 = \varrho\,(1 + \varepsilon). \tag{2,5}$$

En utilisant (2,5) et (2,4) les équations du mouvement s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{T}{1+\varepsilon}\frac{\partial x}{\partial s_0}\right)-\varrho_0\frac{\partial^2 x}{\partial t_2}+(1+\varepsilon)X^*=0 \qquad (x, y, z) \tag{2,6}$$

où

$$X^* = X - \mathcal{R}\frac{\partial x}{\partial t} \qquad (x, y, z). \tag{2,7}$$

À l'équations (2,6) on ajoutera l'équation qui exprime le premier principe de la thérmodynamique.

Soit $\mathcal{E}$ l'énergie interne du fil par unité de longueur de la configuration actuelle. Nous admettrons que la quantité de chaleur absorbée de l'extérieur par un élément infinitésimal du fil est $-h ds_0$ où $h = h(\theta - \theta_e,\ s_0)$ est une fonction régulière, identiquement nulle pour $\theta \equiv \theta_e$ et de même signe que $\theta - \theta_e$ pour $\theta \neq \theta_e$. Sous ces hypotèses, avec les notations

$$\vartheta = \theta - \theta_0, \qquad \vartheta_e = \theta_e - \theta_0$$

le premier principe de la thérmodynamique, sous la forme moleculaire, peut s'écrire [20]

$$-\frac{\partial J_q}{\partial s_0} = h(\vartheta - \vartheta_e,\ s_0) + \frac{d\mathcal{E}}{dt} - T\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{2,8}$$

où J_q est le courant calorique lié à ϑ par la loi classique de Fourier

$$J_q = -\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} \tag{2,9}$$

λ pouvant être consideré comme fonction de ϑ.

Au systèmie formé par les équations (2,6), (2,8), (2,9) sera atachée la loi constitutive.

3. La loi constitutive élastique.

Dans ce qui suit on utilisera une loi constitutive élastique sous la forme

$$T = T(\varepsilon, \vartheta) \tag{3,1}$$

où, la fonction $T(\varepsilon, \vartheta)$ possède toutes les proprietés nécessaire pour pouvoir effectuer les raisonnements qui suivent. Si on tient compte de (3,1), le système (2,6) avec (2,3) dérivée par rapport à s_0 et avec (2,8) et (2,9) devient

$$\frac{T}{1+\varepsilon}\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} - \varrho_0 \frac{\partial x_t}{\partial t} + x_{s_0} \frac{(1+\varepsilon)\dfrac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} + $$
$$+ \frac{x_{s_0}}{1+\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\frac{\partial v}{\partial s_0} + (1+\varepsilon) X^* = 0$$

$$x_{s_0}\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} + y_{s_0}\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0} + z_{s_0}\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0} - (1+\varepsilon)\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} = 0 \tag{3,2}$$

$$\frac{\partial J_q}{\partial s_0} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + h = 0$$

$$\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} + J_q = 0$$

où pour simplifier, nous avons noté $x_{s_0} = \dfrac{\partial x}{\partial s_0}$, $y_{s_0} = \dfrac{\partial y}{\partial s_0}$, etc. Dans les hypotèses formulées dans le premier chapitre, le système (3,2) décrit le mouvement tridimensionnel d'un fil extensible, parfaitement flexible, pour une loi constitutive entière. C'est un système quasilinéaire avec six fonctions inconnues (x, y, z, ε, θ, J_q) et deux variables independantes (s_0, t). La déformation ε peut être eliminée à l'aide de la relation (2,3). Mais elle sera considerée comme une fonction inconnue pour faciliter quelques interpretations ulterieures.

Pour voir quelle méthode d'integration peut être appliquée à ce système, dans ce qui suit on calculera ses lignes caractéristiques. Pour cela nous attacherons au système (3,2) les relations

$$\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} ds_0^2 - \frac{\partial x_t}{\partial t} dt^2 = dx_{s_0} ds_0 - dx_t\, dt \qquad (x,\ y,\ z)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} ds_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt = d\varepsilon$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} ds_0 + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt = d\vartheta \tag{3,3}$$

$$\frac{\partial J_q}{\partial s_0} ds_0 + \frac{\partial J_q}{\partial t} dt = dJ_q$$

où, $\dfrac{ds_0}{dt}$ représente la pente de la ligne caractéristiques que nous cherchons.

En résolvant le système (3,2), (3,3) par rapport a $\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, $\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}$, $\frac{\partial J_q}{\partial t}$, on obtient

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} = \frac{-\lambda\,(\xi\, x_{s_0} + \eta\, y_{s_0} + \zeta\, z_{s_0}) + (1+\varepsilon)^2 J_q \frac{\partial T}{\partial \vartheta}}{\lambda\,(1+\varepsilon)\left\{\varrho_0 \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right\}} \tag{3,4}$$

$$\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} = \tag{3,5}$$

$$= \frac{\lambda\,(1+\varepsilon)^2 \left\{\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \varrho_0 \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\right\} \xi - \lambda\, x_{s_0} \left\{\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \frac{T}{1+\varepsilon}\right\} (\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}) + (1+\varepsilon)^2 J_q x_{s_0} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \left\{\varrho_0 \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 - \frac{}{1-}\right.}{\lambda\,(1+\varepsilon)^2 \left\{\varrho_0 \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 - \frac{T}{1+\varepsilon}\right\} \left\{\varrho_0 \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right\}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\left\{-\lambda(\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}) + (1+\varepsilon)^2 J_q \frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right\} ds_0\, dt^2 + \lambda(1+\varepsilon)\left(\varrho_0\, ds_0^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} dt^2\right) d\varepsilon}{\lambda\,(1+\varepsilon)\left(\varrho_0\, ds_0^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\, dt^2\right) dt} \tag{3,6}$$

$$\frac{\partial J_q}{\partial t} = \frac{J_1}{J_2} \tag{3,7}$$

où

$$J_1 = (1+\varepsilon)\left\{\lambda\, dJ_q\, dt + \left(\lambda \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\, d\vartheta + \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right) d\varepsilon + h\,\lambda\, dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + J_q (1+\varepsilon) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\, ds_0\right) ds_0\right\} \left(\varrho\, ds_0^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} dt^2\right) + \tag{3,7'}$$

$$+ \left\{-\lambda\,(\xi\, x_{s_0} + \eta\, y_{s_0} + \zeta\, z_{s_0}) + (1+\varepsilon)^2 J_q \frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right\} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right) ds_0^2\, dt^2,$$

$$J_2 = \lambda\,(1+\varepsilon)\left(\varrho_0\, ds_0^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}. dt^2\right) dt^2$$

Les notations [13]

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho_0 \left(dx_{s_0} \frac{ds_0}{dt} - dx_t\right) \frac{1}{dt} + (1+\varepsilon)\, X^* \\ \eta &= \varrho_0 \left(dy_{s_0} \frac{ds_0}{dt} - dy_t\right) \frac{1}{dt} + (1+\varepsilon)\, Y_* \\ \zeta &= \varrho_0 \left(dz_{s_0} \frac{ds_0}{dt} - dz_t\right) \frac{1}{dt} + (1+\varepsilon)\, Z^* \end{aligned} \tag{3,8}$$

ont été utilisées dans les relations (3,4), (3,5) (3,6), (3,7), (3,7').

Les relations (3,5), (3,6), (3,7) montrent que deux familles des lignes caractéristiques du système (3,2) sont définies par

$$\varrho_0 \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = \frac{T}{1+\varepsilon} \tag{3,9}$$

deux par

$$\varrho_0 \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} . \tag{3,10}$$

En plus, le système possède la famille des lignes caractéristique

$$dt = 0 \tag{3,11}$$

avec un caractère mixte, hyperbolique-parabolique, tel que montrent (3,6) et (3,7).

On observe que, les lignes caractéristiques définies par (3,9) et (3,10) sont en general des courbes avec la pente variable dépendant de deux fonctions inconnues du système ε et ϑ et donc elles ne sont pas connues si la solution du système (3,2) n'est pas connue.

Au point de vue de la forme, la relation (3,9) coincide avec celle qui correspond au cas dans lequel le changement de la chaleur avec l'éxterieur n'est pas consideré [9]. Dans ce dernier cas le système des équations du problème était totalement hyperbolique mais le système actuel a un caractère intermediaire simultanement hyperbolique-parabolique, la famille des lignes caractéristiques qui introduit ce caractère étant $dt = 0$.

Au point de vue mécanique, les lignes caractéristiques representent des fronts d'ondes. Les caractéristiques (3,9) correspondent aux fronts des ondes propagables avec la vitesse

$$\frac{ds_0}{dt} = \pm\, C_I(\varepsilon, \vartheta) = \pm \sqrt{\frac{T}{\varrho_0 (1+\varepsilon)}} \tag{3,12}$$

et les caractéristiques (3,10) aux fronts des ondes qui ont la vitesse

$$\frac{ds_0}{dt} = \pm\, C_{II}(\varepsilon, \vartheta) = \pm \sqrt{\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}} \tag{3,13}$$

Si on tient compte dans (3,5) par (3,9) il resulte que sur ces lignes caractéristiques sont satisfaites les relations

$$\begin{aligned} dx_t = {} & \pm\, C_I(\varepsilon, \vartheta)\, dx_{s_0} + \\ & + \frac{1}{\varrho_0} \{(1+\varepsilon) X^* - x_{s_0} F^*\}\, dt - \frac{x_{s_0}}{1+\varepsilon} (\pm\, C_I(\varepsilon, \vartheta)\, d\varepsilon - d\nu) \end{aligned} \tag{3,14}$$

ainsi que quatre similaires pour y et z.

De la même manière, admettant que la relation

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{1+\varepsilon}$$

n'ait pas été satisfaite que dans des points isolés, on obtient que sur les lignes caractéristiques (3,10) sont satisfaites les relations

$$\pm\, C_{II}(\varepsilon, \vartheta)\, d\varepsilon - d\nu + \frac{1+\varepsilon}{\varrho_0}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\,\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} + F^*\right) dt = 0. \tag{3,15}$$

Dans (3,12) et (3,14) et aussi dans (3,13) et (3,15) les signes correspondent.

Dans (3,14) et (3,15) ont été utilisées les notations

$$\begin{aligned} d\nu &= \frac{1}{1+\varepsilon}\,(x_{s_0}\, dx_t + y_{s_0}\, dy_t + z_{s_0}\, dz_t) \\ F^* &= \frac{1}{1+\varepsilon}\left(x_{s_0}\, X^* + y_{s_0}\, Y^* + z_{s_0}\, Z^*\right). \end{aligned} \tag{3,16}$$

Donc, v représente la projection sur la tangente du fil dans le point avec les coordonnées x, y, z de la vitesse de ce point, et F^*, la somme des projections des forces extérieures et de la force de la résistance qui correspond à l'unité de longueur sur la tangente dans le même point.

Si on tenait compte de (3,11) dans (3,7) il en résulterait que sur les lignes caractéristiques $dt = 0$ la relation

$$\lambda\, d\vartheta + (1+\varepsilon)\, J_q\, ds_0 = 0 \tag{3,17}$$

est satisfaite.

L'essai d'obtennir d'autres relation satisfaites sur les lignes caractéristiques $dt = 0$ en tenant compte de (3,11) dans (3,6) par exemple, ne donne pas des résultats parce que le numérateur de l'expression (3,6) s'annule identiquement, ce qui représente une consequence du caractère parabolique que les caractéristiques $dt = 0$ possedent simultanement avec le caractère hyperbolique.

Dans ce qui suit nous considererons « les relation du saut » verifiées par la traversée des fronts des ondes que nous avons mises en évidence, pour preciser la nature de ces ondes.

On désignera avec $[\Phi]$ le saut de la fonction Φ quand on traverse un tel front d'onde. Ècrivant les relations (3,3) aux deux parties d'une courbe caractéristiques et tenant compte que dx_{s_0}, dx_{t_0}, etc. sont prises le long des lignes caractéristiques et qu'elles sont des dérivées intérieures, continues par la traversée d'une telle ligne, on obtient les relations de compatibilité cinématique

$$\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] ds_0^2 - \left[\frac{\partial x_t}{\partial t}\right] dt^2 = 0 \qquad (x, y, z)$$

$$(3,18) \qquad \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] ds_0 + \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] dt = 0 \\ &\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] ds_0 + \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] dt = 0 \\ &\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] ds_0 + \left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] dt = 0. \end{aligned}$$

Les raisonements suivants ne sont pas valables sur les lignes caractéristiques $dt = 0$. Les raisonements pour ces lignes seront faites plus tard. Tenant compte de (3,18) dans (3,2) on obtient les relations de compatibilité dynamique

$$\left\{\frac{T}{1+\varepsilon} - \varrho_0 \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\right\} \left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] + x_{s_0} \frac{(1+\varepsilon)\, \partial T/\partial \varepsilon - T}{(1+\varepsilon)^2} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0 \qquad (x, y, z)$$

$$(3,19) \qquad \begin{aligned} &x_{s_0} \left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] + y_{s_0} \left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right] + z_{s_0} \left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right] - (1+\varepsilon) \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0 \\ &\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right) \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = 0 \\ &\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0 \end{aligned}$$

où, pour obtenir les premières trois relations (3,19) nous avons tenu compte de la dernière.

Maintenant, dans (3,19) on tient compte de (3,9) ou de (3,10). Si (3,9) est satisfaite, les premières quatre relations (3,19) donneraient

$$(3,20) \qquad x_{s_0} \left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] + y_{s_0} \left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right] + z_{s_0} \left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right] = 0 \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0.$$

Tenant compte de (3,20) dans la quatrième relation (3,18) on obtient

$$(3,21) \qquad \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0$$

Comparant la dernière relation (3,19) avant l'avant dernière relation (3,18) il résulte

$$\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = 0. \tag{3,22}$$

Tenant compte de (3,21) et (3,22) dans la cinquième relation (3,19) on obtient

$$\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = 0 \tag{3,23}$$

laquelle si introduite dans la dernière relation (3,18) il résulte

$$\left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] = 0. \tag{3,24}$$

Les relations (3,20) montrent que les ondes qui se propagent avec la vitesse (3,12) sont des ondes transversales qui affectent la forme du fil et non la déformation longitudinale ($[\partial \varepsilon / \partial s_0] = 0$). Formellement, ces relations coincident avec celles qui corrèspondent au cas où l'influence de la température n'est pas considerées [13].

Les relations (3,22), (3,23), (3,24) montrent que sur les fronts des ondes transversales les grandeurs au caractère thermique n'ont pas de sauts. Donc, les ondes qui se propagent avec la vitesse (3,12) gardent par rapport à l'effet sur la forme du fil le même caractère que dans le cas classique. Leur vitesse de propagation depend de la température et intervient dans les relations (3,14) satisfaites sur les fronts des ondes transversalles. L'utilisation de ces relations dans un schéma d'intégration numérique introduira donc, des effets thérmiques dans le calcul des fonctions inconnues.

Si dans les premières trois relations (3,19) on tient compte de (3,10) il résultera

$$\frac{\left[\dfrac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{x_{s_0}} = \frac{\left[\dfrac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{y_{s_0}} = \frac{\left[\dfrac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{z_{s_0}} = \frac{\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]}{1+\varepsilon}$$

ou

$$\frac{\left[\dfrac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{x_s} = \frac{\left[\dfrac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{y_s} = \frac{\left[\dfrac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{z_s} = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]. \tag{3.25}$$

Evidemment, la relation suivante est aussi satisfaite

$$\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]^2 + \left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]^2 + \left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]^2 = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]^2$$

Avec des procedés analogues aux ceux utilisés pour les fronts (3,12) on obtient que sur les fronts qui se propagent avec la vitesse (3,13) sont satisfaites les suivantes relations du saut

$$\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right] = 0 \tag{3,26}$$

$$\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right] = \mp\, c_{II}\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}\right]$$

$$\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = \pm\, c_{II}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon} - T\right)\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}\right] \tag{3,27}$$

$$\left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] = -\, c_{II}^2\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon} - T\right)\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}\right]$$

où, les signes superieurs correspondent aux fronts directs et les signes inférieurs, aux fronts inverses.

Les relations (3,25) montrent que les ondes qui se propagent avec la vitesse (3,13) sont des ondes longitudinales en donnant des déformations qui se propagent mais non des modifications de la forme du fil. Formellement, elles coincident avec celles qui correspondent au cas où l'influence de la température n'est pas considerée [13]. Mais les relations (3,27) montrent que les ondes longitudinales portent maintenant des discontinuités des dérivées du courant calorique J_q. Les relations (3,25), (3,27) montrent que tous les sauts qui ne sont pas nuls s'expriment à l'aide du saut de la dérivée $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}$. Il faut remarquer aussi le fait que les sauts $\left[\dfrac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]$, $\left[\dfrac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]$, $\left[\dfrac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]$ des dérivées d'ordre deux des coordonnées sont les projections sur les axes de la discontinuité de la dérivée $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}$.

Sur les ondes longitudinales comme sur les ondes transversales les derivées du premier ordre de la température sont continues, chose qui résulte, dans les deux cas, quand on tient compte dans la cinquième relations (3,18) que la dérivée avec s_0 de la température ϑ n'a pas de saut. Cette dernière chose est une conséquence de la loi de Fourier. Donc, la continuité des dérivées du premier ordre de la température à la traversée d'un front d'onde longitudinale ou transversale est, en dernier lieu, une conséquence de la loi de Fourier, et précisément c'est dans cette loi que la seule dérivée qui intervient est la dérivée de la température par rapport à s_0. La continuité des dérivées du premier ordre de la température étant donnée, dans ce qui suit on établiera le comportement des dérivées d'orde deux quand on travèrse un front d'onde longitudinale ou transversale. Seront utilisées les relations

$$(3,28)\qquad \begin{gathered}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] ds_0 + \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] dt = 0\\ \left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right] ds_0 + \left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial t}\right] dt = 0\\ \left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right] ds_0^2 - \left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial t}\right] dt^2 = 0\\ \left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right] = \frac{\vartheta_{s_0}}{1+\varepsilon}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] + \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right]\end{gathered}$$

ds_0 étant lié de dt soit par la relation (3,9) soit par (3,10).

La dernière des relations (3,28) a été obtenue éliminant J_q entre les dernières deux relations (3,2) et en tenant compte que les dérivèes du premier ordre de la température sont continues quand on travérse soit les lignes caractéristiques (3,9) soit (3,10).

De (3,28) on obtient

$$(3,29)\qquad \left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right] = -\frac{1}{\dfrac{ds_0}{dt}}\left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial t}\right] = \\ = \frac{1}{\left(\dfrac{ds_0}{dt}\right)^2}\left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial t}\right] = \left(\frac{\vartheta_{s_0}}{1+\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\frac{ds_0}{dt}\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right].$$

Soit que la relation (3,9) est satisfaite. Parce que sur les fronts des ondes transversales $\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0$, de (3,29) il résulte que sur ces fronts les relations suivantes sont aussi satisfaites

$$(3,30)\qquad \left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial \theta_t}{\partial t}\right] = 0.$$

Pour une loi constitutive sous la forme

$$T = T(s_0, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \vartheta)$$

les rélation (3,30) satisfaites sur les fronts des ondes transversales et leur vitesse de propagation ont été trouvées par Manacorda [20].

Si la relation (3,10) est satisfaite, en tenant compte que sur les ondes longitudinales $\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \neq 0$, de (3,29) il resulte

$$\left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right] = \mp \frac{1}{C_{II}} \left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial t}\right] = \frac{1}{C_{II}^2} \left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial t}\right] = \left(\frac{\vartheta_{s_0}}{1+\varepsilon} \mp \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right) C_{II}\right) \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \tag{3,31}$$

où les signes superieurs correspondent à un front d'onde longitudinale directe et les signes inférieurs à un front inverse. Donc, pendant que sur les ondes transversales des discontinuités des dérivées d'ordre deux de la température ne se propagent pas, les ondes longitudinales transportent des discontinuités de ces dérivées, leurs expression étant données par (3,31).

L'analyse du raisonement précedent montre que ce dernier résultat est définitivement la conséquence du fait que sur les fronts des ondes transversales $\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0$, pendant que sur les fronts des ondes longitudinales $\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \neq 0$. Donc, la même grandeur que dans le cas classique permetait de faire la différence entre les ondes longitudinales et transversales au point de vue de leur effet mécanique [13], permet aussi de distinguer entre les deux types des ondes au point de vue de leur effet thermique en gardant entièrement leurs propriétés relativement à leurs effets mécaniques propagables. De la forme des relations différentielles satisfaites sur les fronts des ondes il résulte evidemment que les deux types des ondes ne peuvent être separés que dans les cas totalement particuliers, généralement ils se produisent et s'influencent réciproquement. Davantage, si la relation

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{1+\varepsilon}$$

n'est pas satisfaite dans des points isolés, mais sur des portion de la surface

$$T = T(\varepsilon, \vartheta)$$

les deux types des ondes se couplent, ce qui conduit à une propagation à la meme vitesse de leurs effets. Les cas dans lesquels sur l'entière surface

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} < \frac{T}{1+\varepsilon} \tag{3,32}$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} > \frac{T}{1+\varepsilon} \tag{3,33}$$

correspondent à la propagation des ondes transversales avant celles longitudinales et inversement.

Mais, il peut arriver que sur certaines portions soit satisfaite (3,32) (les ondes transversales se propagent avant celles longitudinales) sur des autres portions soit satisfaite (3,33) (les ondes longitudinales se propagent avant celles transversales) dans le dernier cas sur des autres portions nous pouvons avoir des effets couplés.

Un schéma d'intégration fondé sur les relations différentielles satisfaites sur les caractéristique, dépend bien entendu de l'ordre de la propagation des deux types des ondes.

Il reste maintenant à étudier les relations du saut satisfaites quand on travèrse les fronts des ondes avec le caractère intermediaire, hyperbolique-parabolique, $dt = 0$.

De (3,2) il résulte

$$\frac{T}{1+\varepsilon}\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] - \varrho_0\left[\frac{\partial x_t}{\partial t}\right] + x_{s_0}\frac{(1+\varepsilon)\dfrac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T}{(1+\varepsilon)^2}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0 \qquad (z, y, z)$$

$$x_{s_0}\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] + y_{s_0}\left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right] + z_{s_0}\left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right] - (1+\varepsilon)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0$$

$$(3,34) \qquad \left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0$$

la dernière relation (3,34) étant déjà utilisée pour obtenir les autres. Les relations de compatibilité cinématique (3,18) donnent que, sur les fronts $dt = 0$ les relations suivantes sont satisfaites

$$(3,35) \qquad \left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = 0.$$

Tenant compte de (3,35) et (3,34) on obtient

$$(3,36) \qquad \left[\frac{\partial x_t}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial y_t}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial z_t}{\partial t}\right] = 0.$$

Donc, les seules dérivées sur lesquelles nous ne pouvons pas décider sont $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}$, $\dfrac{\partial J_q}{\partial t}$.

La relation

$$(3,37) \qquad \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = 0$$

qui fait la liaison entre les sauts de $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ montre que, si $\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] = 0$, alors nous avons aussi

$$\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0.$$

Utilisant la relation

$$\left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial t}\right] dt + \left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial s_0}\right] ds_0 = 0 \tag{3,38}$$

il résulte que sur les fronts $dt = 0$,

$$\left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial s_0}\right] = 0$$

qui, avec

$$\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial s_0}\right] + \left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] = 0$$

qui résulte de la loi de Fourier dérivée par rapport à t, donne

$$\left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] = 0. \tag{3,39}$$

Si $\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] \neq 0$, la relation (3,37) donne que nous avons aussi $\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] \neq 0$

Dans ce cas, la relation (3,38) et les raisonements fondés sur cette relation ne peuvent pas être considerés. Donc, sur le saut de la dérivée $\partial J_q/\partial t$ nous ne pouvons pas formuler une conclusion, existant la possibilité d'avoir $\left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] \neq 0$.

4. Utilisation de la loi de Kaliski.

S. Kaliski propose [22] l'utilisation dans la thérmodynamique d'une loi de la forme

$$\mathcal{T}\frac{d\vec{J}_q}{dt} + \vec{J}_q = -\lambda \operatorname{grad} \vartheta \tag{4,1}$$

à la place de la loi classique de Fourier, où $\mathcal{T}$ est un coefficient qui a la dimension du temps et λ, le coefficient de conduction thérmique.

Avec la loi (4,1) et avec la loi constitutive entière donnée par (3,1) le système des équations du problème est

$$\frac{T}{1+\varepsilon}\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} - \varrho_0 \frac{\partial x_t}{\partial t} + x_{s_0}\frac{(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} +$$

$$+\frac{x_{s_0}}{1+\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} + (1+\varepsilon) X^* = 0 \qquad (x, y, z)$$

(4,2)

$$x_{s_0}\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} + y_{s_0}\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0} + z_{s_0}\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0} - (1+\varepsilon)\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} = 0$$

$$\frac{\partial J_q}{\partial s_0} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + h = 0$$

$$\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} + \mathcal{T}\frac{\partial J_q}{\partial t} + J_q = 0.$$

Pour le calcul des caractéristiques nous procéderons de la même manière comme dans le troisième chapitre.

On obtient

(4,3)
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} = \frac{E_1}{E_2}$$

où

(4,3)′

$$E_1 = -\frac{\lambda}{1+\varepsilon}(\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}) + J_q(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \vartheta} -$$

$$-\mathcal{T}\frac{ds_0}{dt}\left\{\left(\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)d\varepsilon + h dt + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}d\vartheta\right)(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \vartheta} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}(\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0})\, ds_0\right\}\frac{1}{dt} - \mathcal{T}(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\, d J_q \frac{1}{dt}$$

$$E_2 = -\left\{\mathcal{T}\varrho_0(1+\varepsilon)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^4 +\right.$$

$$\left. + \left((\mathcal{T}(1+\varepsilon)\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\frac{\partial T}{\partial \vartheta} - \mathcal{T}(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} - \lambda\varrho_0\right)\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 + \lambda\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right\}$$

et

(4,4)
$$\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} = \frac{E_3}{E_4}$$

où

$$E_3 = -dt^2\left(\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\frac{Edt^4}{(1+\varepsilon)^2} + J_q\, x_{s_0}\, dt^2\, \frac{\partial T}{\partial \vartheta} I\right) -$$

$$- \mathcal{T}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\left(- ds_0\,\frac{Edt^4}{(1+\varepsilon)^2} + d\vartheta\, dt^2\, x_{s_0}\frac{\partial T}{\partial \vartheta} I\right) ds_0 - \mathcal{T}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\cdot$$

(4,4)′

$$\cdot\left\{- \frac{1}{1+\varepsilon}\,\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\, dt^4\, ds_0\,(x_{s_0}(\eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}) - (y_{s_0}^2 + z_{s_0}^2)\,\xi) + dt^2 d\varepsilon\, x_{s_0}\frac{\partial T}{\partial \vartheta} I\right\} ds_0 -$$

$$- \mathcal{T}\, hdt^3\,\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\, I\, ds_0$$

$$E_4 = I\left(\lambda dt^2\, II - \mathcal{T}\, ds_0^2\, dt^2\,(1+\varepsilon)\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\frac{\partial T}{\partial \vartheta} - \mathcal{T}\, ds_0^2\,(1+\varepsilon)\,\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\, II\right)$$

et des expression similaires pour y et z .

Dans (4,4)′ ont été utilisées les notations

$$I = \varrho_0\, ds_0^2 - \frac{T}{1+\varepsilon}\, dt^2$$

(4,4)″

$$II = \varrho_0\, ds_0^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\, dt^2$$

$$E = (1+\varepsilon)^3\left\{\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \varrho_0\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\right\}\xi - x_{s_0}\left\{(1+\varepsilon)\,\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T\right\}(\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}).$$

De (4,3) et (4,4) il résulte que, les caractéristiques du système des équations du problème sont données par

(4,5)
$$\varrho_0\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = \frac{T}{1+\varepsilon}$$

et

(4,6)
$$\mathcal{T}\varrho_0\,(1+\varepsilon)\,\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^4 +$$

$$+ \left(\mathcal{T}(1+\varepsilon)\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\frac{\partial T}{\partial \vartheta} - \mathcal{T}\,(1+\varepsilon)\,\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\,\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} - \lambda\varrho_0\right)\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 + \lambda\,\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Nous montrerons que (4,6) considrée comme une équation algebrique en $\frac{ds_0}{dt}$ a des racines réelles, différentes, donc le système des équations du problème est totalement hyperbolique.

Il est suffisant de montrer que

$$K_1 = \left(\mathcal{T}(1+\varepsilon)\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon} - T\right)\frac{\partial T}{\partial\vartheta} - \mathcal{T}(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta} - \lambda\varrho_0\right)^2 -$$

$$- 4\mathcal{T}\lambda\varrho_0(1+\varepsilon)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta}\frac{\partial T}{\partial\varepsilon} > 0$$

$$K_2 = \mathcal{T}\lambda\varrho_0(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta} > 0$$

$$K_3 = \lambda\varrho_0 + \mathcal{T}(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta} - \mathcal{T}(1+\varepsilon)\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon} - T\right)\frac{\partial T}{\partial\vartheta} > 0$$

En effet, de la condition que l'entropie définie par

$$\theta d\,S = d\mathcal{E} - T\,d\varepsilon = \left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon} - T\right)d\varepsilon + \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta}\,d\theta \tag{4,8}$$

soit une fonction d'état, on obtient

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon} = T - \theta\frac{\partial T}{\partial\vartheta} \tag{4,9}$$

mais

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta} = C_v \tag{4,10}$$

est la chaleur spécifique correspondante à l' unité de volume en absence de déformation.

Si l'expression de l'énergie interne $\mathcal{E}$ est connue, (4,9) est une équation qui détermine T Par suite, la fonction $T(\varepsilon, \vartheta)$ ne peut être arbitrairement choisie.

Si on prendre S comme variable thérmodynamique on deduit de (4,8)

$$T = \frac{\partial A}{\partial\varepsilon} \qquad S = -\frac{\partial A}{\partial\theta}$$

où

$$A = \mathcal{E} - \theta S$$

est la fonction d'énergie libre de Helmholtz.

On prouve [23] que les phénomènes thérmoélastiques sont correctement décrits si $\mathcal{E}$ est un polynome en S et en les composantes de déformation, ou bien est une fonction qui peut être approximée par un tel polynome.

Nous prendrons pour la variation de l'entropie une loi de type Gibbs.

On sait que en général si le tenseur de tension se décompose en deux parties [21], [8]

$$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(r)}$$

où $\Pi^{(r)}$ est la partie réversible et $\Pi^{(i)}$ la partie liée aux processes iréversible (par exemple les phénomènes de viscosité) et si la vitesse de l'entropie $\frac{dS}{dt}$ se décompose sous la forme suivante

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d^{(i)}S}{dt} + \frac{d^{(e)}S}{dt}$$

où $\frac{d^{(e)}S}{dt}$ est la variation de l'entropie due dex facteurs extérieurs et $\frac{d^{(i)}S}{dt}$ est la production de l'entropie, alors, la deuxième loi de la thermodynamique

$$\frac{d^{(i)}S}{dt} \geq 0$$

a l'expression

$$-\frac{1}{\theta^2}\vec{J}_q \operatorname{grad}\theta + \frac{1}{\theta}\Pi^{(i)} : \operatorname{Grad}\vec{v} \geq 0. \tag{4,11}$$

Dans notre cas $\Pi^{(i)} \equiv 0$ et cette expression devient

$$-\frac{1}{\theta^2} J_q \frac{\partial\theta}{\partial s} \geq 0. \tag{4.12}$$

Si J_q est lié à θ par la loi classique de Fourier, (4,12) revient à condition evidente

$$\frac{\lambda}{\theta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2 \geq 0.$$

Remarquons que si la loi (4.1) est adoptée, la condition (4,12) revient à

$$\left(\lambda \frac{\partial\theta}{\partial s} + \tau \frac{\partial J_q}{\partial t}\right)\frac{\partial\theta}{\partial s} \geq 0$$

et on ne saurait dire si elle est satisfaite avant de connaître la solution du système (4,2).

Tenant compte de (4,9) et (4,10) la deuxième et la troisième relation (4,7) sont evidentes, mais la première peut être ecrite sous la forme

$$K_1 = \mathcal{T}^2 (1+\varepsilon)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\mathcal{T} C_v (1+\varepsilon) \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \lambda \varrho_0\right)^2 +$$

$$+ 2\, \mathcal{T} \theta (1+\varepsilon) \left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)^2 \left(\mathcal{T} C_v (1+\varepsilon) \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} + \lambda \varrho_0\right)$$

et donc nous avons aussi $K_1 > 0 \left(\mathcal{T} > 0,\ \dfrac{\partial T}{\partial \varepsilon} > 0\right)$.

Pour un corps élastiques avec la dépendence entre la tension, la déformation et la température donnée par la loi de Hooke, les relations qui correspondent aux (4,9) et (4,10) ont été données par Biot [24].

Donc, le système des équations du problème est totalement hyperbolique, il possède six familles des lignes caractéristiques différentes, deux définites par (4,5) et les autres quatre par (4,6). La relation (4,5) definit des fronts des ondes propagables avec la vitesse

$$\frac{ds_0}{dt} = \pm C_I(\varepsilon, \vartheta) = \pm \sqrt{\frac{T}{\varrho_0 (1+\varepsilon)}} \tag{4,13}$$

mais (4,6) des fronts dont la vitesse de propagation est donnée par

$$\frac{ds_0}{dt} = \pm C_{II}^{(i)}(\varepsilon, \vartheta) \qquad i = 1, 2 \tag{4,14}$$

où, avec $+C_{II}^{(1)}$, $-C_{II}^{(1)}$, $+C_{II}^{(2)}$, $-C_{II}^{(2)}$ ont été notées les racines de l'équation

$$\mathcal{T} C_v \varrho_0 (1+\varepsilon) C_{II}^4 + \left(\mathcal{T} (1+\varepsilon) \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right) \frac{\partial T}{\partial \vartheta} - \right.$$

$$\left. - \mathcal{T} C_v (1+\varepsilon) \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \lambda \varrho_0\right) C_{II}^2 + \lambda \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0. \tag{4,15}$$

Si on tient compte dans (4,4) de (4,13) il résulte que sur les fronts propagables avec la vitesse donnée par (4,13) sont satisfaites les relations suivantes

$$\left(-\frac{\lambda}{1+\varepsilon} + \mathcal{T}\, C_v\, C_I^2\right) \left((1+\varepsilon) \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T\right) \Big\{ \pm C_I\, dx_{s_0} - dx_t + \tag{4,16}$$

$$+ \frac{1}{\varrho_0} \left[(1+\varepsilon) X^* - x_{s_0} F^*\right] dt - \frac{x_{s_0}}{1+\varepsilon} \left(\pm C_I\, d\varepsilon - dv\right) \Big\} +$$

$$+ \mathcal{T} C_I^2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right) \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big\{ x_{s_0} \left[\pm C_I \, d\varepsilon - dv + \frac{1+\varepsilon}{\varrho_0} F^* \, dt \right] -$$

$$- (1+\varepsilon) \left[\pm C_I \, dx_{s_0} - dx_t + \frac{1+\varepsilon}{\varrho_0} X^* \, dt \right] \Big\} = 0$$

et des relations similaires pour y et z.

Dans (4,13) et (4,16) les signes superieurs et inferieurs correspondent.

De la même manière on montre que sur les fronts propagables avec les vitesses données par (4,14) sont satisfaites les relations differentielles

$$\left(\frac{\lambda}{1+\varepsilon} + \mathcal{T} C_v \, C_{II}^{(i)^2}\right) \left(\pm C_{II}^{(i)} d\varepsilon - d\nu + \frac{1+\varepsilon}{\varrho_0} F^* \, dt\right) \pm$$

$$(4,17) \qquad \pm \frac{\mathcal{T}}{\varrho_0} C_{II}^{(i)} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \left(\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right) d\varepsilon + h dt + C_v \, d\vartheta \right) +$$

$$+ \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} (\mathcal{T} d \, J_q - J_q \, dt) = 0 \qquad i = 1,2.$$

Dans (4,14) et (4,17) les signes superieures et inferieurs correspondent.

De la même manière que dans le chapitre précedent seront considerées les relations du saut satisfaites quand on travèrse les fronts des ondes qui ont été mises en évidence.

Les relations de compatibilité cinématique sont (3,18).

De (4,2) tenant compte de (3,18) on obtient les relations de compatibilité dynamique

$$\left\{ \frac{T}{1+\varepsilon} - \varrho_0 \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 \right\} \left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] + x_{s_0} \frac{(1+\varepsilon) \dfrac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T}{(1+\varepsilon)^2} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] +$$

$$+ \frac{x_{s_0}}{1+\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0 \qquad (x, y, z)$$

$$(4,18) \qquad x_{s_0} \left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] + y_{s_0} \left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right] + z_{s_0} \left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right] - (1+\varepsilon) \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] - \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right) \left(\frac{ds_0}{dt}\right) \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] - C_v \left(\frac{ds_0}{dt}\right) \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0$$

$$\frac{\lambda}{1+\varepsilon} \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] - \mathcal{T} \left(\frac{ds_0}{dt}\right) \left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = 0.$$

Soit que nous nous trouvons sur les lignes caractéristiques (4,5). Alors, les premières trois relations (4,18) conduisent à la relation

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \frac{T}{1+\varepsilon}\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] + \frac{\partial T}{\partial \vartheta}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0$$

qui avec les dernières deux relations (4,18) forment un système homogène pour $\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]$, $\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right]$, $\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right]$.

La condition qui doit être satisfaite pour avoir une solution non triviale est

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \frac{T}{1+\varepsilon}\right)(\mathcal{T}C_v T - \lambda \varrho_0) + \mathcal{T}\theta T\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right)^2 = 0$$

et elle conduit à une forme particulière la loi constitutive. Généralement, le système admet donc, seulement la solution banale

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right]$$

et des équations de compatibilité cinématique (3,18) il résulte en conseqence

$$\left[\frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] = 0.$$

L'égalité à zero du saut de la dérivée de la déformation par rapport à s_0 et la quatrième relation (4,18) conduisent à (3,20). Les ondes qui se propagent avec la vitesse (4,13) gardent donc le caractère transversal. L'adoptation de la loi (4,1) à la place de la loi classique de Fourier n'apporte pas des modifications calitatives en ce qui concerne la vitesse de propagation des ondes transversales et leurs effets. Au point de vue cantitatif, les choses se presentent d'une autre manière, parce que les relations différentielles satisfaites sur les fronts des ondes se modifient.

Soit que les relations suivantes sont satisfaites

$$\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = C_{II}^{(i)^2}(\varepsilon, \vartheta) \qquad i = 1,2. \tag{4,19}$$

Les premières trois relations (4,18) donnent les sauts $\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]$, $\left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]$, $\left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]$, et les introduisant dans la quatrième, on obtient

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \varrho_0 C_{II}^{(i)^2}\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] + \frac{\partial T}{\partial \vartheta}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0 \tag{4,20}$$

qui avec les dernières deux relations (4,18)

$$(4,21)\qquad \begin{aligned} &\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] - \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right) C_{II}^{(i)} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] - C_v\, C_{II}^{(i)} \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0 \\ &\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] - \mathcal{T}\, C_{II}^{(i)} \left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = 0 \end{aligned}$$

forment un système homogène pour $\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right],\ \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right],\ \left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right].$

(Nous avons admis que nous nous trouvons sur les ondes directes. Le raisonement qui correspond aux ondes inverses se produit en changeant $C_{II}^{(i)}$ en $-C_{II}^{(i)}$.

Tenant compte que $C_{II}^{(i)}$ est une racine de l'équation (4,15) on montre facilement que ce système admet des solutions non banales. De (4,20) il résulte en tenant compte de la cinquième relation (3,18)

$$(4,22)\qquad \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = -\frac{1}{C_{II}^{(i)}}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = \frac{\left(\varrho_0\, C_{II}^{(i)2} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right)}{\frac{\partial T}{\partial \vartheta}} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]$$

qui avec la première relation (4,21) donne

$$(4,23)\qquad \begin{aligned} \left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] &= -\frac{1}{C_{II}^{(i)}}\left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] = \\ &= C_{II}^{(i)}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T + \frac{C_v}{\frac{\partial T}{\partial \vartheta}}\left(\varrho_0\, C_{II}^{(i)2} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right)\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \end{aligned}$$

qui coincide avec

$$\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = \frac{\lambda}{\mathcal{T}(1+\varepsilon)\, C_{II}^{(i)}\, \frac{\partial T}{\partial \vartheta}}\left(\varrho_0\, C_{II}^{(i)2} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]$$

qui résulte en comparant (4,22) avec la dernière relation (4,21). Pour démonstration on tient compte que $C_{II}^{(i)}$ est un racine de l'équation (4,15).

La relation (4,20) et les premières relations (4,18) donnent

$$(4,24)\qquad \frac{\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{x_s} = \frac{\left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{y_s} = \frac{\left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{z_s} = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right].$$

Les relations (4,24) montrent que les ondes qui se propagent avec la vitesse donnée par (4,14) gardent le caractère longitudinal et produisent des déformations propagables $\left(\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \neq 0\right)$ sans donner des modifications de la forme du fil.

Mais les relations (4,22) et (4,23) montrent que sur ces ondes, se propagent simultanèment des effets couplés, mécaniques-thermiques, les relations du couplage étant (4,22), (4,23). Ce dernier résultat distingue essentiellement les ondes qui se propagent avec la vitesse donnée par (4,14) en comparaison aux ondes transversales qui produisent seulement des modifications de la forme du fil sans porter des discontinuitées des grandeurs qui ont un caractère thermique (le cas classique) mais aussi en comparaison avec les ondes longitudinales obtenues en utilisant la loi classique de Fourier, au long desquelles les dérivées du premier ordre des grandeurs avec caractère thermique etaient aussi continues.

5. Quelques observations et conclusions.

Comparant les résultats obtenus dans le quatrième chapitre avec ceux qui ont été obtenus dans le troisième on peut observer que :

a) l'utilisation de la loi proposée par Kaliski conduit à un système des équations totalement hyperbolique et non d'un type intermediaire, hyperbolique-parabolique, qu'on obtiendrait si on utilisait la loi classique de Fourier

b) les ondes longitudinales transportent des effets mécaniques-thermiques qui s'influecent réciproquement, chose qui les distingue des ondes longitudinales qui corrispondent au cas classique.

c) pour calculer les vitesses de propagation des ondes longitudinales il est nécessaire de connaître les valeurs de $\mathcal{T}$.

Dans cette direction est annoncé [22] un travail [25] où seront exposées des méthodes pour mesurer $\mathcal{T}$.

d) quand nous avons utilisé la loi (4,1) le premier principe de la thérmodynamique a été gardé sous la forme classique. Ça signifie que nous avons consideré des cas pour lesquels la dérivée avec le temps de « l'énergie cinetique-thermique » (introduit dans le premier principe pour qu'il soit compatible avec la loi proposée par Kaliski) peut être negligée ([22], p. 217).

e) utilisant les relations différentielles satisfaites sur les lignes caractéristiques, le système des équations du problème peut être numeriquement integré avec les même méthodes utilisées dans le cas où l'influence de la température n'etait pas considerée [13], [15], [16], [17].

BIBLIOGRAPHIE

[1] RAKHMATULIN, H. A. Prikl. Mat Mekh., 9, 91, 1945.

[2] » » » Prikl. Math. Mekh., 9, 449, 1945.

[3] » » » Prikl. Math. Mekh., 11, 379, 1947.

[4] » » » Uch. zap. Mosk. gos. Univ., 4, 1951.

[5] RYABOVA, E. V. Vest. Moskovsk. Univ., 10, 85, 1953.

[6] SMITH, J. C., MC. CRACKIN, F. L. and SCHIEFER, H. J Textile Res. J. 26, 821, 1956.

[7] » » » » » » » » » » » Textile Res. J. 28, 288, 1958.

[8] CRISTESCU, N. *Dynamic Plasticity*, North-Holland Publ. Comp. Amsterdam 1967.

[9] » » Prikl. Mat. Mekh. 18, 257, 1954.

[10] » » *Probleme dinamice în teoria plasticitàtii*, Editura Tehnica, Bucuresti, 1959.

[11] PAVLENKO, A. L. Izv. Akad. Nauk, S.S.S.R. Otd. Tekh Nauk, Mekh. Masch. 4, 112, 1959.

[12] KELLER, J. B. Amer J. Phys. 27, 584, 1959.

[13] CRISTESCU, N. Arch. Mech. Stoss., 12, 564 1960.

[14] » » J. Mech. Phys, Solids, 9, 165, 1961.

[15] » » *Some problems of the mechanics of extensible strings*, in *Stress waves in anelastic solids*, Springer Verlag, 1963.

[16] CRISTESCU, N. *The braking of high-speed moving bodies by extensible strings* in Proc. 4th. Int. Cong· Rheology, Brown Univ., 1963.

[17] CRISTESCU, N. J. Mech. Phys. Solids, 12, 269, 1964.

[18] » » Analele Univ. Bucuresti Ser. St. Nat. Mat. Fix. XI, 34, 1962.

[19] » » J. de Mec 4, 2, 1965.

[20] MANACORDA T. Riv. Mat. Univ. Parma, 9, 13, 1958.

[21] DE GROOT S. R. and P. MAZUR, *Non Equilibrium Thermodynamics*. North-Holland Publ. Comp. Amsterdam, 1962.

[22] KALISKI S. Bull. de l'Acad. Pol. des Sc. XIII, 211, 1965.

[23] GEEN, A. E. and ADKINS J. E. *Large elastic Deformations*. Oxford, 1960.

[24] BIOT M. A. J. Appl. Phys, 27, 240, 1956.

[25] KALISKI S. Bull W. A. T. (in press).

Faculté de Mathématique-Mécanique
Rue de l'Académie 14
Bucarest, Romania