ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JACQUES VEY

Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, nº 4 (1970), p. 641-665

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_4_641_0>

SUR LES AUTOMORPHISMES AFFINES DES OUVERTS CONVEXES SAILLANTS

par JACQUES VEY

Soit Ω un ouvert convexe dans un espace affine E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On dira que Ω est *saillant* s'il ne contient aucune droite affine entière. Dans l'espace vectoriel des translations de E, le *cône asymptote* de Ω est l'ensemble des vecteurs u tels que, quel que soit $x \in \Omega$, la demi-droite

$$\{x + tu \mid t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

soit contenue dans Ω : c'est un cône convexe, fermé, saillant si Ω est saillant.

Soit G un groupe de transformations affines de E : on dira que G balaye Ω si $G\Omega = \Omega$, et s'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $GK = \Omega$ (le quotient $G \setminus \Omega$ est alors quasi-compact); on dira que G *divise* Ω s'il le balaye, et si, muni de la topologie discrète, il opère proprement dessus (le quotient $G \setminus \Omega$ est alors compact).

Le but du présent article est de démontrer les quatre théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. *Soit Ω un cône ouvert convexe saillant dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et G un groupe de transformations linéaires balayant Ω. Si le sous-espace vectoriel G-stable L est engendré par le cône $\bar{\Omega} \cap L$, les sections*

$$\Omega_x = \Omega \cap (x + L)$$

sont des cônes, quel que soit x dans Ω.

THÉORÈME 2. *Soit Ω un ouvert convexe saillant dans un espace affine E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, dont le cône asymptote est d'intérieur non vide*

Pervenuto alla Redazione il 20 Marzo 1970.

dans l'espace vectoriel des translations de E. Si un groupe de transformations affines balaye Ω, Ω est un cône.

THÉORÈME 3. *Soit Ω un cône ouvert convexe saillant dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Si un groupe G de transformations linéaires divise Ω, il opère dans E de façon semisimple.*

THÉORÈME 4. *Soit Ω un ouvert convexe saillant dans un espace affine E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Si un groupe de transformations affines divise Ω, Ω est un cône.*

Le théorème 4 avait déjà été démontré par J. L. KOSZUL dans le cas où le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ des automorphismes affines de Ω est transitif sur Ω ([6]); il a établi en outre que le groupe $\mathrm{Aut}\,\Omega$ opère alors semi-simplement dans E ([7]), ce qui pourrait se déduire du théorème 3.

Le § 1 est consacré à un rappel rapide de notions classiques sur les cônes ouverts convexes saillants; les § 2 et 3 développent quelques résultats nécessaires dans la suite, et ayant un certain intérêt propre. La démonstration du théorème 1 fait l'objet des § 4 et 5, et le théorème 3 est obtenu au § 6. On déduit les théorèmes 2 et 4 des théorèmes 1 et 3 au § 7. Enfin, au § 8, on examine rapidement les particularités du cas où G est un groupe de Lie transitif sur Ω.

§ 1. Cône dual et fonction caractéristique.

Dans tout ce §, Ω désigne un cône ouvert convexe saillant dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Pour la démonstration des résultats rappelés ici, on se réfèrera à [5] et [8].

1. Dans l'espace dual E^* de E, on appelle Ω^* l'ensemble des formes linéaires positives (strictement) sur $\bar{\Omega} - \{0\}$: c'est un cône ouvert convexe et saillant, appelé *cône dual de Ω*.

Si $\xi \in \Omega^*$, l'intersection

$$\Omega \cap \{x \in E \mid \xi \mid x = 1\}$$

est bornée.

2. On désignera par $\mathrm{Aut}(\Omega)$ le groupe des transformations linéaires de E conservant Ω. Le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ opère sur Ω^* par la représentation duale:

$$\tilde{g}\cdot\xi = {}^t g^{-1}(\xi) = \xi \circ g^{-1}$$

quel que soit $g \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ et $\xi \in E^*$.

3. Soit $d\xi$ la mesure de Lebesgue sur E^*. L'intégrale

$$\varphi(x) = \int_{\Omega^*} e^{-\xi \mid x}\, d\xi$$

définit une fonction φ analytique sur Ω, à valeurs dans $]0, +\infty[$, appelée *fonction caractéristique du cône* Ω.

a) La fonction φ est strictement log-convexe, et elle tend vers $+\infty$ au bord de Ω.

b) Quels que soient $x \in \Omega$ et $g \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, $\varphi(gx) = |\det g|^{-1}\varphi(x)$.

c) La forme différentielle $\alpha = d\varphi/\varphi$ est invariante par $\mathrm{Aut}(\Omega)$; si $x \in \Omega$ et $u \in E$,

$$\alpha_x \mid u = -\int_{\Omega^*} \xi \mid u \cdot e^{-\xi \mid x}\, d\xi$$

en particulier, $\alpha_x \in -\Omega^*$.

d) La 2-forme différentielle symétrique $D\alpha = d^2 \log\varphi$ est invariante par $\mathrm{Aut}(\Omega)$, elle est définie positive en tout point de Ω, et définit ainsi une structure riemannienne invariante sur Ω. (Le caractère positif de $D\alpha$ résulte de la formule

$$d^2\varphi(u, v) = \int_{\Omega^*} (\xi \mid u)(\xi \mid v)\, e^{-\xi \mid x}\, d\xi$$

et de l'inégalité de Schwarz).

Cette structure riemannienne induit sur Ω une distance invariante qui est souvent difficile à expliciter; ce qui fait qu'on lui préfère en général la distance de Hilbert, qui sera introduite au § 3.

4. On définit un difféomorphisme $*: \Omega \to \Omega^*$ par la formule

$$x^* = -\alpha_x .$$

D'après le n⁰ 3, *c*), cette application est bien à valeurs dans Ω^*; sa jacobienne est (au signe près) la matrice des dérivées secondes de $\psi = \log\varphi$; elle est donc inversible; la bijectivité est établie dans [6], § 4; on pourrait aussi faire $L = E$ au § 4 n⁰ 5, l'application η qui y est étudiée coïncidant alors avec $*$).

Un vecteur $x \in \Omega$ est une forme $\xi \in \Omega^*$ seront dits *conjugués par rapport à* Ω si $\xi = x^*$; quels que soient $x \in \Omega$ et $g \in \mathrm{Aut}(\Omega)$,

$$(gx)^* = \tilde{g} \cdot x^*.$$

LEMME 1. *Si un sous-groupe G de* Aut (Ω) *belaye* (resp. *divise*) *Ω, il balaye* (resp. *divise*) *Ω^*.*

C'est un corollaire immédiat de la formule précédente, et du fait que l'application $x \longrightarrow x^* = -\alpha_x$ est un difféomorphisme.

En général, la conjugaison par rapport à Ω et celle par rapport à Ω^* sont deux choses distinctes; cf. [6] § 4 Prop. 10.

5. PROPOSITION 1. *Le groupe* Aut (Ω) *est fermé dans* $GL(E)$, *et il opère proprement sur Ω.*

La première assertion est à peu près évidente. Soient donc K et L deux compacts inclus dans Ω, et $C \subset \operatorname{Aut}(\Omega)$ l'ensemble

$$C = \{g \in \operatorname{Aut}(\Omega) \mid gK \cap L \neq \varnothing\}$$

dont il s'agit de montrer qu'il est compact. Pour $x \in \Omega$, posons

$$Q_x = \Omega \cap (x - \Omega)$$

c'est un ouvert borné de E. Soient

$$A = \bigcap_{x \in K} Q_x \qquad B = \bigcap_{x \in K} Q_x$$

ces ensembles sont bornés et d'intérieur non vide. Si $g \in \operatorname{Aut}(\Omega)$, $gQ_x = Q_{gx}$; ce qui fait que si $g \in C$, $gA \subset B$: C est donc relativement compact dans $\operatorname{End}_{\mathbb{R}} E$.

Soit donc $\overline{C}$ l'adhérence de C dans $\operatorname{End}_{\mathbb{R}} E$, compacte. Montrons que $\overline{C} \subset \operatorname{Aut}(\Omega)$. Si $g \in C$, il existe $x \in K$ tel que $gx \in L$; comme

$$\varphi(gx) = |\det g|^{-1} \varphi(x)$$

on voit que $|\det g|$ appartient à l'ensemble

$$\left\{ \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} \,\middle|\, x \in K \;\; y \in L \right\}$$

qui est un compact de $]0, +\infty[$. Il en résulte que $\overline{C} \subset GL(E)$, et comme $\operatorname{Aut}(\Omega)$ est fermé dans $GL(E)$, $\overline{C} \subset \operatorname{Aut}(\Omega)$. D'un autre côté, C est manifestement fermé dans Aut (Ω), donc $C = \overline{C}$ est compact, *cqfd.*

Une conséquence de ce résultat classique est que si l'on a un point $a \in \Omega$, et une suite $\sigma_n \in \operatorname{Aut}(\Omega)$ telle que $\sigma_n a$ tende vers a, on peut extraire une sous-suite convergeant vers un automorphisme linéaire σ de Ω, avec évidemment $\sigma a = a$.

§ 2. Structure du commutant.

1. THÉORÈME 5. *Soit Ω un cône ouvert convexe saillant de l'espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et G un groupe de transformations linéaires qui balaye Ω. Soit A une sous-algèbre associative unitaire de* $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} E$ *dont les éléments commutent avec tous les éléments de G. Alors*

a) $A = \bigoplus_1^r \mathbb{R} p_i$ *où les p_i forment un système complet de projecteurs orthogonaux dans E;*

b) $E = \bigoplus_1^r E_i$, *où les $E_i = p_i(E)$ sont G-stables:*

c) $\Omega = \prod_1^r p_i(\Omega)$, *où les $\Omega_i = p_i(\Omega)$ sont des cônes ouverts convexes saillants dans E_i, G-stables.*

DÉMONSTRATION: 1⁰) Soit A^0 la composante neutre du groupe des éléments inversibles de A: *le groupe A^0 est contenu dans le groupe des automorphismes linéaires de Ω.*

En effet, soit K un compact de Ω tel que $GK = \Omega$, et V un voisinage de 1 dans A^0 assez petit pour que VK et $V^{-1}K$ soient inclus dans Ω. Alors, pour $u \in V$,

$$u\Omega = uGK = GuK \subset G\Omega = \Omega$$

et de même $u^{-1}\Omega \subset \Omega$. Ainsi $V \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$, donc $A^0 \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$.

2⁰) Il n'y a pas de nilpotent non nul dans l'algèbre associative A Sinon, on y trouverait un élément $X \neq 0$ tel que $X^2 = 0$ et A^0 contiendrait le groupe à un paramètre $1 + tX$ $(t \in \mathbb{R})$. Or l'orbite d'un point $a \in \Omega - \mathrm{Ker}\, X$ pour ce groupe est une droite affine, ce qui contredit le caractère saillant de Ω.

3⁰) Il en résulte ([1], § 6 n⁰ 4 cor. 2) que A est semi-simple et donc (ibid. § 5 n⁰ 3 théorème 1) que $A = \bigoplus_1^r A_i$ où les A_i sont des idéaux bilatères, isomorphes (ibid. § 5 n⁰ 4 th. 2) à des algèbres de matrices sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Toujours à cause de l'absence de nilpotents non nuls dans A, ces algèbres sont d'ordre 1, et les idéaux A_i isomorphes à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$; le groupe A^0 est alors produit direct des groupes A_i^0 isomorphes à $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{C}^*$ ou $\mathbb{H}^*$ ($\mathbb{R}^+$ désigne le groupe multiplicatif des réels positifs, $\mathbb{C}^*$ (resp $\mathbb{H}^*$) le groupe des nombres complexes (resp des quaternions) non nuls).

4⁰) En fait, tous les idéaux A_i sont isomorphes à $\mathbb{R}$. Si en effet l'un deux, disons A_1, était isomorphe à $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, on pourrait trouver un opérateur $u \neq 0$ dans A_1 tel que la droite affine

$$\{e_1 + tu \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(où e_1 est l'idempotent tel que $A_1 = Ae_1$) soit incluse dans A_1^0. La droite affine

$$\{1 + tu \mid t \in \mathbb{R}\}$$

serait alors incluse dans $A^0 \subset \operatorname{Aut} \Omega$. Or Ω est saillant et par conséquent, quel que soit $x \in \Omega$, l'ensemble $(1 + \mathbb{R}u)\,x$ est réduit au point x. Il s'ensuit que $u = 0$, ce qui est contradictoire.

Tous les idéaux A_i étant isomorphes à $\mathbb{R}$, l'assertion *a*) est démontrée ; et l'assertion *b*) en résulte trivialement.

5⁰) Il est clair que $\overline{\Omega} \subset \prod_1^r p_i(\overline{\Omega}) \subset \prod_1^r \overline{\Omega}_i$. Inversement, si $x_i \in \Omega_i$, c'est que $x_i = p_i(x)$, avec $x \in \Omega$; et

$$x_i = \lim_{t \to -\infty} \left(p_i + \sum_{j \neq i} e^t p_j\right) x$$

où la parenthèse est un élément de $A^0 \subset \operatorname{Aut}(\Omega)$, ie. $\Omega_i \subset \overline{\Omega}$, et $\overline{\Omega}_i \subset \overline{\Omega}$; comme l'enveloppe convexe de la réunion des $\overline{\Omega}_i$ est leur produit cartésien, on conclut

$$\overline{\Omega} = \prod_1^r \overline{\Omega}_i\,.$$

L'assertion *c*) en résulte aussitôt.

2. LEMME 2. *Soit Ω un cône ouvert convexe saillant d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et G un groupe linéaire balayant Ω. A toute décomposition de E*

$$E = \oplus E_i$$

G-stable, s'associe une factorisation

$$\Omega = \Pi\, \Omega_i$$

où Ω_i est un cône ouvert convexe saillant dans E_i, image de Ω par le projecteur $p_i : E \longrightarrow E_i$ de noyau $\bigoplus_{i \neq j} E_j$.

En effet si la décomposition est G-stable, c'est que les p_i commutent avec tous les éléments de G. On peut donc appliquer le théorème 4 à l'algèbre associative A engendrée par les p_i ; les E_i sont ses composantes A-isotypiques et le lemme découle de l'assertion *c*) du théorème.

Ce lemme fournit un complément agréable au théorème 3.

§ 3. Distance de Hilbert.

On désigne par $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif réel à n dimensions, et par π la projection canonique de $\mathbb{R}^{n+1} - (0)$ sur $\mathbb{P}^n$. Un ouvert Ω de $\mathbb{P}^n$ est dit *convexe saillant* s'il est l'image par π d'un cône convexe saillant dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Un *automorphisme projectif de* Ω est un automorphisme projectif de $\mathbb{P}^n$ qui conserve Ω.

Si a, b, c, d sont quatre points de $\mathbb{P}^n$, deux au plus confondus, alignés, on notera (a, b, c, d) leur birapport. Sur $\mathbb{P}^1$, soit I un intervalle ouvert non vide, convexe saillant, d'extrémités a et b (nécessairement distinctes) et x et y deux de ses points; la fonction

$$C_I(x, y) = |\log(a, b, x, y)|$$

est une distance sur I, continue et complète (c'est évident si $a = 0$ et $b = \infty$, cas auquel on peut toujours se ramener par un automorphisme projectif de $\mathbb{P}^1$); si I' est un autre intervalle ouvert convexe saillant, contenant I,

$$C_{I'}, (x, y) \leq C_I(x, y)$$

quels que soit x et y dans I.

1. Soit Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}^n$, x et y deux de ses points, distincts: la droite projective joignant x à y coupe le bord $\partial\Omega$ de Ω en deux points distincts, soient u et v. Le birapport (u, v, x, y) est positif et on peut poser

$$C_\Omega(x, y) = |\log(u, v, x, y)|$$

convenant que $C_\Omega(x, x) = 0$.

PROPOSITION 2. *La fonction C_Ω est une distance sur Ω, définissant la topologie induite par $\mathbb{P}^n$, et complète. Les boules*

$$B_\Omega(x, r) = \{y \in \Omega \mid C_\Omega(x, y) \leq r\}$$

sont compactes, quels que soient $X \in \Omega$ et $r \geq 0$. Les automorphismes projectifs de Ω conservent la distance C_Ω.

Pour la démonstration, on se reportera à [3], ch. IV n° 28.

La distance C_Ω est appelée distance de Hilbert sur Ω.

2. LEMME 3. *Soient Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}^n$, (p_n) et (q_n) deux suites de points de Ω. Si $C_\Omega(p_n, q_n) \to 0$, et si p_n converge dans $\mathbb{P}^n$ vers un point $p \in \overline{\Omega}$, q_n tend vers p.*

En effet soit Ω' un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}^n$ contenant $\overline{\Omega}$. Il est facile de voir que si $x, y \in \Omega$,

$$C_{\Omega'}(x, y) \leq C_\Omega(x, y)$$

et donc $C_{\Omega'}(p_n, q_n) \to 0$. D'autre part, $p \in \Omega'$ et $C_{\Omega'}(p_n, p) \to 0$: de là $C_{\Omega'}(q_n, q) \to 0$ et q_n tend vers p.

3. LEMME 4. *Soit Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}^n$, et c un point de $\overline{\Omega}$, extrémal. Quels que soient le nombre $r \geq 0$ et le voisinage V de c, $V \cap \Omega$ contient une boule $B_\Omega(x, r)$ pour un $x \in \Omega$ convenable.*

Soit ∞ un hyperplan de $\mathbb{P}^n$ disjoint de $\overline{\Omega}$: sur $E = \mathbb{P}^n - \infty$ existe une structure naturelle d'espace affine, par rapport à laquelle Ω est un ouvert convexe borné.

Comme c est extrémal, il existe une forme affine ξ sur E, positive (strictement) sur Ω, nulle en un point $c' \in \overline{\Omega}$, et telle que

$$\Omega \cap V \supset \{y \in \Omega \mid \xi \mid y < 1\}.$$

(lemme du chapeau : [2] § 7 Prop. 2). Puisque $\xi \mid c' = 0$, on peut trouver $x \in \Omega$ tel que $\xi \mid x < e^{-r}$: montrons qu'alors $B_\Omega(x, r) \subset V$. En effet soit y distinct de x, $y \in B_\Omega(x, r)$, et p et q les intersections de $\partial\Omega$ avec la droite joignant x à y :

$$|\log(p, q, x, y)| \leq r.$$

Mais $(p, q, x, y) = (\xi \mid p,\ \xi \mid q,\ \xi \mid x,\ \xi \mid y)$, et $\xi \mid p$ et $\xi \mid q$ appartiennent à $[\,0 + \infty\,[$. Par conséquent,

$$\left|\log \frac{\xi \mid x}{\xi \mid y}\right| = |\log(0, +\infty, \xi \mid x, \xi \mid y)| \leq |\log(\xi \mid p,\ \xi \mid q,\ \xi \mid x,\ \xi \mid y)| \leq r$$

et donc $\xi \mid y \leq e^r\ \xi \mid x < 1$ ce qui prouve que $y \in V$.

4. LEMME 5. *Soit Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}^n$, G un groupe d'automorphismes projectifs de Ω balayant Ω. Quel que soit $a \in \Omega$ tout point extrémal de $\overline{\Omega}$ est adhérent à l'orbite Ga.*

Puisque G balaye Ω, et conserve C_Ω, il existe $r \geq 0$ tel que l'orbite Ga coupe toute boule $B_\Omega(x, r)$: ce lemme résulte donc immédiatement du précédent.

5. PROPOSITION 3. *Soit Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{R}^n$, et G un groupe d'automorphismes affines de Ω balayant Ω. Quel que soit $a \in \Omega$, l'enveloppe convexe de l'orbite Ga est Ω.*

Soit C l'enveloppe convexe de Ga: il suffit de montrer que tout point extrêmal de $\overline{\Omega}$, adhérence de Ω dans $\mathbb{R}^n$, et tout rayon extrêmal de $\overline{\Omega}$ sont adhérents à C.

Considérons le plongement naturel de l'espace affine $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{P}^n$: G se prolonge naturellement en un groupe d'automorphismes projectifs de $\mathbb{P}^n$ balayant Ω. Soit $\overline{\overline{\Omega}}$ l'adhérence de Ω dans $\mathbb{P}^n$.

a) Si c est un point extrêmal de $\overline{\Omega}$, le lemme précédent montre tout de suite que c adhère à Ga, donc à C.

b) Soit ϱ un rayon extrêmal de $\overline{\Omega}$: ϱ est une demidroite ayant pour origine un point $c \in \overline{\Omega}$ extrêmal, et pour point à l'infini un point $c' \in \overline{\overline{\Omega}}$ extrêmal. Le lemme 5 fournit alors deux suites (g_n) et (g'_n) d'éléments de G telles que dans $\mathbb{P}^n$, $g_n\, a \longrightarrow c$ et $g'_n\, a \longrightarrow c'$. Les segments dans $\mathbb{R}^n$ d'origine $g_n\, a$ et d'extrémités $g'_n\, a$ sont inclus dans C, et par conséquent tous les points de ϱ sont adhérents à C.

Ce résultat avait été obtenu par Koszul (non publié); il est à comparer à [4] lemme 6.10 p. 40.

6. PROPOSITION 4. *Soit Ω un cône ouvert convexe saillant de $\mathbb{R}^n$, balayé par un groupe de transformations linéaires G. Soit L un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, stable par G:*

a) *Si $L \cap \Omega \neq \emptyset$, $L = E$.*

b) *Si $L \cap \overline{\Omega} = (0)$, $L = (0)$.*

Démontrons l'assertion *a*). Soit p un point de $L \cap \Omega$: l'orbite Gp est contenue dans L, ainsi que son enveloppe convexe. D'après la proposition 3, cette enveloppe convexe n'est autre que Ω: donc $L = E$.

Passons à l'assertion *b*). Si $L \cap \overline{\Omega} = (0)$, il existe $\alpha \in \Omega^*$ telle que $L \subset \operatorname{Ker} \alpha$, et par conséquent, dans l'espace dual, $L^\perp$ coupe le cône dual Ω^*. Or, d'après le lemme 1, G balaye Ω^* dans la représentation duale. L'assertion *a*) montre que $L^\perp = (\mathbb{R}^n)^*$, i. e. $L = (0)$.

7. Si Ω est un ouvert convexe saillant de $\mathbb{R}^n$, on définit la distance de Hilbert C_Ω sur Ω en considérant de la façon habituelle $\mathbb{R}^n$ comme le complémentaire dans $\mathbb{P}^n$ d'un hyperplan projectif.

LEMME 6. *Soit Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{R}^n$, p et q deux de ses points, et v un vecteur du cône asymptote de Ω. Les points $p + v$ et $q + v$ appartiennent à Ω, et*

$$C_\Omega(p + v, q + v) \leq C_\Omega(p, q).$$

Que $p + v$ et $q + v$ appartiennent à Ω résulte de la définition du cône asymtote. Si $p = q$, l'assertion est triviale. Sinon, soit a et b les intersections de $\partial\Omega$ avec les droites joignant p et q (l'un au plus pouvant être rejeté à l'infini), et a' et b' les intersections avec la droite joignant $p+v$ et $q+v$ (l'un au plus pouvant être rejeté à l'infini). Les points $a+v$ et $b+v$ appartiennent à $\overline{\Omega}$, donc

$$]\,a+v,\, b+v\,[\,\subset\,]\,a',\, b'\,[\,;$$

ce qui rend évidente l'inégalité à démontrer.

§ 4. Champ associé à un sous-espace stable.

Dans ce § et les deux suivants, on va procéder à une analyse détaillée de la situation suivante : Ω est un cône ouvert convexe saillant de l'espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, G un groupe linéaire balayant Ω, et L un sous-espace vectoriel de E, non nul, stable par G. On suppose en outre que L est engendré par le cône (fermé, saillant) $\overline{\Omega}\cap L$, c'est-à-dire que l'intérieur ω de $\overline{\Omega}\cap L$ par rapport à L est non vide.

Cette analyse permettra de démontrer les théorèmes 1 et 3.

On notera E^*, L^* les espaces duals de E et L, p la projection canonique de E sur E/L et, pour $x\in\Omega$,

$$\Omega_x = (x+L)\cap\Omega.$$

1. On définit un champ H sur Ω par les deux conditions suivantes : d'abord, en tout point $x\in\Omega$, $H(x)\in L$; ensuite, quel que soit $u\in L$,

$$D\alpha_x(H(x), u) = -\alpha_x \mid u = x^* \mid u$$

(ce qui est licite, la forme $D\alpha$ étant partout définie positive) (§ 1 n^0 3). Evidemment, ce champ est invariant par G. (Lorsque $L=E$, on montre facilement que $H(x)=x$, à partir de la relation d'homogénéité $\varphi(tx) = t^{-n}\varphi(x)$).

2. *a*) Il existe deux constantes réelles A et B telles que pour tout x

$$0 < A < x^* \mid H(x) = D\alpha(H(x), H(x)) < B.$$

En effet si $H(x)$ était nul en un point x, $x^*\mid L$ serait nulle, et L serait inclus dans $\operatorname{Ker} x^*$; d'après la proposition 3, L serait nul, contrairement à nos hypothèses. L'existence de A et B résulte alors de ce que $x^*\mid H(x)$ est une fonction G-périodique, et $G\diagdown\Omega$ quasi-compact.

b) Pour cette même raison, le champ H est complètement intégrable. On notera $\exp tH$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes obtenu par intégration, et, pour $x \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \exp tH \cdot x$. Puisque H est G-invariant, les difféomorphismes $\exp tH$ commutent avec les éléments de G: quel que soit $g \in G$, $g(x(t)) = (gx)(t)$.

c) Soit $a \in \Omega$: on notera H_a l'orbite de a sous l'action du groupe $\exp tH$. Le long de H_a,

$$\frac{d}{dt}\psi(a(t)) = -x^* \mid H(x)$$

avec $x = a(t)$ et $\psi = \log \varphi$; donc, compte tenu de *a*), on voit que $\psi(a(t))$ décroît strictement de $+\infty$ à $-\infty$ lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Evidemment, chaque orbite H_a est incluse dans $\Omega_a = (a + L) \cap \Omega$.

3. *Soit x un point de Ω. Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $x(t)^* \mid L = e^{-t} x^* \mid t$; en particulier, le sous-espace $L \cap \operatorname{Ker} x(t)^*$ est indépendant de t.*

En effet soit $x^1, \dots, x^n$ un système de coordonnées linéaires de E où les équations de L soient $x^{r+1} = \dots = x^n = 0$. Soient α et β des indices variant de 1 à r. Le champ H est défini par les r équations (indexées par α)

$$\sum_\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta} \cdot H^\beta = -\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}$$

(puisque $H^i = 0$ pour $i > r$). Ceci donne, le long de l'orbite H_x,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} = H \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} = \sum_\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta} \cdot H^\beta = -\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}$$

soit

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}(x(t)) = e^{-t} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}(x).$$

Les coordonnées de x^* dans la base duale de E^* étant $-\frac{\partial \psi}{\partial x^1}, \dots, -\frac{\partial \psi}{\partial x^n}$ cette égalité est précisément le contenu de l'assertion.

4. Quel que soit $x \in \Omega$, on notera

$$B_x = \Omega \cap \{y \in E \mid x^* \mid (y - x) < 0\}$$

c'est un ouvert borné dans E, puisque $x^* \in \Omega^*$.

a) *Pour* $t < 0$, $x(t) \in B_x$.

En effet soit $f(t) = x^* \mid (x(t) - x)$: $f(0) = 0$, et d'après le n⁰ 1 *a*),

$$\frac{d}{dt} f(t) = x^* \mid H(x(t)) = e^t D\alpha_{x(t)} (H(x(t)), H(x(t))) > 0.$$

b) Si $g \in G$ et $x \in \Omega$, $gB_x = B_{gx}$: les automorphismes linéaires de Ω échangent entre eux les hyperplans tangents aux hypersurfaces de niveau de la fonction φ.

c) *Si K est un compact inclus dans Ω, la réunion $\bigcup_{x \in K} B_x$ est un ouvert borné.*

En effet, puisque K est compact, on peut trouver a dans Ω tel que

$$0 < \varphi(a) < \inf_{x \in K} \varphi(x).$$

Par convexité, $\varphi(a) < \varphi(x)$ implique $x^* \mid (a - x) > 0$ donc

$$B_x \subset B'_x = \Omega \cap \{y \in E \mid x^* \mid (y - a) < 0\}.$$

Maintenant, si x varie dans K, la forme linéaire x^* varie dans un compact de Ω^* ; par conséquent, la réunion pour x dans K des B'_x est bornée, et a fortiori la réunion des B_x.

5. Comme le cône ω, intérienr de $\bar{\Omega} \cap L$ par rapport à L est non vide, et ouvert, convexe, saillant, son dual $\omega^* \subset L^*$ est un cône ouvert, convexe, saillant. Soit $\eta : \Omega \to \omega^*$ l'application définie par $\eta(x) = x^* \mid L \in \omega^*$. Comme φ, ψ, etc. sont analytiques, η l'est aussi. (Si $L = E$, η n'est autre que l'application $* : \Omega \to \Omega^*$).

a) Le groupe G opère naturellement dans L par restriction, donc dans L^* par l'opération

$$\tilde{g} \cdot \xi = {}^t(g \mid L)^{-1} \cdot \xi = \xi \circ (g \mid L)^{-1}$$

($g \in G$, $\xi \in L^*$) : cette opération conserve ω^*. De la formule $(gx)^* = {}^tg^{-1} \cdot x^*$ (§ 1 n⁰ 4) résulte

$$(gx)^* \mid L = {}^t(g \mid L)^{-1} \cdot x^* \mid L$$

soit, avec les notations que l'on vient d'introduire.

$$\eta(gx) = \tilde{g} \cdot \eta(x).$$

b) Quels que soient $x \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}$, $\eta(x(t)) = e^{-t} \eta(x)$: simple traduction de l'assertion du n⁰ 3 (ou du § 1 n⁰ 4 si $L = E$).

c) Quel que soit $a \in \Omega$, la restriction $\eta \mid \Omega_a$ réalise un difféomorphisme analytique de Ω_a et ω^*.

Revenons au système de coordonnées sur E introduit au n^0 2, dans lequel les équations de L étaient $x^{r+1} = ... = x^n = 0$. Soit $a^1, ..., a^n$ les coordonnées de a ; un point $x \in \Omega_a$ a des coordonnées $x^1, ..., x^r, a^{r+1}, ..., a^n$ et η lui fait correspondre la forme sur L de coordonnées

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x^1}, -\frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \dots, -\frac{\partial \psi}{\partial x^r} \ (\psi = \log \varphi)$$

dans une base convenable de L^*. La jacobienne de $\eta \mid \Omega_a$ est donc au signe près la matrice carrée $r \times r$ des dérivées secondes

$$\left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta} \right\|$$

où α et β varient de 1 à r : cette matrice est définie positive, donc inversible. Par conséquent, $\eta \mid \Omega_a$ est de rang maximum.

Supposons maintenant que $\eta(x) = \eta(x')$, avec x et x' dans Ω_a. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = \varphi(x'(t))$ (n^0 1, c). Dans Ω_a, l'hypersurface de niveau de $\varphi \mid \Omega_a$ passant par x, qui est strictement convexe, a des hyperplans tangents en x et $x'(t)$ parallèles, puisqu'ils sont tous les deux parallèles à

$$(\operatorname{Ker} x^*) \cap L = (\operatorname{Ker} x'^*) \cap L = (\operatorname{Ker} e^{-t} x'^*) \cap L = (\operatorname{Ker} x'(t)^*) \cap L \quad (\text{n}^0\, 2);$$

il en résulte que $x = x'(t)$, et la formule b) implique tout de suite que $x = x'$: $\eta \mid \Omega_a$ est donc injective.

Soit maintenant $\xi \in \omega^*$. L'hyperplan affine P de $a + L$ d'équation $\xi \mid (x - a) = 0$ a une section Σ avec Ω_a bornée. La restriction $\varphi \mid \Sigma$, qui est toujours une fonction strictement convexe sur cet ouvert borné de P, tend vers $+\infty$ au bord (§ 1 n^0 3 a)) : elle atteint donc son minimum (unique) en un point $b \in P \subset \Omega_a$. En ce point, P est l'hyperplan de $a + L$ tangent à l'hypersurface de niveau de $\varphi \mid \Omega_a$ passant par b ; donc P est parallèle à $(\operatorname{Ker} b^*) \cap L = \operatorname{Ker} \eta(b) \subset L$; par sa définition même, P est parallèle à $\operatorname{Ker} \xi \subset L$, donc $\eta(b)$ et ξ sont deux formes proportionnelles dans ω^*. La formule b) montre alors que $\xi = \eta(b(t))$ pour un nombre réel t convenable, et par conséquent, $\eta(\Omega_a) = \omega^*$.

d) Ainsi l'application $p \times \eta$ réalise un difféomorphisme de Ω et $p(\Omega) \times \omega^* \subset E/L \times L^*$, commutant à l'action de G sur les deux espaces; les orbites $H_x \subset \Omega$ ont pour image par $p \times \eta$ des demidroites.

e) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon' > 0$) tel que $C_\Omega(x, y) < \varepsilon'$ implique $C_{\omega^*}(\eta(x), \eta(y)) < \varepsilon$.

En effet, si $g \in G$ et si x et y sont deux points de Ω,

$$C_\Omega(gx, gy) = C_\Omega(x, y)$$

$$C_{\omega^*}(\tilde{g}\cdot\eta(x), \tilde{g}\cdot\eta(y)) = C_{\omega^*}(\eta(x), \eta(y))$$

et le quotient $G \diagdown \Omega$ étant quasi-compact, l'assertion se ramène à une banale continuité uniforme.

6. Dans la suite, certains énoncés s'exprimeront plus facilement si l'on introduit l'espace des orbites du groupe exp tH, soit $\mathcal{H}$, muni de la topologie quotient. Une suite d'orbites H_{x_n} tend vers l'orbite H_a ($a, x_n \in \Omega$) si et seulement s'il existe une suite de points $x'_n \in H_{x_n}$, tendant vers a.

En outre, quels que soient $x \in \Omega$ et $g \in G$, $g(H_x) = H_{gx}$ (n^0 2 b)) ce qui fait que G opère naturellement sur $\mathcal{H}$.

§ 5. Démonstration du théorème 1.

Les notations du § 4 restent toujours en vigueur. Dans ce § et le suivant, on désigne par a un point de Ω, fixé une fois pour toutes.

1. Considérons l'ensemble $H_a^- = \{a(t) \mid t \leq 0\} \subset \Omega_a$: il est fermé dans Ω_a, puisque

$$\eta(H_a) = \{e^{-t}\eta(a) \mid t \leq 0\}$$

(§ 4 n^0 5 b) et c)) ; il est relativement compact dans E (§ 4 n^0 4 a)) et donc non fermé dans E, sinon il serait compact, et φ serait bornée dessus, contrairement au § 5 n^0 1 c). Il possède donc des points d'accumulation sur le bord $\partial\Omega_a$ de Ω_a.

Choisissons un tel point d'accumulation s : il est possible de construire une suite a_n de points de l'orbite H_a de a, et une suite d'éléments h_n dans G telles que

1^0) *$a_n = a(t_n)$ tende vers s, et assez vite pour que $t_{n+1} < 2t_n < 0$;*

2^0) *$C_\Omega(a_{n+1}, h_n a_n)$ tende vers zéro.*

Il est facile en effet de construire une suite (a_n) ayant la propriété 1^0), et toute suite extraite aura la même propriété. Soit Q un compact inclus dans Ω tel que $GQ = \Omega$, et $g_n \in G$ avec $g_n^{-1} a_n \in Q$. Quitte à élaguer la suite, on peut supposer que $g_n^{-1} a_n$ converge vers un point b de Q. Alors

$$C_\Omega(a_n, g_n b) = C_\Omega(g_n^{-1} a_n, b) \to 0$$

et si l'on pose $h_n = g_{n+1}\, g_n^{-1}$,

$$C_\Omega(a_{n+1}, h_n a_n) \leq C_\Omega(a_{n+1}, g_{n+1} b) + C_\Omega(g_{n+1} b, h_n a_n)$$

$$= C_\Omega(a_{n+1}, g_{n+1} b) + C_\Omega(g_n b, a_n)$$

tend vers zéro.

On fait choix une fois pour toutes de deux telles suites.

2. *Dans l'espace* $\mathcal{H}$ *des orbites du groupe* $\exp tH$, $h_n(H_a) \to H_a$; *plus précisément, si l'on pose*

$$a_n' = h_n\, a\,(t_n - t_{n+1}),$$

a_n' *est un point de* $h_n(H_a)$ *qui tend vers* a.

D'après le § 4 n⁰ 5 *b*), il suffit de vérifier que $\eta(a_n') \to \eta(a)$ et que $p(a_n') \to p(a)$.

a) D'après le § 4 *n*⁰ 5 *e*), $C_\Omega(a_{n+1}, h_n a_n) \to 0$ entraîne que $C_{\omega^*}(\eta(a_{n+1}), \eta(h_n a_n)) \to 0$. Or,

$$C_{\omega^*}(\eta(a_{n+1}), \eta(h_n a_n)) = C_{\omega^*}(e^{+t_{n+1}}\eta(a_{n+1}), e^{+t_{n+1}}\eta(h_n a_n)) = C_{\omega^*}(\eta(a), \eta(a_n'))$$

en vertu des formules du § 4 n⁰ 5 *a*) et *b*), et de la commutation des $h_n \in G$ avec $\exp tH$. Ainsi $\eta(a_n') \to \eta(a)$ dans ω^*.

b) D'autre part, $p(a_n') = p(h_n a_n)$, tous les points d'une même orbite étant projetés par p au même point. Or $a_n \to s$ et $C_\Omega(a_{n+1}, h_n a_n) \to 0$ donc (lemme 3) $h_n a_n \to s$. Par conséquent,

$$p(a_n') = p(h_n a_n) \to p(s) = p(a).$$

3. *Dans l'espace* $\mathcal{H}$ *des orbites du groupe* $\exp tH$, $h_n^{-1}(H_a) \to H_a$; *plus précisément, si l'on pose*

$$a_n'' = h_n^{-1}\, a\,(t_{n+1} - t_n)$$

a_n'' *est un point de* $h_n^{-1}(H_a)$ *qui tend vers* a.

Même démonstration qu'au n⁰ 2, une fois noté que

$$C_\Omega(a_n, h_n^{-1} a_{n+1}) = C_\Omega(h_n a_n, a_{n+1}) \to 0.$$

4. Soit $\lambda_n = e^{-t_n + t_{n+1}}$ et soit u le vecteur de ω conjugué de $\eta(a) \in \omega^*$ par rapport à ω (§ 1 n⁰ 4). Alors :

$$\lambda_n \to 0, \quad \lambda_n^{-1} h_n u \to u \quad \text{et} \quad \lambda_n h_n^{-1} u \to u.$$

En effet, comme on a stipulé dans la construction des $a_n = a(t_n)$ que $t_{n+1} < 2t_n < 0$, le premier point est évident.

Comme on l'a observé au n⁰ 2 *a*), $C_{\omega^*}(\eta(a_{n+1}), \eta(h_n a_n)) \to 0$. Mais

$$\eta(a_{n+1}) = e^{-t_{n+1}} \eta(a) \qquad \eta(h_n a_n) = e^{-t_n} \widetilde{h}_n \eta(a)$$

par conséquent

$$C_{\omega^*}(\eta(a), \lambda_n \widetilde{h}_n \eta(a)) = C_{\omega^*}(\lambda_n^{-1} \widetilde{h}_n^{-1} \eta(a), \eta(a)) \to 0$$

et dans ω^*, $\lambda_n \widetilde{h}_n \eta(a) \to \eta(a)$. Mais $\lambda_n \widetilde{h}_n \eta(a)$ est le conjugué par rapport à ω de $\lambda_n^{-1} h_n u$, et on voit que ce dernier vecteur tend vers u; la convergence de $\lambda_n h_n^{-1} u$ vers u résulte de même de ce que $\lambda_n^{-1} \widetilde{h}_n^{-1} \eta(a) \to \eta(a)$.

5. *Montrons à présent que la suite $h_n^{-1} s$ est bornée dans E.*

(On notera $\| \ \|$ une quelconque norme euclidienne sur E).

a) Pour $x \in \Omega$, soit $H_x^- = \{x(t) \mid t \leq 0\}$. D'après le § 4 n⁰ 4 *a*), H_x^- est inclus dans l'ouvert borné B_x. D'autre part, soit $x' \in H_x$. Les ensembles H_x^- et $H_{x'}^-$ diffèrent par un segment d'orbite dont l'adhérence est incluse dans Ω (φ est bornée dessus, § 4 n⁰ 1 *c*)) et par conséquent, ils ont même ensemble de points d'accumulation sur $\partial\Omega$.

b) Le point s est par définition un point de $\partial\Omega$ adhérent à H_a^-. Le point $h_n^{-1} s$ est donc un point de $\partial\Omega$ adhérent à $h_n^{-1}(H_a^-) = H^-_{h_n^{-1} a_n}$. En vertu de la remarque précédente, il est adhérent à $H^-_{a_n''}$ (le point $a_n'' \in h_n^{-1}(H_a)$ a été introduit au n⁰ 3) et par conséquent à $B_{a_n''}$. Mais comme $a_n'' \to a$, l'assertion du § 4 n⁰ 4 *c*) montre que la réunion des $B_{a_n''}$ est bornée. Par conséquent, $h_n^{-1} s$ est bornée.

On verrait d'ailleurs aussi bien que $h_n s$ est bornée dans E.

6. Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème 1. Considérons les transformation *affines* σ_n de E dans E obtenues en effectuant successivement h_n^{-1}, la translation de vecteur $s - h_n^{-1} s$, et l'homothétie de centre s et de rapport λ_n: quel que soit $x \in E$,

$$\sigma_n x = s + \lambda_n h_n^{-1}(x - s).$$

a) Ces transformations conservent s, le sous-espace affine $s + L$, et dans ce sous-espace, le cône $\omega_s = s + \omega$. En outre, $s + u \in \omega_s$ et (n⁰ 4)

$$\sigma_n(s + u) = s + \lambda_n h_n^{-1} u \to s + u.$$

Soit $\bar{\sigma}_n = \sigma_n \mid (s + L)$: les $\bar{\sigma}_n$ sont des automorphismes du cône ω_s, et en appliquant la proposition 1, on voit qu'on peut en extraire une sous-suite, qu'on indexera par la suite d'entiers (ν), qui converge vers un automorphisme σ de ω_s (σ n'est défini que sur $s + L$!).

b) Montrons maintenant que Ω_a est égal à ω_s et est par conséquent un cône. Soit $x \in \Omega_a \subset s + L$. Posons $y_n = h_n^{-1} x$: c'est une suite de points de Ω, et

$$\sigma_n x = s + \lambda_n h_n^{-1} (x - s) = s + \lambda_n y_n - \lambda_n h_n^{-1} s.$$

En vertu du n^0 4, $\lambda_n \to 0$, et en vertu du n^0 5, $h_n^{-1} s$ est borné ; la convergence $\bar{\sigma}_\nu x \to \sigma x$ s'écrit donc

$$\lambda_\nu y_\nu \to \sigma x - s.$$

Comme $x \in \Omega_a$, x est distinct de $s \in \partial\Omega$, donc σx est distinct de s. Vu que $\lambda_\nu \to 0$, ceci exige que $\| y_\nu \| \to \infty$. Le point y_ν partant à l'infini dans Ω, sa direction limite, qui est celle de $\sigma x - s$, doit appartenir à $\bar{\Omega}$. Il en résulte que $\sigma x - s \in \bar{\Omega} \cap L = \bar{\omega}$, donc $\sigma x \in \bar{\omega}_s$. Comme σ est un automorphisme de ω_s, $x \in \bar{\omega}_s$, et ceci nous montre que

$$\Omega_a \subset \bar{\omega}_s,$$

donc en fait $\Omega_a \subset \omega_s$. L'inclusion inverse $\omega_s \subset \Omega_a$ étant évidente, on obtient l'égalité $\Omega_a = \omega_s$, qui prouve que Ω_a est un cône.

Nous avons établi le

THÉORÈME 1. *Soit Ω un cône ouvert convexe saillant dans l'espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et G un groupe linéaire balayant Ω. Soit L un sous-espace vectoriel G-stable, engendré par $\bar{\Omega} \cap L$: quel que soit $x \in \Omega$, les sections*

$$\Omega_x = \Omega \cap (x + L)$$

sont des cônes.

7. Il se dégage en outre deux remarques supplémentaires :

a) Puisque l'on est parti d'un quelconque point s d'accumulation de H_a^- sur $\partial\Omega$, pour conclure que le cône saillant Ω_a admet s pour sommet, on voit que s est le seul point d'accumulation au bord de H_a^-. Par suite, $a(t)$ tend vers s quand $t \to -\infty$: et il existe $\tau < 0$ tel que si $t < \tau$, $a - a(t) \in \omega$.

b) Les automorphismes du cône ω que sont les $\lambda_n^{-1} h_n \mid L$ tendent à stabiliser $u \in \omega$ (*n*^{0} 4) ils forment donc une partie relativement compacte de

$GL(L)$ (proposition 1), et sont de norme bornée. Comme $\lambda_n \longrightarrow 0$ (n⁰ 4), la norme des restrictions $h_n \mid L$ tend vers 0.

§ 6. Démonstration du théorème 3.

Les hypotèses et les notations des § 4 et 5 restent en vigueur. On suppose de plus maintenant

a) que G divise Ω;

b) que L est un sous-espace vectoriel non nul et G-stable minimal: cette hypothèse est compatible avec les hypothèses du § 4 car, $\bar{\Omega} \cap L$ n'étant pas réduit à (0) en vertu de la proposition 4 (§ 3), $\bar{\Omega} \cap L$ engendre un sous-espace non nul de L, G-stable, donc égal à L.

1. On rappelle que $B_\Omega(x, r)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon r pour la distance C_Ω. On pose

$$V_{x,r} = (p \times \eta)^{-1} (p(B_\Omega(x, r)) \times B_{\omega^*}(\eta(x), r))$$

quels que soient $x \in \Omega$ et $r > 0$.

a) Les $V_{x,r}$ constituent une base de voisinages compacts de x dans Ω; leur réunion est Ω tout entier; et si l'on appelle $T_{x,r}$ le saturé de $V_{x,r}$ par l'action du groupe à un paramètre $\exp tH$, les $T_{x,r}$ constituent une base de voisinages compacts de H_x dans l'espace des orbites $\mathcal{H}$.

b) Si $g \in G$, $gV_{x,r} = V_{gx,r}$ et $gT_{x,r} = T_{gx,r}$.

Immédiat, si l'on tient compte de ce que p et η commutent à l'action de G.

c) *Si t est inférieur au nombre $\tau < 0$ défini au* § 5 n⁰ 7 *a*), $T_{a(t),r} \subset T_{a,r}$ *quel que soit* $r > 0$.

En effet, soit $x \in T_{a(t),r}$: nous pouvons supposer $x \in V_{a(t),r}$. Montrons que $x(-t)$ appartient à $V_{a,r}$.

$$\begin{aligned}\alpha)\quad C_{\omega^*}(\eta(x(-t)), \eta(a)) &= C_{\omega^*}(e^t \eta(x), \eta(a)) \\ &= C_{\omega^*}(\eta(x), e^{-t}\eta(a)) \\ &= C_{\omega^*}(\eta(x), \eta(a(t))) \leq r\end{aligned}$$

puisque $x \in V_{a(t),r}$ implique que $\eta(x) \in B_{\omega^*}((a(t)), v)$.

β) $x \in V_{a(t),r}$ implique aussi l'existence de $y \in \Omega_x$ tel que

$$C_\Omega(a(t), y) \leq r.$$

Comme $t < \tau$, $a - a(t) \in \mathring{\omega}$ et donc $y' = y + a - a(t) \in \Omega_x = \Omega_{x(-t)}$; d'après le lemme 6 (§ 3),

$$C_\Omega(a, y') \leq C_\Omega(a(t), y) \leq r$$

par conséquent $p(x(-t)) = p(y') \in p(B_\Omega(a, r))$. Comme on a vu en α) que $\eta(x(-t)) \in B_{\omega^*}(\eta(a), r)$, on conclut que $x(-t) \in V_{a,r}$, cqfd.

d) Quels que soient les nombres positifs r et ε, à partir d'un certain rang,

$$h_n(T_{a,r}) \subset T_{a,r+\varepsilon}.$$

Revenons en effet au point $a_n'' = h_n^{-1} a(t_{n+1} - t_n)$ introduit au § 5, n⁰ 3, qui tend vers a. Le point

$$h_n a_n'' = a(t_{n+1} - t_n)$$

appartient à H_a, et comme $t_{n+1} < 2t_n < 0$ (§ 5 n⁰ 1), on finit par avoir $t_{n+1} - t_n < \tau$, donc, d'après l'assertion précédente,

$$T_{h_n a_n'', \varrho} \subset T_{a,\varrho}$$

quel que soit $\varrho > 0$.

Comme a_n'' tend vers a, $B_\Omega(a, r)$ finit par être incluse dan $B_\Omega(a_n'', r + \varepsilon)$ et $B_{\omega^*}(a, r)$ dans $B_{\omega^*}(a_n'', r + \varepsilon)$. On finit donc par avoir $V_{a,r} \subset V_{a_n'', r+\varepsilon}$ et $T_{a,r} \subset T_{a_n'', r+\varepsilon}$ d'où finalement

$$h_n(T_{a,r}) \subset h_n(T_{a_n'', r+\varepsilon}) = T_{h_n a_n'', r+\varepsilon} \subset T_{a, r+\varepsilon}.$$

Remarque : Tout cet épisode technique serait facilement court-circuité si l'on disposait d'une distance d sur Ω invariante à la fois par G et $\exp tH$; ce serait le cas par exemple si l'on savait que $p(\Omega)$ est saillant.

2. *On va maintenant établir qu'il existe un entier $\nu > 0$ tel que, a partir d'un certain rang, les opérateurs h_n^ν soient dans le centre de G.*

a) Puisque la réunion des $V_{a,r}$ est égale à Ω, et que G est de type fini, on peut fixer $r > 0$ tel que l'ensemble

$$S_1 = \{g \in G \mid ga \in V_{a,r}\}$$

qui est fini par propreté, engendre G. Soient λ et μ deux réels positifs (strictement) encadrant le minimum et le maximum de φ sur le compact $V_{a,r}$, et

$$K = T_{a,r} \cap \{x \in \Omega \mid \lambda \leq \varphi(x) \leq \mu\}.$$

L'ensemble K contient $V_{a,r}$. Si $x \in V_{a,r}$, et si $x(t) \in K$, alors

$$\psi(x(t)) - \psi(x) = t \cdot \frac{d}{dt} \psi(x(\theta))$$

pour un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ convenable ($\psi = \log \varphi$); comme la dérivée de $\psi(x(t))$ est minorée en valeur absolue par $A > 0$ (§ 4 n⁰ 1 *a*) et *c*)),

$$|t| \leq A^{-1} |\log \mu - \log \lambda|$$

et cette inégalité met en évidence le fait que K est compact. Par conséquent l'ensemble

$$S = \{g \in G \mid ga \in K\}$$

est fini (par propreté) et engendre G, puisqu' il contient S_1.

Toujours par propreté, on peut fixer $\varepsilon > 0$ tel que si

$$K_\varepsilon = T_{a,r+\varepsilon} \cap \{x \in \Omega \mid \lambda \leq \varphi(x) \leq \mu\}$$

$$S_\varepsilon = \{g \in G \mid ga \in K_\varepsilon\}$$

on ait $S_\varepsilon = S$. Enfin on fixe $\delta > 0$ tel que $V_{x,\delta}$ soit inclus dans $T_{a,r+\varepsilon/2}$ quel que soit $x \in K$.

b) Montrons maintenant que, à partir d'un certain rang, $h_n S h_n^{-1} \subset S_\varepsilon$.

α) D'abord, si $g \in S$, $\varphi(h_n g h_n^{-1} a) = \varphi(ga) \in [\lambda, \mu]$ (§ 1 n⁰ 3 *b*)).

β) Ensuite, d'après le § 5 n⁰ 3, $h_n^{-1} H_a \to H_a$ donc pour n assez grand,

$$h_n^{-1} H_a = H_{a_n''}$$

avec $a_n'' \in V_{a,\delta}$. Par suite, $g h_n^{-1} H_a = H_{g a_n''}$ avec $g a_n'' \in V_{ga,\delta} \subset T_{a,r+\varepsilon/2}$ vu le choix de δ. Pour n assez grand d'apres le n⁰ 1 *d*),

$$h_n T_{a,r+\varepsilon/2} \subset T_{a,r+\varepsilon}$$

donc

$$h_n g h_n^{-1} a \in h_n g h_n^{-1} H_a \subset h_n T_{a,r+\varepsilon/2} \subset T_{a,r+\varepsilon}.$$

En confrontant α) et β) on voit que $h_n g h_n^{-1} a \in K_\varepsilon$, donc $h_n g h_n^{-1} \in S_\varepsilon$.

c) Vu le choix de ε, $S_\varepsilon = S$. L'automorphisme intérieur $Ad\, h_n$ de G envoie l'ensemble fini S dans lui-même; il y effectue donc une permutation et si l'on appelle ν la factorielle du cardinal de S, $Ad\, h_n^\nu$ opère trivialement sur S, donc sur G, puisque S engendre G: ce qui signifie que h_n^ν est dans le centre de G.

3. Pour pouvoir exploiter l'information précédente sur les h_n^ν, il reste à démontrer l'assertion suivante:

L'orbite $h_n^\nu H_a$ *tend vers* H_a*; en particulier,* $p(h_n^\nu a)$ *tend vers* $p(a)$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$ arbitraire: les inclusions

$$h_n^\nu H_a \subset h_n^{\nu-1} T_{a,\varepsilon/\nu} \subset h_n^{\nu-2} T_{a,2\varepsilon/\nu} \subset \dots \subset h_n T_{a,(\nu-1)\varepsilon/\nu} \subset T_{a,\varepsilon}$$

sont toutes vraies pour n assez grand (n^0 1 *d*)). En particulier, à partir d'un certain rang, $h_n^\nu H_a$ coupe $V_{a,\varepsilon}$ donc les points de $h_n^\nu H_a$, qui sont tous projetés par p sur $p(h_n^\nu a)$, sont projetés dans $p(B_\Omega(a,\varepsilon))$, d'où la convergence $p(h_n^\nu a) \to p(a)$.

4. Nous pouvons maintenant démontrer que le sous-espace G-stable L admet un supplémentaire G-stable.

a) Soit A la sous-algèbre associative de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} E$ engendrée par le centre de G: elle contient les h_n^ν pour n assez grand. D'après le théorème 5 (§ 2)

$$A = \bigoplus_1^r \mathbb{R} p_i \qquad E = \bigoplus_1^r E_i$$

où les p_i forment un système orthogonal complet de projecteurs dans E, et les $E_i = p_i(E)$, G-stables, sont les composantes isotypiques du A-module E.

Le sous-espace L, stable par G, est donc un sous-A-module. Il existe $v \neq 0$ dans L, et une forme linéaire χ sur A, tels que si $X \in A$,

$$Xv = \chi(X) \cdot v.$$

Comme L est G-stable minimal, Gv engendre L. Mais si $g \in G$ et $X \in A$,

$$Xgv = gXv = \chi(X)\, gv,$$

ce qui prouve que L est A-isotypique: les éléments de A y opèrent par homothéties. Par conséquent, L est inclus dans l'un des E_i, qu'on appellera E', notant E'' la somme des autres: on va voir que $E' = L$.

Soient p' et p'' les projecteurs sur E associés à la décomposition $E = E' \oplus E''$: p' et p'' sont dans A, donc commutent à l'action de G; $\Omega = \Omega' \times \Omega''$ où $\Omega' = p'(\Omega)$ et $\Omega'' = p''(\Omega)$ sont des cônes ouverts convexex saillants dans E' et E'', G-stables (théorème 5, § 2).

b) En vertu du n^0 3, $p(h_n^\nu a) \to p(a)$, c'est-à-dire que

$$h_n^\nu a = a + x_n + y_n$$

où $x_n \in L$, $y_n \in E$ et $y_n \to 0$. Projetant par p' sur $E' \supset L$, il vient

$$h_n^\nu p'(a) = p'(h_n^\nu a) = p'(a) + x_n + p'(y_n).$$

Evidemment, $p'(y_n) \to 0$. D'autre part, E' est une A-composante isotypique, et les opérateurs de A, les h_n^ν en particulier pour n assez grand, y opèrent par homothéties. Pour n assez grand par conséquent,

$$\| h_n^\nu \mid E' \| = \| h_n^\nu \mid L \|$$

or on a montré au § 5 n^0 7 *b*) que $\| h_n \mid L \|$ tend vers zéro. Il en résulte que $\| h_n^\nu \mid E' \| \to 0$ et que $h_n^\nu p'(a) \to 0$; donc

$$p'(a) + x_n \to 0$$

ce qui exige que $p'(a) \in$ L.

Par conséquent, $\Omega' \cap L$ est non vide. D'un autre côté, si l'on fait opérer G sur Ω' par restriction, il est immédiat que G balaye Ω'. La proposition 4 (§ 3) montre maintenant que $L = E'$. Il en résulte que L admet un supplémentaire G stable, à savoir E''.

5. Nous avons ainsi démontré que si *Ω est un cône ouvert convexe saillant dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et G un groupe linéaire divisant Ω, tout sous-espace vectoriel G-stable minimal possède un supplémentaire G-stable.*

Le théorème 3 en résulte aussitôt par un argument classique sur les modules artiniens ([1] § 3 exercice 6).

§ 7. Démonstration des théorèmes 2 et 4.

1. Soit Ω un ouvert convexe saillant dans un espace affine E de dimension finie n sur R, et G un groupe de transformations affines balayant Ω. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$, l'hyperplan affine L_1 d'équation $t = 1$ est isomorphe à E, et on peut consiérer Ω comme un ouvert de cet hyperplan, et G comme un groupe de transformations linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$ conservant L_1, donc l'hyperplan vectoriel L_0 d'équation $t = 0$.

Soit

$$\Omega_1 = \{(x, t) \mid t > 0, x/t \in \Omega\};$$

c'est un cône ouvert convexe saillant de $\mathbb{R}^{n+1}$, dont on voit facilement que l'intersection $\bar{\Omega}_1 \cap L$ est isomorphe au cône asymptote de Ω. En outre, le groupe G_1 engendré par G et les homothéties de rapport 2^m $(m \in \mathbb{Z})$ balaye Ω, et conserve L_0.

2. Supposons maintenant le cône asymptote de Ω d'intérieur non vide. Alors $\bar{\Omega}_1 \cap L_0$ est d'intérieur non vide dans L_0, et le théorème 1 s'applique: l'intersection $\bar{\Omega}_1 \cap L_1$, qui n'est autre que $\bar{\Omega}$, est un cône, ce qui démontre le théorème 2.

3. On ne fait plus d'hypothèse sur le cône asymptote de Ω, mais on suppose que G divise Ω. Alors G_1 divise Ω_1. D'après le théorème 3, il existe un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$, de dimension 1, soit D, supplémentaire de L_0 et G-stable. En utilisant le lemme 2, on voit que Ω_1 se factorise en un produit $D^+ \times \Omega_0$, où D^+ et Ω_0 sont des cônes ouverts convexes saillants de sommet 0 dans D et L_0 respectivement. Il est clair maintenant que Ω, qui est identifié à $L_1 \cap \Omega_1$, est un cône, translaté de Ω_0, ce qui établit le théorème 4.

(On trouvera une demonstration du théorème 4 indépendante du théorème 3 dans [9]).

§ 8. Cas d'un groupe de Lie transitif.

1. Lorsque G est un groupe de Lie de transformations linéaires de l'espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, opérant transitivement sur le cône ouvert convexe saillant Ω, on peut simplifier substantiellement la démonstration du théorème 1, la simplification majeure consistant à remplacer la suite h_n par un groupe à un paramètre $\exp tA$, A étant un élément de l'algèbre de Lie g de G, tel que $\exp tA \cdot a = a(t)$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. Les n⁰ 2 et 3 se trivialisent, le n⁰ 4 énonce que $\exp tA \cdot u = e^t \cdot u$, etc.

2. Mais il est plus curieux de voir l'argumentation du n⁰ 6 s'adapter au cas où G est un *unimodulaire*, et donner le théorème suivant, dû à J. L. Koszul ([7]):

Théorème. *Soit Ω un cône ouvert convexe saillant dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et G un groupe de Lie unimodulaire de* *transformations linéaires opérant transitivement sur Ω. L'espace E est un G-module semi-simple.*

En particulier, G est alors réductif, et Ω symétrique. Comme au § 7, on obtient comme corollaire l'énoncé suivant :

THÉORÈME (KOSZUL [6]) *Soit Ω un ouvert convexe saillant dans un espace affine E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Si un groupe de Lie unimodulaire de transformations affines opère transitivement sur Ω, Ω est un cône.*

Nous nous bornerons à montrer l'intervention de l'hypothèse unimodulaire. Comme au § 6, dont nous allons reprendre les notations, il s'agit de montrer qu'un sous-espace vectoriel L non nul, G-stable minimal, admet un supplémentaire G-stable. Au n^0 1 d) du § 6 tout d'abord, comme $\exp tA\,(H_a) = H_a$ quel que soit t, on obtient maintenant que quel que soit $t < \tau$,

$$T_{\exp tA \cdot a,\, r} \subset T_{a,r}.$$

Au n^0 2, on voit alors que quels que soient les trois nombres positifs r, λ et μ, si l'on définit les ensembles K et S par

$$K = T_{a,r} \cap \{x \in \Omega \mid \lambda \leq \varphi(x) \leq \mu\}$$

$$S = \{g \in G \mid ga \in K\}$$

on a l'inclusion $Ad(\exp tA)\, S \subset S$ pour $t < \tau$. Comme S est l'adhérence de son intérieur, et que G est unimodulaire, cette inclusion entraîne l'égalité $Ad(\exp tA)\, S = S$ pour $t < \tau$, et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$.

A partir de là, et moyennant diverses complications techniques, on obtient la semi-simplicité de l'action de G sur E, par des considérations analogues à celles du § 6 n^0 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI : *Algèbre,* chapitre 8.

[2] N. BOURBAKI : *Espaces vectoriels topologiques,* chapitre 3.

[3] H. BUSEMANN and P. KELLY : *Projective geometry and projective metrics,* Academic Press, 1953.

[4] F. KAMBER and P. TONDEUR : *Flat manifolds,* Springer, Lecture notes.

[5] M. KOECHER : *Positivitätsbereiche in R^n* : American Journal of Mathematics, 79 (1957) p. 575-596.

[6] J. L. KOSZUL : *Sous-groupes discrets des groupes de transformations affines admettant une trajectoire convexe,* Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, n^0 259, p. 3675-3677.

[7] J. L. KOSZUL : *Trajectoires convexes de groupes affines unimodulaires.* Essays on Topology and Related Topics; Springer 1970; p. 105-110.

[8] E. B. VINBERG : *Homogeneous Cones,* Translations of the Moscow Mathematical Society n^0 12 (1963) p. 340-403.

[9] J. VEY : *Sur les automorphismes affines des ouverts convexes des espaces numériques,* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 270, p. 249-251.