

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. FASANO

M. PRIMICERIO

Il problema di Stefan con condizioni al contorno non lineari

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 26, n° 3 (1972), p. 711-737

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_3_711_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IL PROBLEMA DI STEFAN CON CONDIZIONI AL CONTORNO NON LINEARI(*)

A. FASANO e M. PRIMICERIO

1. Introduzione.

I problemi che la tecnica pone al fisico matematico sono, nella maggior parte dei casi, di tipo non lineare: la trattazione lineare che di essi spesso viene fatta ha quindi i pregi e i difetti di ogni approssimazione. Vi sono però alcuni problemi in cui la non linearità è una caratteristica «strutturale» di cui è impossibile non tenere conto, a meno di non snaturare la stessa essenza fisica del fenomeno. A questa categoria appartengono i problemi «a contorno libero» (nei quali, cioè, la frontiera del mezzo in esame costituisce una delle incognite) e, in particolare, il problema della conduzione del calore in un mezzo in cui ha luogo un cambiamento di fase (l'intrinseca non linearità del fenomeno è assai bene messa in evidenza in [1]).

Tale problema, affrontato per la prima volta da J. STEFAN nel 1889 [2], è stato ampiamente studiato negli ultimi anni — con particolare riguardo ai teoremi di esistenza ed unicità ed ai metodi di calcolo approssimato — specialmente ad opera delle scuole statunitense e sovietica, alle quali si sono affiancati altri ricercatori, in Bulgaria [3], Cina [4], [5] ed Italia [6-11], dove recentemente è stato anche realizzato lo studio di alcuni esempi di controllo ottimale [12], [13].

Una bibliografia aggiornata al 1967 si trova ad esempio in [3], [14], [15], [16].

Pervenuto alla Redazione il 28 Luglio 1971.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C. N. R..

I risultati del presente lavoro furono comunicati in buona parte in un Seminario dell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze, il cui resoconto è apparso nel luglio 1970 a cura della C. L. U. S. F..

Per quanto riguarda le ultime ricerche concernenti i teoremi esistenziali e di unicità, per il caso unidimensionale sono stati raggiunti risultati soddisfacenti sotto ipotesi assai poco onerose sia per il caso del problema « ad una fase » (in cui ci si occupa della conduzione in una sola delle due fasi, supponendo che l'altra sia tutta alla temperatura caratteristica del cambiamento di fase; cfr. [17], [18], [19], e [26] per il problema in cui sul piano fisso si assegna la temperatura e [20] per quello in cui viene assegnato il flusso termico) che per il caso del problema « a due fasi » (cfr. [21], [22], [23], [24], [25]).

A lievissime ipotesi sulle funzioni che forniscono le condizioni iniziali ed al contorno fanno spesso riscontro, però, delle ipotesi semplificative sulla natura fisica del problema che hanno lo scopo di evitare altre complicazioni non lineari nella trattazione matematica. In particolare tali ipotesi portano a:

a) considerare che la temperatura a cui avviene il cambiamento di di fase sia costante;

b) considerare le caratteristiche termiche del mezzo come costanti, o al più funzioni del posto e del tempo ma non della temperatura; supposizione che spesso non può ritenersi soddisfatta dato che, al contrario, il calore specifico, la conducibilità e soprattutto la densità sono funzioni della temperatura;

c) considerare che la condizione sul contorno fisso sia data o dalla assegnazione del flusso o della temperatura, o al più di una combinazione lineare delle due suddette quantità ([11], [27]).

La discussione sulla assunzione a) è stata condotta in [8] e [9], conseguendo interessanti risultati in casi particolarmente espressivi.

Per quanto riguarda l'ipotesi semplificativa b) — in cui però anche la dipendenza della densità dal posto può rendere necessaria una trattazione a parte [10] — i più importanti lavori di cui siamo a conoscenza sono [4], [7], [9], [28], [29], [30], e [21]. In tutti i lavori citati (tranne l'ultimo di cui diremo più ampiamente in seguito), viene adottata l'ipotesi c).

Peraltro, ritornando ai problemi proposti dalla tecnica, in alcuni casi tale ultima ipotesi fornisce una approssimazione insufficiente: e ciò specialmente quando i salti termici in gioco sono elevati, come in alcuni casi afferenti i problemi di rientro dei veicoli spaziali, o quando le caratteristiche del processo richiedono una analisi più dettagliata (vedi ad esempio [31] o [32]). Ma basterà pensare semplicemente al caso in cui il contorno fisso viene riscaldato da parte di una sorgente irradiante secondo la ben nota legge di Stefan-Boltzmann che, nel caso unidimensionale, assume la forma (u , temperatura; u_0 temperatura della sorgente)

$$(1.1) \quad u_x = \eta [u^4 - u_0^4],$$

oppure al caso in cui esso viene raffreddato da un gas in regime di convezione libera, in cui vale la legge ([33])

$$(1.2) \quad u_x = \lambda [u - u_0]^{5/4}.$$

Nel presente lavoro ci siamo perciò proposti di studiare il problema di conduzione in un mezzo piano che inizialmente occupi (in un opportuno riferimento cartesiano) la striscia $0 \leq x \leq b$ ($b > 0$), con una assegnata temperatura $\psi(x)$ non negativa e sul cui piano $x = 0$ avvengono scambi termici con lo ambiente circostante retti dalla legge generale

$$(1.3) \quad u_x(0, t) = g[u(0, t), t].$$

Abbiamo poi supposto che si verifichi un cambiamento di stato con temperatura caratteristica nulla.

Nell'intento di affrontare separatamente le difficoltà, abbiamo per il momento supposto costanti le caratteristiche termiche del mezzo e ci siamo limitati al problema « ad una fase », rimandando ad un eventuale studio successivo l'esame di un problema più completo e complesso.

Il lavoro è così organizzato: nel paragrafo 3 abbiamo condotto una analisi rivolta a dedurre alcune informazioni a priori sulla soluzione; nel paragrafo 4 si dimostra il teorema di esistenza; successivamente (paragrafi 5 e 6) si dimostra la dipendenza continua e monotona della soluzione dai dati iniziali ed al contorno; nel paragrafo 7 si trovano delle condizioni che assicurano la infinita derivabilità della funzione che rappresenta il contorno libero; a conclusione si studia il comportamento asintotico della soluzione.

Esistenza e unicità della soluzione per un analogo problema sono state provate da F. P. Vasiliev [40] (cfr. anche G. H. Meyer [41]) mediante l'applicazione del metodo delle rette, sotto ipotesi abbastanza onerose sui dati. Il presente studio si distingue però dal lavoro citato grazie alla tecnica dimostrativa che, essendo essenzialmente basata sul principio di massimo e su metodi elementari dell'analisi funzionale, è necessariamente più agile dei procedimenti che involgono metodi alle differenze. Essa consente infatti non soltanto di assumere ipotesi meno restrittive, ma di condurre una indagine complementare sulle proprietà della soluzione. Sono inoltre possibili immediate estensioni a campi di simmetria diversa o, più generalmente, ad operatori parabolici soddisfacenti le ipotesi di validità del principio di massimo. Budak e Moskal, alla fine del lavoro sopra citato ([21]), asseriscono che il loro studio (che è applicato ad alcuni casi bidimensionali a più fasi) può essere esteso anche al caso da noi esaminato, in cui la condizione sul piano $x = 0$ sia di tipo non lineare. Ci sembra però opportuno notare che il loro metodo, basato su una elegante applicazione del teorema di Banach, già

introdotta da A. Friedman [38] per il problema ad una fase, conduce ad un teorema di esistenza per un intervallo di tempo *sufficientemente piccolo*. Il metodo da noi usato consente invece di dimostrare un teorema di esistenza *in grande* e sotto ipotesi meno onorose: di conseguenza abbiamo potuto (quando la situazione fisica consenta, come vedremo, di escludere la formazione di una terza fase) fare delle valutazioni asintotiche, che risultano aderenti alla intuizione fisica.

Un'ultima osservazione riguarda le « condizioni di sicurezza » che permettono di escludere la formazione di una terza fase a partire dal piano $x = 0$; queste non risultano legate al segno del flusso al contorno (come in tutte le trattazioni, anche lineari, precedenti) ma soltanto al valore della temperatura, fatto questo fisicamente assai più soddisfacente.

2. Posizione del problema.

Il problema enunciato nel paragrafo precedente può, come è noto, essere tradotto nella forma seguente:

$$(2.1) \quad u_{xx} - u_t = 0, \text{ in } D_T \equiv \{(x, t) : x \in (0, s(t)), t \in (0, T)\},$$

$$(2.2) \quad u(x, 0) = \psi(x) \geq 0; 0 \leq x \leq s(0); s(0) = b > 0,$$

$$(2.3) \quad u_x(0, t) = g[u(0, t), t], t \in (0, T],$$

$$(2.4) \quad u(s(t), t) = 0, \quad t \in (0, T],$$

$$(2.5) \quad \dot{s}(t) = -u_x(s(t), t), \quad t \in (0, T],$$

dove ψ e g , funzioni assegnate, rappresentano le condizioni iniziali ed al contorno e $T > 0$ è un istante arbitrario ma fissato.

Nel seguito chiameremo il problema (2.1)-(2.5) problema di Stefan (P.S.); mentre il problema (2.1)-(2.4), per una *assegnata* funzione $s(t) > 0$, continua in $[0, T]$, sarà chiamato problema ausiliario (P.A.).

Per soluzione di P.A. intenderemo una funzione $u(x, t)$, tale che:

$$(A) \quad u_{xx}, u_t \in C \text{ in } D_T \text{ e soddisfano la (2.1);}$$

$$(B) \quad u \in C \text{ in } \bar{D}_T, \text{ chiusura di } D_T, \text{ e verifica le (2.2), (2.4);}$$

$$(C) \quad \text{la (2.3) è soddisfatta, intendendo } u_x(0, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} u_x(x, t).$$

Per soluzione di P.S. intenderemo una coppia di funzioni $(s(t), u(x, t))$, tali che :

$$(\bar{A}) \quad s(0) = b, s(t) \in C, s(t) > 0 \text{ per } t \in [0, T]; s(t) \in C^1 \text{ per } t \in (0, T);$$

$$(\bar{B}) \quad u(x, t) \text{ è soluzione del corrispondente P.A. ; } u(x, t) \geq 0 \text{ in } D_T;$$

$$(\bar{C}) \quad u(x, t) \text{ e } s(t) \text{ soddisfano la (2.5).}$$

In un precedente lavoro [34] abbiamo dimostrato che P. A. ammette una unica soluzione nelle seguenti ipotesi :

$$(i) \quad s(t) \text{ è lipschitziana in } [0, T];$$

$$(ii) \quad \psi(x) \in C^1 \text{ in } [0, b]^{(4)}, \psi(b) = 0;$$

$$(iii) \quad g(\xi, t) \text{ è funzione continua dei suoi argomenti per}$$

$$\xi \in (-\infty, +\infty), t \in [0, T];$$

$$(iv) \quad g \text{ è una funzione monotona crescente di } \xi.$$

Quest'ultima ipotesi può essere indebolita (con una leggera complicazione delle dimostrazioni), richiedendo che g sia funzione non decrescente di ξ . Si veda a tale proposito l'Osservazione 3 nell'Appendice al termine del lavoro.

Analoghi risultati possono essere ottenuti per il problema ausiliario nel semispazio $x \geq 0$, che indicheremo con P. A. $_{\infty}$, definito dalla equazione (2.1) in $D_T^{\infty} \equiv \{(x, t) : x > 0, 0 < t \leq T\}$, dalla condizione (2.2) con $\psi(x) = 0$ per $x > b$, e dalla (2.3); dimostreremo infatti il seguente

TEOREMA 1. *Nelle ipotesi (ii) (iii) (iv) P.A. $_{\infty}$ ammette una ed una sola soluzione $v_{\infty}(x, t)$, tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_{\infty}(x, t) = 0, t \in [0, T]$.*

DIMOSTRAZIONE: vedi Appendice.

Per la dimostrazione della esistenza, unicità, stabilità e dipendenza monotona dai dati della soluzione di P.S. utilizzeremo anche le seguenti

⁽⁴⁾ Questa ipotesi può essere indebolita, come mostrato in [42], potendosi richiedere la continuità di ψ in $[0, b]$, mentre per la dimostrazione dei lemmi 1 e 4 del presente lavoro e delle loro conseguenze (esistenza, ecc.) basterebbe supporre: $0 \leq \psi(x) \leq A(b-x)$, con A costante.

ipotesi sulla funzione g :

(v) $g(\psi(0), 0) < 0$ nel caso $\psi(0) = 0$;

(vi) $g(\xi, t)$ è lipschitziana in ξ , uniformemente rispetto a t .

Per trattare infine alcuni esempi di valutazione asintotica della soluzione di P.S., sarà poi necessario premettere alcune ipotesi complementari sulla funzione g , e dedurre la limitazione a priori per la funzione $v_\infty(x, t)$ stabilita dal seguente

TEOREMA 2. *La funzione g soddisfi le ipotesi (iii) e (iv) e per ogni $t > 0$ esista una soluzione ξ_0 dell'equazione $g(\xi, t) = 0$ tale che*

$$(2.6) \quad \xi_0 \leq X \quad \text{per } t \in (0, +\infty)$$

con X costante. Si ha allora:

$$(2.7) \quad v_\infty(x, t) \leq Z \quad x \in [0, +\infty), t \in [0, +\infty),$$

con Z costante dipendente dai dati, ma non da T . In assenza dalla (2.6) la (2.7) è ancor valida, ma con Z dipendente anche da T .

DIMOSTRAZIONE: vedi Appendice.

3. Deduzione a priori di alcune proprietà della soluzione di P.S..

Sia (s, u) una eventuale soluzione di P.S.. Ricaveremo su di essa in questo paragrafo alcune informazioni a priori, che ci saranno utili per la dimostrazione del teorema di esistenza.

LEMMA 1. *Nelle ipotesi (i) (ii) (iii) la condizione (2.5) è equivalente alla seguente relazione integrale:*

$$(3.1) \quad s(t) = b + \int_0^b \psi(x) dx - \int_0^t g[u(0, \tau), \tau] d\tau - \int_0^{s(t)} u(x, t) dx, \quad t \in [0, T].$$

DIMOSTRAZIONE. Se (s, u) è una soluzione di P.S., la (3.1) segue dall'integrazione di (2.1) in D_T , utilizzando le (2.2)-(2.5). Se viceversa per la coppia (s, u) sono verificate le (2.1)-(2.4) e la (3.1), la (2.5) segue derivando la (3.1), grazie alla ipotesi (iii), purché $u_x(s(t), t)$ sia continua per $t > 0$, ciò che è assicurato, per la (i), (ii), da [17] (lemma 1).

Allo scopo di ottenere una limitazione a priori per la soluzione di P. S. è utile premettere una breve analisi circa la dipendenza monotona dal contorno della soluzione di P.A.

Fissato $T > 0$, sia $\mathcal{L}_{[0, T]}$ l'insieme delle funzioni $r(t)$ lipschitziane in $[0, T]$ con $r(0) = b$ e $b \leq r(t), t \in [0, T]$. Per ogni $r \in \mathcal{L}_{[0, T]}$ indichiamo con $v_r(x, t)$ la corrispondente soluzione di P.A. in $D_T^{(r)} \equiv \{(x, t) : 0 < x < r(t), 0 < t \leq T\}$. Dimostriamo il seguente

LEMMA 2. *Sotto le ipotesi (ii)-(v) esiste un istante $T_0 \in (0, T]$ tale che, comunque si prendano $r_1, r_2 \in \mathcal{L}_{[0, T]}$, con $r_1(t) \leq r_2(t)$ in $[0, T]$, è*

$$(3.2) \quad 0 < v_{r_1}(x, t) \leq v_{r_2}(x, t) < v_\infty(x, t) \text{ in } D_{T_0}^{(r_1)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $r \in \mathcal{L}_{[0, T]}$. Supposto $\psi(0) = 0$, per la (v) e la continuità di v_r esiste un intervallo di tempo $(0, \varepsilon)$ nel quale si ha $g(v_r(0, t), t) < 0$ e di conseguenza $v_r(0, t) > 0$ per il principio di massimo. È perciò comunque definito l'istante $T_r = \sup \{t : t \in (0, T], v_r(0, t) > 0\}$ e dunque, per il principio di massimo forte, $v_r(x, t) > 0$ in $D_{T_r}^{(r)}$.

Prese ora $r_1, r_2 \in \mathcal{L}_{[0, T]}$ con $r_1(t) \leq r_2(t)$ in $[0, T]$, sia $T_{r_1, r_2} = \min [T_{r_1}, T_{r_2}] > 0$. Consideriamo in $D_{T_{r_1, r_2}}^{(r_1)}$ la funzione $w(x, t) = v_{r_1}(x, t) - v_{r_2}(x, t)$. Si ha $w(x, 0) = 0, x \in [0, b]$; $w(r_{r_1}(t), t) \leq 0, t \in [0, T_{r_1, r_2}]$. Se fosse $w(x, t) > 0$ in qualche punto, la funzione w dovrebbe assumere un massimo positivo in almeno un punto $(0, \bar{t})$, nel quale si avrebbe $w_x(0, \bar{t}) = g[v_{r_1}(0, \bar{t}), \bar{t}] - g[v_{r_2}(0, \bar{t}), \bar{t}] \leq 0$ contro la (iv). Si ha pertanto

$$(3.3) \quad 0 < v_{r_1}(x, t) \leq v_{r_2}(x, t)$$

in $D_{T_{r_1, r_2}}^{(r_1)}$ e di conseguenza $T_{r_1} \leq T_{r_2}$.

Posto allora $T_0 = T_{r_0} > 0$, essendo $r_0(t) \equiv b, t \in [0, T]$, la (3.3) è valida in $D_{T_0}^{(r_1)}$ per qualunque coppia r_1, r_2 , soddisfacente le ipotesi richieste. Potendosi infine provare con analogo ragionamento l'ultima delle disuguaglianze (3.2), il lemma 2 resta dimostrato.

Avremo ora che se (s, u) è una soluzione di P.S. in D_{T_0} e s è lipschitziana in $[0, T_0]$, è, per le (\bar{A}) e (\bar{B}) , $\dot{s} \geq 0$ in $(0, T_0]$ e dunque $s \in \mathcal{L}_{[0, T_0]}$. Se ne deduce che per la (3.2) e per l'ipotesi di monotonia della g , è

$$(3.4) \quad g(v_{r_0}(0, t), t) \leq g(u(0, t), t) \leq g(v_\infty(0, t), t), t \in [0, T_0].$$

Ne risulta che

$$(3.5) \quad |g(u(0, t), t)| \leq K, \quad t \in [0, T_0],$$

dove, ricordando ancora l'ipotesi di monotonia per la g , è:

$$(3.6) \quad K = \max \left\{ - \min_{[0, T_0]} g(v_{r_0}(0, t), t), \max_{[0, T_0]} g(v_{\infty}(0, t), t) \right\}.$$

Definita allora la funzione

$$(3.7) \quad \begin{aligned} g^*(\xi, t) &= g(\xi, t), & \text{per } |g| \leq K, \\ g^*(\xi, t) &= K \operatorname{sign} g(\xi, t), & \text{per } |g| > K, \end{aligned}$$

resta dimostrato il seguente

LEMMA 3. *Nell'intervallo $[0, T_0]$ ogni soluzione (s, u) di P.S., con s lipschitziana in $[0, T_0]$ risolve anche, nelle ipotesi (ii)-(v), un analogo problema (P.S.*) in cui la (2.3) è sostituita da*

$$(2.3') \quad u_x(0, t) = g^*[u(0, t), t]$$

e viceversa.

Possiamo quindi ottenere ulteriori informazioni a priori sulle soluzioni di P.S., studiando il problema ausiliario P.A.*, ottenuto da P.A. sostituendo la (2.3) con la (2.3'). Sussiste infatti il

LEMMA 4. *Nelle ipotesi (i)-(v), se $s(t)$ è una funzione non decrescente e $v(x, t)$ è la soluzione del corrispondente P.A.*, è*

$$(3.8) \quad -A \leq v_x(s(t), t) \leq 0 \quad \text{per } t \in (0, T_0],$$

con

$$(3.9) \quad A = \max \{K, \sup_{[0, b]} [\psi(x)/(b-x)]\}.$$

DIMOSTRAZIONE. L'ipotesi di monotonia di $s(t)$ ed il lemma 2 ci consentono di affermare che $v(0, t)$ è positiva in $(0, T_0]$. Da ciò e dal principio di massimo segue la seconda parte della (3.8). La dimostrazione della prima parte della (3.8) è basata sulla (3.7), sull'ipotesi (ii), sulla supposta monotonia di s e sul principio di massimo applicato alla funzione

$$W(x, t) = v(x, t) - A'[s(t_0) - x], \quad A' = A + \varepsilon,$$

con ε numero positivo arbitrario, A definito dalla (3.9) e t_0 fissato arbitrariamente in $(0, T_0]$. Risulta infatti

$$W_x(0, t) = v_x(0, t) + A' > 0, \quad t \in (0, t_0]$$

$$W(s(t), t) = -A'[s(t_0) - s(t)] \leq 0, \quad t \in (0, t_0]$$

$$W(x, 0) \leq \psi(x) - A'(b - x) \leq 0, \quad x \in [0, b]$$

da cui, per il principio di massimo

$$W(x, t) \leq 0 \quad \text{in } D_{t_0},$$

per cui

$$W_x(s(t_0), t_0) \geq 0,$$

qualunque sia $t_0 \in (0, T_0]$, che dimostra appunto, per l'arbitrarietà di ε , la prima delle disuguaglianze (3.8).

4. Esistenza della soluzione di P. S..

Per la dimostrazione del teorema di esistenza faremo uso del seguente

LEMMA 5. *Se la funzione $y(t)$ soddisfa nell'intervallo $[0, T]$ la disuguaglianza*

$$(4.1) \quad 0 \leq y(t) \leq p(t) + q \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau,$$

con $q \geq 0$, costante, e $p(t)$ funzione non negativa e non decrescente, allora

$$(4.2) \quad 0 \leq y(t) \leq Cp(t)$$

con

$$C = \left(1 + 2q T^{\frac{1}{2}}\right) \exp(\pi q^2 T).$$

DIMOSTRAZIONE: vedi [35].

Dimostriamo adesso il teorema di esistenza per P. S.:

TEOREMA 3. *Nelle ipotesi (ii)-(vi) P.S. ammette soluzioni in $(0, T_0]$.*

Per il lemma 3 basterà dimostrare il teorema per P.S.*, mostrando nel contempo che la funzione s , ottenuta quale soluzione, è lipschitziana in $[0, T_0]$.

I risultati ottenuti nel paragrafo precedente ci consentono ora di usare un elegante metodo, applicato con successo ai vari casi lineari da J. R. CANNON e C. D. HILL ([17], [26]) e, in seguito, in [19], [20], [23], [24], [25].

Si tratta, in sostanza, di costruire una successione di approssimazioni $(s^\vartheta, u^\vartheta)$ alla soluzione cercata, come soluzione di una famiglia di problemi ausiliari, ottenuti « ritardando l'argomento » nella condizione di Stefan (2.5) per ogni $\vartheta \in (0, b)$ nel seguente modo:

$$(4.3) \quad \begin{cases} u_{xx}^\vartheta = u_t^\vartheta, & \text{in } D_{T_0}^\vartheta \equiv \{(x, t) : x \in (0, s^\vartheta(t)), t \in (0, T_0)\}; \\ u^\vartheta(x, 0) = \psi^\vartheta(x), & \text{per } x \in [0, b]; \\ u^\vartheta(s^\vartheta(t), t) = 0, & \text{per } t \in [0, T_0]; \\ u_x^\vartheta(0, t) = g^*[u^\vartheta(0, t), t], & \text{per } t \in (0, T_0); \end{cases}$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} s^\vartheta(0) = b \\ s^\vartheta(t) = \begin{cases} 0, & \text{per } t \in [0, \vartheta], \\ -u_x^\vartheta(s^\vartheta(t - \vartheta), t - \vartheta) & \text{per } t \in [\vartheta, T_0]. \end{cases} \end{cases}$$

Nel problema (4.3)-(4.4) ψ^ϑ è così definita:

$$(4.5) \quad \psi^\vartheta(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in [0, b - \vartheta] \\ \gamma^\vartheta(x), & x \in [b - \vartheta, b], \end{cases}$$

in cui γ^ϑ è una qualsiasi funzione che possiede i seguenti requisiti:

- è continua con la sua derivata prima,
- $\gamma^\vartheta(b - \vartheta) = \psi(b - \vartheta)$, $\gamma_x^\vartheta(b - \vartheta) = \psi_x(b - \vartheta)$,
- $\gamma^\vartheta(b) = \gamma_x^\vartheta(b) = 0$,
- $\max |\gamma^\vartheta| \leq \max_{[b - \vartheta, b]} \psi$.

Essendo per la (4.4) $s^\vartheta(t) = b$ per $t \in [0, \vartheta]$, le funzioni $u^\vartheta(x, t)$ risultano determinate risolvendo il problema (4.3) per i successivi intervalli di tempo $[n\vartheta, (n + 1)\vartheta]$, $n = 1, 2, \dots, N - 1$; $N\vartheta \leq T_0 < (N + 1)\vartheta$, nei quali s^ϑ è fornita, attraverso la (4.4), dalla soluzione di (4.3) in $[(n - 1)\vartheta, n\vartheta]$.

Inoltre, in base alla (4.4) ed al lemma 4, si ha

$$0 \leq s^\vartheta(t) \leq A, \quad t \in [0, T_0].$$

Di conseguenza, al variare di ϑ in $(0, b)$ le $s^\vartheta(t)$ costituiscono una famiglia di funzioni equicontinue ed equilimitate, dalla quale, per il teorema di

Ascoli-Arzelà può estrarsi una successione $\{s^{\vartheta_n}\}$, $\vartheta_n \rightarrow 0$ ⁽²⁾ convergente uniformemente ad una funzione $s(t)$ non decrescente e lipschitziana in $[0, T_0]$. Risolvendo il P.A.* corrispondente ad $s(t)$, si ottiene una funzione $u(x, t)$ che per il lemma 2 è positiva in D_{T_0} :

$$(4.6) \quad u(x, t) > 0 \quad \text{in } D_{T_0}.$$

Mostriamo ora che la successione $\{u^{\vartheta}(x, t)\}$ tende uniformemente a $u(x, t)$ per ϑ tendente a zero.

Siano u_1^{ϑ} e u_2^{ϑ} le soluzioni dell'equazione del calore relative alle seguenti condizioni iniziali ed al contorno

$$u_1^{\vartheta}(x, 0) = \psi^{\vartheta}, \quad u_2^{\vartheta}(x, 0) = 0$$

$$u_1^{\vartheta}(s^{\vartheta}(t), t) = 0, \quad u_2^{\vartheta}(s^{\vartheta}(t), t) = 0,$$

$$u_{1x}^{\vartheta}(0, t) = g[u(0, t), t], \quad u_{2x}^{\vartheta}(0, t) = g[u^{\vartheta}(0, t), t] - g[u(0, t), t].$$

Manifestamente è

$$(4.7) \quad |u - u^{\vartheta}| \leq |u - u_1^{\vartheta}| + |u_2^{\vartheta}|.$$

Il primo termine al secondo membro non supera, per il principio di massimo, la quantità

$$\Delta(\vartheta) \equiv \max_{[0, T_0]} \{ \max_{[0, b]} |\psi - \psi^{\vartheta}|, u(s^{\vartheta}(t), t), u_1^{\vartheta}(s(t), t) \}$$

(si intende di prolungare le funzioni u e u_1^{ϑ} ponendole uguali a zero fuori del relativo dominio di definizione) e quindi tende a zero uniformemente per $\vartheta \rightarrow 0$.

Per quanto riguarda il termine $|u_2^{\vartheta}|$, possiamo affermare che esso è dominato dalla funzione \tilde{u}_2 , soluzione nel semispazio $x > 0$ dell'equazione del calore con le condizioni

$$\tilde{u}_2(x, 0) = 0, \quad \tilde{u}_{2x}(0, t) = - |g[u^{\vartheta}(0, t), t] - g[u(0, t), t]|,$$

(2) Nel seguito della dimostrazione ometteremo l'indice n e scriveremo $\lim_{\vartheta \rightarrow 0}$, intendendo che ϑ tende a zero percorrendo gli elementi della successione $\{\vartheta_n\}$.

per cui avremo, ricordando l'ipotesi (vi),

$$|u_2^\vartheta| \leq H \int_0^t \frac{|u^\vartheta(0, \tau) - u(0, \tau)|}{\sqrt{t - \tau}} d\tau,$$

essendo H una costante dipendente dalla costante di Lipschitz per la funzione g ma non da ϑ . Tenendo infine conto della (4.7) e del lemma 5, si ottiene

$$|u_2^\vartheta| \leq H_1 \Delta(\vartheta),$$

con H_1 costante indipendente da ϑ ; è perciò

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} u^\vartheta(x, t) = u(x, t)$$

uniformemente in D_{x_0} .

Sulla base dei risultati fin qui ottenuti possiamo ora provare che (s, u) è soluzione di P.S.:

- la proprietà (\bar{B}) è provata per la definizione di $u(x, t)$ e per la (4.6);
- la proprietà (\bar{C}) si dimostra osservando che dalle (4.3) e (4.4) discende

$$s^\vartheta(t + \vartheta) = b + \int_0^b \psi^\vartheta(x) dx - \int_0^t g[u^\vartheta(0, \tau), \tau] d\tau - \int_0^{s^\vartheta(t)} u^\vartheta(x, t) dx$$

e che $\psi^\vartheta \rightarrow \psi$ uniformemente in $[0, b]$ per $\vartheta \rightarrow 0$. Si trova infatti, passando al limite per $\vartheta \rightarrow 0$, che (s, u) soddisfa la (3.1) e di conseguenza (v. lemma 1) la (2.5);

- la proprietà (\bar{A}) discende dalla (\bar{C}) e dalla continuità di $u_x(s(t), t)$ ([17], lemma 1).

Il teorema di esistenza resta così dimostrato.

OSSERVAZIONE 1. Evidentemente il caso lineare, in cui $g[u(0, t), t] \equiv c_1(t)u(0, t) + c_2(t)$, con $c_1 \geq 0$, del quale si è detto al paragrafo 1, rientra come caso particolare in quello qui esaminato.

Le differenze sostanziali della presente trattazione rispetto a quelle già citate risiedono:

a) nel modo diverso di ricavare le informazioni a priori e nella necessità di premetterle alla dimostrazione del lemma 4, che condiziona la dimostrazione del teorema 3;

b) nel diverso procedimento dimostrativo usato per provare che $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} u^\vartheta(x, t) = u(x, t)$;

c) nella limitazione ottenuta per l'intervallo di tempo in cui esiste la soluzione, non più legata al segno del flusso al contorno, ma soltanto al segno della temperatura: fatto questo fisicamente più significativo, perché porta a definire una soluzione fino al momento in cui un'altra fase può formarsi a partire dal piano $x = 0$.

Nei paragrafi seguenti studieremo le proprietà di maggior senso fisico delle soluzioni di P. S. ed intenderemo sempre verificate le ipotesi del teorema 3.

5. Dipendenza continua della soluzione dai dati. Unicità.

Siano (s_i, u_i) , $i = 1, 2$, due soluzioni P.S. corrispondenti ai dati $\{g_i, \psi_i, b_i\}$. Indicate con A_1 e A_2 le costanti definite dalla (3.9) nei rispettivi casi, poniamo

$$B = \max \{A_1, A_2\}.$$

Sia poi $E = \max \{Z_1, Z_2\}$, con Z_i definito dalla (2.7), e G la maggiore fra le costanti di Lipschitz di g_1 e g_2 per $t \in [0, T_0]$ e $\xi \in [0, E]$. Definiamo infine, se ad esempio $b_1 \leq b_2$,

$$\|\psi_1 - \psi_2\| = \max_{[0, b_1]} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|,$$

$$\|g_1 - g_2\| = \max_{\substack{t \in [0, T_0] \\ \xi \in [0, E]}} |g_1(\xi, t) - g_2(\xi, t)|.$$

La dipendenza continua delle soluzioni di P. S. dai dati iniziali ed al contorno è stabilita dal seguente

TEOREMA 4. *I dati $\{g_i, \psi_i, b_i\}$ soddisfino le ipotesi del teorema 3 e sia $0 < b_1 \leq b_2$. Esistono allora due costanti $N(b_1, T_0, B, G)$ ed $M(b_1, T_0, B, G)$, tali che*

$$(5.1) \quad |s_1(t) - s_2(t)| \leq N \left\{ (b_2 - b_1) + \|\psi_1 - \psi_2\| + \int_{b_1}^{b_2} \psi_2(x) dx + \|g_1 - g_2\| \right\} \equiv N \bar{A}, \quad t \in [0, T_0],$$

$$(5.1') \quad |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq M \bar{A}, \quad \text{in } \bar{D}_{T_0}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Poniamo

$$(5.2) \quad \alpha(t) = \min \{s_1(t), s_2(t)\}; \beta(t) = \max \{s_1(t), s_2(t)\}, \quad t \in [0, T_0],$$

$$(5.3) \quad \delta(t) = |s_1(t) - s_2(t)| = \beta(t) - \alpha(t), \quad t \in [0, T_0].$$

Dalla (3.1) segue:

$$(5.4) \quad \delta(t) \leq (b_2 - b_1) + \int_0^{b_1} |\psi_1 - \psi_2| dx + \int_{b_1}^{b_2} \psi_2 dx + \\ + \int_0^t |g_1(u_1(0, \tau), \tau) - g_2(u_2(0, \tau), \tau)| d\tau + \int_0^{\alpha(t)} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| dx + \\ + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_j(x, t) dx,$$

dove l'indice $j \in \{1, 2\}$ è scelto per ogni t in modo che la $u_j(x, t)$ sia definita tra $\alpha(t)$ e $\beta(t)$. Dobbiamo esaminare soltanto gli ultimi tre termini nella (5.4), poiché è chiaro come i precedenti contribuiscono al secondo membro della (5.1).

Per la stima di

$$\int_0^{\alpha(t)} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| dx + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_j(x, t) dx,$$

si utilizza il lemma 4 e il principio di massimo applicato alle u_{ix} , per ottenere la maggiorazione

$$(5.5) \quad |u_1(\alpha(t), t) - u_2(\alpha(t), t)| = u_j(\alpha(t), t) \leq B(t);$$

quindi, posto

$$(5.6) \quad \|\delta\|_t = \max_{0 \leq \tau \leq t} |\delta(\tau)|,$$

si ottiene senza difficoltà, mediante tecniche note (cfr. anche [36]):

$$\int_0^{\alpha(t)} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| dx + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_j(x, t) dx \leq \int_0^{b_1} |\psi_1 - \psi_2| dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t |g_1 [u_1(0, \tau), \tau] - g_2 [u_2(0, \tau), \tau]| d\tau + \\
 & + \int_{b_1}^{b_2} \psi_2(x) dx + N_1 \int_0^t \frac{\|\delta\|_\tau}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.
 \end{aligned}$$

Qui e nel seguito N_m ed N'_m , $m = 1, 2, \dots$, denotano delle costanti dipendenti al più da b_1, T_0, B, G .

Il termine $\int_0^t |g_1 [u_1(0, \tau), \tau] - g_2 [u_2(0, \tau), \tau]| d\tau$ può essere maggiorato

con $G \int_0^t |u_1(0, \tau) - u_2(0, \tau)| d\tau + t \|g_1 - g_2\|$. Resta dunque da valutare la differenza $|u_1(0, t) - u_2(0, t)|$ e ciò può esser fatto con la maggiorazione

$$(5.7) \quad |u_1(0, t) - u_2(0, t)| \leq |u_1(0, t) - z_1(0, t)| + |z_2(0, t)| + |z_3(0, t)|,$$

definendo le funzioni z_1, z_2, z_3 come le soluzioni dell'equazione del calore con le seguenti condizioni iniziali ed al contorno :

$$\begin{cases} z_{1x}(0, t) = g_1(u_1(0, t), t), \\ z_1(x, 0) = \psi_2(x), \\ z_1(s_2(t), t) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{2x}(0, t) = g_2(u_2(0, t), t) - g_2(u_1(0, t), t), \\ z_2(x, 0) = 0, \\ z_2(s_2(t), t) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{3x}(0, t) = g_2(u_1(0, t), t) - g_1(u_1(0, t), t), \\ z_3(x, 0) = 0, \\ z_3(s_2(t), t) = 0. \end{cases}$$

Considerando il problema di conduzione del calore relativo alla differenza $u_1(x, t) - z_1(x, t)$ nel dominio ottenuto per riflessione attorno al piano

$x = 0$ di $\{(x, t) : 0 \leq x < \alpha(t), t \in (0, T_0]\}$, si trova

$$(5.8) \quad |u_1(0, t) - z_1(0, t)| \leq \|\psi_1 - \psi_2\| + A \|\delta\|_t.$$

Operando in modo simile a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 3 si dimostra poi che

$$(5.9) \quad |z_2(0, t)| \leq N_2 \int_0^t \frac{|u_1(0, \tau) - u_2(0, \tau)|}{|t - \tau|} d\tau.$$

Infine, $|z_3(x, t)|$ è maggiorata dalla soluzione $\tilde{z}_3(x, t)$ dell'equazione del calore nel semispazio, soddisfacente le condizioni

$$\tilde{z}_{3x}(x, t) = -\|g_1 - g_2\|, \quad \tilde{z}_3(x, 0) = 0,$$

e dunque

$$(5.10) \quad z_3(0, t) \leq N_3 \|g_1 - g_2\|,$$

La (5.7) con le (5.8)-(5.10) dà, per il lemma 5 :

$$(5.11) \quad |u_1(0, t) - u_2(0, t)| \leq N_4 \|\delta\|_t + N_5 \|\psi_1 - \psi_2\| + N_6 \|g_1 - g_2\|$$

e dunque

$$\int_0^t |u_1(0, \tau) - u_2(0, \tau)| d\tau \leq N'_4 \int_0^t \frac{\|\delta\|_\tau}{|t - \tau|} d\tau + N'_5 \|\psi_1 - \psi_2\| + N'_6 \|g_1 - g_2\|.$$

Utilizzando allora nella (5.4) i risultati ottenuti ed applicando nuovamente il lemma 5, si completa la dimostrazione della (5.1). Ovviamente la (5.1), la (5.5) e la (5.11) comportano la (5.1').

Come conseguenza immediata segue il teorema di unicità :

TEOREMA 5. *Nelle ipotesi del teorema 3 e 4, P. S. ammette una unica soluzione.*

6. Dipendenza monotona della soluzione dai dati.

Il seguente teorema completa l'informazione data dal teorema 4 circa la dipendenza della soluzione di P. S. dai dati iniziali ed al contorno :

TEOREMA 6. Se (s_i, u_i) , $i = 1, 2$, sono le soluzioni di P.S. corrispondenti ai dati $\{b_i, \psi_i, g_i\}$ soddisfacenti le ipotesi del teorema 3 con

$$(6.1) \quad 0 < b_1 \leq b_2; \quad \psi_1(x) \leq \psi_2(x) \text{ in } [0, b_1];$$

$$g_1(\xi, t) \geq g_2(\xi, t)^{(3)}, \quad \xi \in (-\infty, +\infty), \quad t \in [0, T_0]$$

si ha

$$(6.2) \quad s_1(t) \leq s_2(t), \quad t \in [0, T_0],$$

$$(6.2) \quad 0 \leq u_1(x, t) \leq u_2(x, t) \text{ in } D_{T_0}^{(s_1)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Esaminiamo dapprima il caso $b_1 < b_2$ e dimostriamo che $s_1(t) < s_2(t)$ in $[0, T_0]$: se ciò non fosse, esisterebbe un primo istante t_0 tale che

$$(6.3) \quad s_1(t_0) = s_2(t_0), \quad \dot{s}_1(t_0) \geq \dot{s}_2(t_0).$$

Se inoltre la differenza $u_1(x, t) - u_2(x, t)$, non positiva per $t = 0$ e $x \in [0, b_1]$ e negativa per $x = s_1(t)$, con $t \in (0, t_0)$, prendesse valori positivi, dovrebbe assumerne il massimo per $x = 0$, ove si ha:

$$u_{1x}(0, t) - u_{2x}(0, t) = g_1[u_1(0, t), t] - g_2[u_1(0, t), t] + \\ + g_2[u_1(0, t), t] - g_2[u_2(0, t), t].$$

Il secondo membro è però positivo nell'ipotetico punto di massimo per l'ultima delle (6.1) e per la monotonia delle g . Per conseguenza in virtù del principio di massimo forte, è $u_1(x, t) - u_2(x, t) < 0$ in $D_{t_0}^{(s_1)}$ e quindi, per il teorema di Viborni-Friedman [38], $u_{1x}(s_1(t_0), t_0) > u_{2x}(s_2(t_0), t_0)$, in contraddizione con la seconda delle (6.3). Dunque per $b_1 < b_2$ le (6.2) e (6.2') sono verificate in senso forte.

Il caso $b_1 = b_2$ si riconduce al precedente mediante l'introduzione di una famiglia di soluzioni (s_2^δ, u_2^δ) , $\delta \in (0, b_1)$, di problemi aventi come condizioni iniziali $b^\delta = b_2 + \delta$, $u_2^\delta(x, 0) = \psi_0^\delta(x)$, con $\psi_2^\delta(x)$ coincidente con $\psi_2(x)$ in $[0, b_2 - \delta]$ e costruita in $[b_2 - \delta, b_2 + \delta]$ in modo che

- $\psi_2^\delta \in C^1$ in $[0, b_2 + \delta]$;
- $\lim_{\delta \rightarrow 0} \psi_2^\delta = \psi_2$ uniformemente in $[0, b_2]$;
- $\psi_2 \leq \psi_2^\delta$ nel comune intervallo di definizione.

(3) E' sufficiente che sia $g_1^*(\xi, t) \geq g_2^*(\xi, t)$.

Per il ragionamento precedente sarà $s_2^\delta > s_1$ e $u_2^\delta > u_1$. Il teorema 4 implica del resto che $s_2^\delta \rightarrow s_2$ e $u_2^\delta \rightarrow u_2$ uniformemente per $\delta \rightarrow 0$. Ciò completa la dimostrazione del teorema.

7. Infinita differenziabilità del contorno.

In base ai risultati ottenuti in [37] ed in virtù della continuità di $u(0, t)$ in $[0, T_0]$, si può affermare che:

TEOREMA 7. *Se $\psi(x) \equiv 0$ in $[0, b]$ la funzione $s = s(t)$ è infinitamente differenziabile in $(0, T_0]$.*

8. Alcune considerazioni sul comportamento asintotico della soluzione.

Per maggior chiarezza di esposizione, in questo paragrafo scriveremo la (2.3) nella forma

$$(2.3'') \quad u_x(0, t) = g[u(0, t), \varphi(t)],$$

attribuendo alla funzione $\varphi(t)$, in aderenza al significato fisico di tale condizione e conformemente agli esempi (1.1) e (1.2) citati nell'introduzione, il significato di « temperatura esterna ». Supporremo $\varphi(t)$ continua e limitata per $t \geq 0$: $|\varphi(t)| \leq \bar{\eta}$; coerentemente con il senso ora assunto dalla (2.3'') richiederemo che, oltre alle citate ipotesi (iii), (iv), (v) ed alla (2.8) valgano le seguenti:

$$(8.1) \quad g(u, u) = 0,$$

$$(8.2) \quad g(u, \varphi) \text{ è funzione continua decrescente di } \varphi.$$

È poi necessario completare la descrizione della dipendenza di g dal primo argomento, supponendo che esista una costante $\alpha > 0$ tale che:

$$(8.3) \quad g(\xi_1, \eta) - g(\xi_2, \eta) > \alpha(\xi_1 - \xi_2)$$

per ogni $\xi_1 > \xi_2$, uniformemente rispetto ad $\eta \leq \bar{\eta}$. La (8.3) implica ovviamente la (iv).

OSSERVAZIONE 2. Per il teorema 2 e ricordando ancora il lemma 2, i risultati ottenuti in [34] per P. A. in D_T sono estesi, per $s \in \mathcal{L}_{[0, T]}$, a tutta la regione $D_\infty \equiv \{(x, t) : x \in (0, s(t)), t > 0\}$.

Prima di studiare il comportamento asintotico della soluzione di P. S., occorre accertarsi che tale soluzione esista effettivamente per ogni $t > 0$, o — ciò che è lo stesso — stabilire delle condizioni sufficienti ad assicurare che non sia possibile l'apparizione di una nuova fase; per il principio di massimo, ciò si traduce nel trovare condizioni sufficienti acciocché sia $u(0, t) > 0$ per qualunque $t > 0$. Una condizione fisicamente accettabile è che sia

$$(8.4) \quad \varphi(t) \geq 0, \quad \text{per } t \geq 0;$$

o, equivalentemente

$$(8.4') \quad g(0, \varphi(t)) \leq 0 \quad \text{per } t \geq 0.$$

Dal punto di vista puramente matematico, d'altra parte, la (8.4') insieme con la (v), che ora diviene $g[\psi(0), \varphi(0)] < 0$ se $\psi(0) = 0$, assicura che

$$(8.5) \quad v_{r_0}(0, t) > 0 \quad \text{per } t > 0$$

(si ricordi il principio di massimo forte ed il teorema di Viborni-Friedman); di conseguenza, per il lemma 2, $u(0, t) > 0$ per $t > 0$.

Nelle ipotesi illustrate, dimostriamo il seguente.

TEOREMA 8. *Se $\varphi(t)$ è a supporto compatto in $(0, +\infty)$, si ha*

$$(8.6) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = s_\infty \leq H$$

con H costante determinabile a priori (vedi (8.12)).

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 4 di [26] sarà sufficiente provare che

$$\int_0^\infty u(0, t) dt < +\infty.$$

A tale scopo osserviamo anzitutto che, nelle ipotesi esposte, è $\varphi(t) \equiv 0$ per $t \geq t^*$ ed usiamo ancora la (3.1) per ottenere una maggiorazione a priori di $s(t^*)$:

$$(8.7) \quad s(t^*) < \Sigma = b + \int_0^b \psi(x) dx - \int_0^{t^*} g(0, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Utilizziamo ora le (8.1), (8.3) per trovare, per $t > t^*$,

$$(8.8) \quad u_x(0, t) = g[u(0, t), 0] = g[u(0, t), 0] - g[0, 0] > \alpha u(0, t).$$

Richiamando il lemma 2 ed il teorema 2, posto

$$\Omega(x) = \begin{cases} Z & \text{per } x \in [0, \Sigma] \\ 0 & \text{per } x > \Sigma, \end{cases}$$

in base alla (8.8) la funzione $u(x, t)$ è maggiorata per $t > t^*$, come si riconosce con una elementare applicazione del principio di massimo, dalla funzione $\omega(x, t)$ che risolve il problema

$$(8.10) \quad \begin{cases} \omega_{xx} = \omega_t, & x \in (0, +\infty), t \in (t^*, +\infty), \\ \omega(x, t^*) = \Omega(x), & x \in [0, +\infty), \\ \omega_x(0, t) = \alpha \dot{\omega}(0, t), & t > t^*. \end{cases}$$

La conoscenza di tale soluzione (cfr. [33], pag. 359) ci consente di scrivere

$$(8.11) \quad \int_{t^*}^{\infty} u(0, t) dt \leq Z \int_0^{\infty} \left\{ e^{a^2 t} \operatorname{erfc}(\alpha \sqrt{t}) - e^{a^2 t + a^2 \Sigma} \operatorname{erfc}\left(\frac{\Sigma}{2\sqrt{t}} + \alpha \sqrt{t}\right) \right\} dt.$$

Dell'integrale al secondo membro si riconosce facilmente la convergenza. Detto I il suo valore resta dimostrata per il già citato teorema di [26], la validità della (8.6) con

$$(8.12) \quad H = (b^2 + 2 \int_0^b x \psi(x) dx + 2I + 2Zt^*)^{\frac{1}{2}},$$

che, come annunciato, è calcolabile in base ai dati.

Illustriamo ora un caso in cui il limite di $s(t)$ è infinito.

TEOREMA 9. *Se $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \varphi_{\infty} > 0$, si ha*

$$(8.13) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente mostrare che

$$(8.14) \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} v_{r_0}(0, t) > 0,$$

la (8.13) segue allora dal lemma 2, applicando nuovamente il teorema 4 di [26].

Sia \tilde{t} un istante tale che, per $t > \tilde{t}$ si abbia $\varphi(t) > \varphi_\infty - \varepsilon$, essendo ε una costante positiva scelta in modo che $\varphi_\infty - \varepsilon > 0$.

Per $t > \tilde{t}$, $v_{r_0}(x, t)$ è minorata dalla funzione $\tilde{v}(x, t)$, per la quale si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{xx} &= \tilde{v}_t, & x \in (0, b), t > \tilde{t}, \\ \tilde{v}(x, \tilde{t}) &= 0, & x \in [0, b], \\ \tilde{v}(b, t) &= 0, & t > \tilde{t}, \\ \tilde{v}_x(0, t) &= g[\tilde{v}(0, t), \varphi_\infty - \varepsilon] \end{aligned}$$

(si ricordino le ipotesi di monotonia sulla g e si applichi il principio massimo).

È facile stabilire, usando ancora il principio di massimo forte ed il teorema di Viborni-Friedman, che $0 < \tilde{v}(0, t) < \varphi_\infty - \varepsilon$ per $t > \tilde{t}$. Per la (8.3) e la (8.1) avremo allora

$$g[\tilde{v}(0, t), \varphi_\infty - \varepsilon] < \alpha(\tilde{v}(0, t) - \varphi_\infty + \varepsilon) < 0.$$

Una funzione minorante si ottiene allora per il principio di massimo, risolvendo il problema lineare:

$$(8.15) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\omega}_{xx} &= \tilde{\omega}_t, & x \in (0, b), t > \tilde{t}, \\ \tilde{\omega}(x, \tilde{t}) &= 0, & x \in [0, b], \\ \tilde{\omega}(b, t) &= 0, & t > \tilde{t}, \\ \tilde{\omega}_x(0, t) &= \alpha(\tilde{\omega}(0, t) - \varphi_\infty + \varepsilon). \end{aligned} \right.$$

La soluzione di (8.15) è nota (cfr. [33], pag. 125) e si stabilisce facilmente che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\omega}(0, t) = \frac{\alpha b}{1 + \alpha b} (\varphi_\infty - \varepsilon) > 0.$$

La (8.14), e con essa il teorema 9 risulta allora provata.

APPENDICE

I. Dimostrazione del teorema 1.

La dimostrazione del teorema 1 segue con lievi modifiche la traccia esposta in [42] per la dimostrazione dell'esistenza e unicità della soluzione del problema qui indicato con P. A..

Le condizioni che assumiamo per definire una soluzione di P.A. $_{\infty}$ sono:

(A.1) esistenza e continuità in $(0, +\infty) \times (0, T]$ di $v_{\infty xx}$ e $v_{\infty t}$, soddisfacenti l'equazione $v_{\infty xx} = v_{\infty t}$;

(A.2) continuità di $v_{\infty}(x, t)$ in $[0, +\infty) \times [0, T]$;

(A.3)
$$v_{\infty}(x, 0) = \psi_{\infty}(x), \quad x \in [0, +\infty),$$

$$\text{con } \psi_{\infty}(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{per } x \in [0, b] \\ 0 & \text{per } x > b; \end{cases}$$

(A.4)
$$v_{\infty x}(0, t) = g[v_{\infty}(0, t), t];$$

(A.5)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v_{\infty}(x, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Sfruttando la (A.5) la dimostrazione dell'unicità della soluzione segue dai medesimi ragionamenti svolti in [34] per il corrispondente teorema di unicità. La dimostrazione dell'esistenza della soluzione si conduce, grazie alle stime del teorema 2, senza modifiche rilevanti riguardo alla analoga dimostrazione di [42]; vi è anzi la notevole semplificazione costituita dalla esplicita conoscenza delle soluzioni dei problemi lineari approssimanti, per le quali è facile inoltre verificare la proprietà (A.5), completando in tal modo la prova del teorema 1.

II. Dimostrazione del teorema 2.

Per la (2.6), scelto

(A.6)
$$X' > \max(X, \|\psi\|),$$

abbiamo, in virtù della (iv) :

$$(A.7) \quad g(X', t) > 0, \quad t > 0.$$

Si consideri ora la funzione

$$(A.8) \quad \sigma(x, t) = v_{\infty}(x, t) - X',$$

la quale soddisfa in $(0, +\infty) \times (0, T]$, il problema

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} - \sigma_t &= 0 \\ \sigma(x, 0) &< 0 \\ \sigma_x(0, t) &= g[v_{\infty}(0, t), t] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x, t) &< 0. \end{aligned}$$

Essendo $\sigma(0, 0) < 0$, per continuità è $\sigma(0, t) < 0$ in un intorno di $t = 0$. Se $\sigma(x, t)$ si annullasse in qualche punto del dominio, dovrebbe esistere per il principio di massimo un \hat{t} tale che $\sigma(0, \hat{t}) = 0$, ossia $v_{\infty}(0, \hat{t}) = X'$, e che $\sigma(0, t) < 0$ per $t < \hat{t}$. Qui si avrebbe

$$\sigma_x(0, \hat{t}) = g[v_{\infty}(0, \hat{t}), \hat{t}] = g(X', \hat{t}) \leq 0,$$

contro la (A.7). Necessariamente si ha dunque $\sigma(0, t) < 0$ per $t \in [0, T]$ e, conseguentemente, $v_{\infty}(x, t) < X'$, cioè, per la (A.6) :

$$(A.9) \quad v_{\infty}(x, t) \leq Z \equiv \max(X, \|\psi\|) \quad \text{in} \quad [0, +\infty) \times [0, T].$$

La costante Z dipende dunque da ψ e, attraverso X , da g , ma non da T .

Supponiamo ora che la (2.6) non sia verificata e mostriamo che è ancora possibile trovare una limitazione a priori del tipo (2.7), dipendente però da T .

Le (iii) e (iv) assicurano che

$$(A.10) \quad g(\xi, t) \geq \min_{t \in [0, T]} \{g(0, t)\} \equiv k, \quad \text{per} \quad \xi \in [0, +\infty), \quad t \in (0, T].$$

Posto ora

$$k' = \min(0, k),$$

la funzione $v_{\infty}(x, t)$ è maggiorata dalla soluzione $v'_{\infty}(x, t)$ di un analogo problema, ottenuto sostituendo nella (A.3) ψ con $\|\psi\|$ e la (A.4) con $v'_{\infty}(0, t) = k'$.

Si consideri infatti la differenza $w_\infty = v_\infty - v'_\infty$. Questa risolve nel medesimo dominio il problema

$$w_{\infty xx} - w_{\infty t} = 0$$

$$w_\infty(x, 0) < 0$$

$$w_{\infty x}(0, t) = g[v'_\infty(0, t), t] - k'$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w_\infty(x, t) = 0.$$

Se esistesse $t' > 0$, tale che $w_\infty(0, t') = 0$ e $w_\infty(0, t) < 0$ per $t < t'$, dovrebbe essere $w_{\infty x}(0, t') = g[v'_\infty(0, t'), t'] - k' < 0$ per il principio di massimo forte e il teorema di Viborni-Friedman. Ciò sarebbe però in contraddizione con la (A.10), essendo appunto $v'_\infty(x, t) \geq 0$, grazie alla definizione di k' .

Quindi è $v_\infty(x, t) \leq v'_\infty(x, t)$, ossia (cfr. [33]):

$$(A.11) \quad v_\infty(x, t) \leq \|\psi\| - 2k'(T/\pi)^{1/2},$$

che prova quanto asserito.

OSSERVAZIONE 3. Come si è detto al paragrafo 2, l'ipotesi (iv) sulla funzione g può essere indebolita, senza alterare alcuno dei risultati ottenuti, richiedendo che

(iv') $g(\xi, t)$ sia una funzione non decrescente di ξ .

La dimostrazione dell'unicità della soluzione di P. A. (teor. 2 di [34]) va così modificata. Sia $\vartheta(x, t)$ la differenza tra due eventuali soluzioni u_1, u_2 di P. A., soddisfacente quindi il problema $\vartheta_{xx} = \vartheta_t$, $\vartheta(s(t), t) = 0$, $\vartheta(x, 0) = 0$, $\vartheta_x(0, t) = g[u_1(0, t), t] - g[u_2(0, t), t]$. Se fosse $\vartheta > 0$ in un punto di D_T , ϑ assumerebbe il massimo assoluto $\vartheta_{\max} > 0$ in almeno un punto $(0, \bar{t})$, $\bar{t} > 0$. Per il principio di massimo forte, in un intorno di $(0, \bar{t})$ contenuto in D_T si deve avere $\vartheta < \vartheta_{\max}$. Per il teorema di Viborni-Friedman si avrebbe allora $\vartheta_x(0, \bar{t}) < 0$, contro la (iv'). Similmente si prova che non può essere $\vartheta < 0$.

Per la dimostrazione del teorema 2, del lemma 2 e del teorema 6 del presente lavoro occorre usare con la medesima tecnica il principio di massimo forte e il teorema di Viborni-Friedman. Le rimanenti dimostrazioni si estendono immediatamente.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. G. LANDAU, *Heat conduction in a melting solid*, Quart. Appl. Math. 8 (1950), pp. 81-94.
- [2] J. STEFAN, *Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung*, Gel. 98 (1889), pp. 473-484.
- [3] A. DATZEFF, *Sur le problème linéaire de Stefan*, Gauthier-Villars, Parigi, 1970.
- [4] JIANG LI-SHANG, *The proper posing of free boundary problems for nonlinear parabolic differential equations*, Chinese Math. 3 (1963), pp. 399-418.
- [5] JIANG LI-SHANG *Existence and differentiability of the solution of a two-phase Stefan problem for quasi-linear parabolic equations*, Chinese Math. 7 (1965), pp. 481-496.
- [6] G. SESTINI, *Esistenza di una soluzione in problemi analoghi a quello di Stefan*, Riv. Mat. Univ. Parma 3 (1952), pp. 3-22.
- [7] G. SESTINI, *Sul problema unidimensionale non lineare di Stefan in uno strato piano indefinito*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 61 (1960), pp. 204-224.
- [8] G. SESTINI, *Su un problema non lineare del tipo di Stefan*, Rend. Acc. Naz. Lincei (VIII), 35 (1963), pp. 518-523.
- [9] D. QUILGHINI, *Su di un nuovo problema del tipo di Stefan*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 62 (1963), pp. 59-98.
- [10] D. QUILGHINI, *Una analisi fisico-matematica del processo del cambiamento di fase*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 67 (1965), pp. 33-74.
- [11] D. QUILGHINI, *Sul comportamento asintotico delle soluzioni in un problema del tipo di Stefan*, Atti del Semin. Mat. Fis. Univ. Modena 12 (1963), pp. 107-120.
- [12] D. QUILGHINI, *Un problema di controllo ottimale nel cambiamento di stato in uno strato*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 84 (1970), pp. 309-320.
- [13] A. FASANO, *Un esempio di controllo ottimale in un problema del tipo di Stefan*, Boll. U. M. I. (IV), 4 (1971), pp. 846-858.
- [14] G. SESTINI, *Problemi analoghi a quelli di Stefan e loro attualità*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 37 (1967), pp. 1-14.
- [15] G. SESTINI, *Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan*, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, nn. 55-56 (1960), pp. 1-28.
- [16] L. I. RUBINSTEIN, *Il problema di Stefan* (in russo), Riga 1967.
- [17] J. R. CANNON, C. D. HILL, *Existence, uniqueness, stability and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation*, J. Math. Mech., 17 (1967), pp. 1-20.
- [18] B. SHERMAN, *Free boundary problems for the heat equation in which the moving interface coincides initially with the fixed face*, J. Math. Anal. Appl. 33 (1971), pp. 449-466.
- [19] J. R. CANNON, C. D. HILL, M. PRIMICERIO, *The one phase Stefan problem for the heat equation with boundary temperature specifications*, Arch. Rational Mech. Anal. 39 (1970), pp. 270-274.

- [20] J. R. CANNON, M. PRIMICERIO, *Remarks on the one-phase Stefan problem for the heat equation with the flux prescribed on the fixed boundary*, J. Math. Anal. Appl. 35 (1971), pp. 361-373.
- [21] B. M. BUDAŁ, M. Z. MOSKAL, *Classical solution of the multidimensional multifront Stefan problem*, Sov. Math. Dokl. 10 (1969), pp. 1043-1046.
- [22] A. FRIEDMAN, *One dimensional Stefan problem with nonmonotone free boundary*, Trans. Amer. Math. Soc. 133 (1968), pp. 89-114.
- [23] J. R. CANNON, M. PRIMICERIO, *A two phase Stefan problem with temperature boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 88 (1971), pp. 177-192.
- [24] J. R. CANNON, M. PRIMICERIO, *A two phase Stefan problem with flux boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 88 (1971), pp. 193-216.
- [25] J. R. CANNON, M. PRIMICERIO, *A two phase Stefan problem: regularity of the free boundary*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 88 (1971), pp. 217-228.
- [26] J. R. CANNON, C. D. HILL, *Remarks on a Stefan problem*, J. Math. Mech. 17 (1967), pp. 433-442.
- [27] M. PRIMICERIO, *Stefan-like problems with space dependent latent heat*, Meccanica J. of the Italian Ass. of Theoretical and Appl. Mech. 5 (1970), pp. 187-190.
- [28] W. T. KYNER, *An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan problem*, J. Math. Mech. 8 (1959), pp. 473-497.
- [29] W. L. MIRANKER, J. B. KELLER, *The Stefan problem for a nonlinear equation*, J. Math. Mech. 9 (1960), pp. 67-70.
- [30] O. A. OLEINIK, *A method of solution of the general Stefan problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 135 (1960), pp. 1054-1057.
- [31] O. A. GUTIERREZ, A. W. ACKER, N. J. SEKAS, *Experimental steady-state performance of a potassium condensing radiator*, NASA Technical Note D 4227 (1967).
- [32] A. H. LACHENBRUCH, *Some estimates of the thermal effects of a heated pipeline in Permafrost*, Geol. Survey Circular 623 (1970).
- [33] H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford 1969.
- [34] A. FASANO, M. PRIMICERIO, *Esistenza e unicità della soluzione per una classe di problemi di diffusione con condizioni al contorno non lineari*, Boll. U. M. I. (IV), 3 (1970), pp. 660-667.
- [35] J. R. CANNON, *A priori estimate for continuation of the solution of the heat equation in the space variable*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 65 (1964), pp. 377-388.
- [36] J. R. CANNON, J. DOUGLAS, *The stability of the boundary in a Stefan problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. Fis. Mat., 21 (1967), pp. 83-91.
- [37] J. R. CANNON, C. D. HILL, *On the infinite differentiability of the free boundary in a Stefan problem*, J. of Math. Anal. and Appl. 22 (1968), pp. 385-397.
- [38] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs 1964.
- [39] W. R. MANN, F. WOLF, *Heat transfer between solid and gasses under nonlinear boundary conditions*, Quart. J. Appl. Math. 9 (1951), pp. 163-184.

- [40] F. P. VASILIEV, *Sul metodo delle rette per la soluzione di un problema del tipo di Stefan in una fase*, (In russo), *Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz.* 8 (1968), pp. 64-78.
- [41] G. H. MEYER, *A numerical method for two phase Stefan problems*, In pubblicazione sul *SIAM J. Numer. Anal.*
- [42] A. FASANO, M. PRIMICERIO, *Su un problema unidimensionale in un mezzo a contorno mobile con condizioni ai limiti non lineari*, In pubblicazione su *Ann. Mat. Pura Appl.*