Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

J. Chabrowski
G. Reynaud

Inégalité en norme L^p pour les solutions de système aux dérivées partielles de type parabolique

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 1, nº 3-4 (1974), p. 205-227
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1974_4_1_3-4_205_0>

Inegalité en norme L^p pour les solutions de système aux derivées partielles de type parabolique.

J. CHABROWSKI - G. REYNAUD

Notations et hypothèses.

Soient Ω un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, T un réel positif, S le cylindre $\bar{\Omega}\times[0, T]$. Nous noterons $x=(x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\boldsymbol{R}^n$, $|x|$ la quantité $\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ et t un élément de $[0, T]$.

Si B_ϱ représente la boule ouverte de centre l'origine de rayon ϱ dans $\boldsymbol{R}^n$, et S_ϱ la sphère de centre l'origine de rayon ϱ dans $\boldsymbol{R}^n$, on note par:

ω_ϱ l'ensemble $B_\varrho \cap \Omega$

σ_ϱ l'ensemble $S_\varrho \cap \Omega$

Γ la frontière de Ω.

Si f est une fonction différentiable définie dans S, nous notons par $D_i f$ la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x_i, $D_t f$ la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable t.

Soient $u=(u_1, \ldots, u_N)$ et $v=(v_1, \ldots, v_N)$ des applications définies dans S à valeurs dans $\boldsymbol{R}^N$, nous notons par:

$u\cdot v$ la fonction définie par $u_1v_1+\ldots+u_Nv_N$

$D_i u$ l'application définie par: $(D_i u_1, \ldots, D_i u_N)$

$D_t u$ l'application définie par: $(D_t u_1, \ldots, D_t u_N)$.

Par la suite, L désignera l'opérateur défini par:

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1(u_1) \\ \vdots \\ L_N(u_N) \end{cases}$$

Pervenuto alla Redazione il 7 Settembre 1973.

où L_p est un opérateur de type parabolique défini par:

$$L_p(u_p) = -\sum_{i=1}^{\eta} D_i[\mathcal{T}_{i,p}(u_p)] - B_p(u_p) + D_t \alpha_p u_p ,$$

$\mathcal{T}_{i,p}(u_p)$, $B_p(u_p)$ sont des opérateurs du premier ordre, α_p est une fonction définie dans S.

Nous notons par f_p, g_p des fonctions de (x, t, u) appartenant à $S \times \boldsymbol{R}^N$.

Nous notons par φ et ψ des fonctions poids définies dans $\boldsymbol{R}_+ \times [a, b]$ où $[a, b]$ représente un segment de $\boldsymbol{R}$, et on leur associe de nouvelles fonctions que nous notons toujours par φ et ψ mais définies dans $\boldsymbol{R}^n \times [a, b]$ par $(x, t) \to \varphi(x, t) = \varphi(|x|, t)$.

1. – Introduction.

Dans ce papier, nous démontrons des théorèmes d'estimation en norme L^p pour les solutions (ou différence de solutions, ou partie positive ou négative de solutions) de système aux dérivées partielles du deuxième ordre de type parabolique à coefficients non bornés.

La méthode utilisée ressemble à celle de [3] mais elle permet de considérer les solutions sur un cylindre $\Omega \times [0, T]$ (Ω ouvert quelconque de $\boldsymbol{R}^n$); elle peut s'appliquer pour les problèmes traités dans [4] [5] et donne des résultats légèrement différents de ceux obtenus. Nous donnons dans les paragraphes 1, 3 des théorèmes pour les solutions de système non linéaire, et dans les paragraphes 2, 4 des théorèmes pour les solutions de système linéaire. Dans le paragraphe 6 nous appliquons ces théorèmes à des opérateurs dont on connait la croissance des coefficients quand $|x|$ tend vers l'infini.

Nous démontrons aussi un lemme (lemme 7.3) sur les solutions d'inégalités intégrales qui remplace avantageusement pour notre utilisation les résultats de [6].

1. – Cas général.

Dans tout ce paragraphe q représentera un réel fixé supérieur à $-\frac{1}{2}$.

DÉFINITION 1.1. *Nous dirons que l'application u définie dans S à valeurs dans $\boldsymbol{R}^n$ appartient à $[C^{1,2}(S)]^N$, si u apartient à $[C^1(S)]^N$ et si pour tout couple (i, j), $D_i[D_j u]$ est une application continue dans S (c'est à dire qui peut se prolonger en une application continue dans $\bar{S}$).*

HYPOTHÈSE 1.1:

i) pour tout u appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, les $\mathcal{T}_{i,p}(u_p)$ sont localement lipschitziennes dans S.

ii) Si on note $P_{i,p}(D_j u_p) = \mathcal{T}_{i,p}(u_p)$, alors pour tous $\xi = (\xi_i)$, $\beta = (\beta_i)$ appartenant à $\boldsymbol{R}^n$, pour tout (x, t) appartenant à $\Omega\times[0, T]$ on a:

$$\sum_i \xi_i P_{i,p}(\beta_j) \leqslant \lambda F \sum_i \xi_i^2 + \frac{1}{\lambda}\sum_i \beta_i\cdot P_{i,p}(\beta_j)\,,$$

et ceci pour tout λ réel strictement positif, F étant une fonction définie dans S.

iii) Pour tout u appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, on a:

$$u_p B_p(u_p) \leqslant C_1 u_p^2 + \mu \sum_i D_i u_p\cdot \mathcal{T}_{i,p}(u_p)\,,$$

où C_1 appartient à $C(S)$ et μ est une constante vérifiant $0 \leqslant \mu < 2q+1$.

iv) Les α_p sont localement lipschitziennes dans S et vérifient presque partout dans $\Omega\times[0, T]$,

$$-H \leqslant D_t \alpha_p\,, \qquad \alpha_p \geqslant 0$$

où H appartient à $C(S)$ et est positive.

v) Pour tout u appartenant à $\boldsymbol{R}^N$, on a:

$$f_p(x, t, u)\,\mathrm{Sgn.}\, u_p \leqslant \sum_k C_k^p(x, t)|u_k| + h_p(x, t)\,,$$

pour tout (x, t) appartenant à S, où C_k^p et h_p appartiennent à $C(S)$ et vérifient

$$h_p(x, t) \geqslant 0\,, \qquad C_k^p(x, t) \geqslant 0 \qquad \text{pour } k \neq p\,.$$

DÉFINITION DU PROBLÈME 1.1. Nous dirons que l'application u est solution du problème 1.1 si

1) $u(x, t)$ appartient à $[C^{1,2}(S)]^N$
2) $u(x, t) = 0$ pour (x, t) appartenant à $\Gamma\times[0, T]$
3) pour tout p, $L_p(u_p) = f_p(u_p)$.

THÉORÈME 1:
Soit u solution du problème 1.1.
Soit φ une fonction définie dans $\boldsymbol{R}_+\times[t_1, t_2]$ $(0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T)$.

On suppose que

a) φ *est localement lipschitzienne dans* $\boldsymbol{R}_+ \times [t_1, t_2]$

b) φ *est solution presque partout dans* $\Omega \times [t_1, t_2]$ *de l'inéquation suivante:*

$$a(t)\alpha_p \cdot \varphi^2 \leqslant \frac{-\varphi D_t\varphi}{q+1}\alpha_p - \varphi^2\left(\frac{2q+1}{2q+2}H + C_1 + \frac{2q+1}{2q+2}\sum_k C_k^p + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2q+2}\sum_k C_p^k + \frac{2q+1}{2q+2}H_1\right) - \frac{4F}{2q+1-\mu}\sum_i |D_i\varphi|^2$$

où $a(t)$ *est une fonction appartenant à* $C[t_1, t_2]$, H_1 *une fonction positive définie dans* $\Omega \times [t_1, t_2]$.

c) φ *et* u *vérifient la condition suivante: pour tout* (τ_1, τ_2) *vérifiant* $t_1 \leqslant \tau_1 \leqslant \leqslant \tau_2 \leqslant t_2$, *il existe une suite* R_m *et une suite* γ_m *telles que* $R_m \to +\infty$, $\gamma_m \to 0$ *et*

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega |u_p|^{2q+2} F\left[\varphi \sum_i |D_i\varphi| + \varphi^2\right]\chi_{\omega_{R_{m+1}} - \omega_{R_m}}\, dx\, dt \leqslant \gamma_m$$

où $\chi_{\omega_{R_{m+1}} - \omega_{R_m}}$ *est la fonction caractéristique de l'ensemble* $\omega_{R_{m+1}} - \omega_{R_m}$.

Alors on a: pour tout τ_1, τ_2 *vérifiant* $t_1 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant t_2$

$$(1.1) \qquad \left[\int_\Omega \varphi^2 \sum_p \alpha_p |u_p|^{2q+2}\, dx\right]_{t=\tau_2} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_\Omega \varphi^2 \sum_p \alpha_p |u_p|^{2q+2}\, dx\right]_{t=\tau_1} \cdot \exp\left[-(2q+2)\int_{\tau_1}^{\tau_2} a(t)\, dt\right] +$$
$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_\Omega \varphi^2 \frac{h_p^{2q+2}}{H_1^{2q+1}}\, dx\right]_{t=\tau} \exp\left[-(2q+2)\int_\tau^{\tau_2} a(u)\, du\right] d\tau\,.$$

DÉMONSTRATION. Soit φ une fonction vérifiant les hypothèses du théorème, posons $\Phi_R = \varphi \cdot \gamma_R$ où γ_R est une famille de fonctions appartenant à $C^1(R_+ \times [t_1, t_2])$, vérifiant $0 \leqslant \gamma_R(x, t) \leqslant 1$

$$\gamma_R(x, t) = 1 \quad \text{si } |x| < R$$
$$\gamma_R(x, t) = 0 \quad \text{si } |x| > R + 1$$
$$D_t \gamma_R \equiv 0\,.$$

Les dérivées partielles de γ_R sont bornées par une constante M indépendante de R.

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons la quantité:

$$(1.2)\qquad \Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q\cdot u_p L_p(u_p)\equiv$$
$$\equiv \Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q u_p\Big[-\sum_i D_i \mathcal{T}_{i,p}(u_p)+B_p(u_p)+D_t\alpha_p u_p\Big].$$

Nous avons:

$$(1.3)\qquad -\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q u_p\sum_i D_i\mathcal{T}_{i,p}(u_p)=-\sum_i D_i[\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q u_p\cdot\mathcal{T}_{i,p}(u_p)]+$$
$$+\sum_i \Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^{q-1}[(2q+1)u_p^2+\varepsilon]\cdot\mathcal{T}_{i,p}(u_p)\cdot D_i u_p+$$
$$+\sum_i 2\Phi_R D_i\Phi_R(u_p^2+\varepsilon)^q\cdot u_p\cdot\mathcal{T}_{i,p}(u_p).$$

En utilisant l'hypothèse ii), nous avons:

$$(1.4)\qquad -\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q\cdot u_p\sum_i D_i\mathcal{T}_{i,p}(u_p)\geqslant-\sum_i D_i[\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q u_p\cdot\mathcal{T}_{ip}(u_p)]+$$
$$+\sum_i\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^{q-1}\left[\left(2q+1-\frac{1}{\lambda}\right)u_p^2+\varepsilon\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right]\mathcal{T}_{i,p}(u_p)\cdot D_i u_p-$$
$$-4\lambda F(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}\sum_i(D_i\Phi_R)^2.$$

$$(1.5)\qquad \Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q u_p D_t\alpha_p u_p=\frac{1}{2(q+1)}D_t[\Phi_R^2\alpha_p(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}]-$$
$$-\frac{\Phi_R D_t\Phi_R}{q+1}\alpha_p(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}+\frac{2q+1}{2(q+1)}\Phi_R^2[u_p^2+\varepsilon)^{q+1}D_t\alpha_p-$$
$$-\Phi_R^2\varepsilon(u_p^2+\varepsilon)^q D_t\alpha_p.$$

Portons ces résultats dans 1.2; en utilisant l'hypothèse iii), et en ajoutant les N inégalités ($p=1,\dots,N$) ainsi obtenues, nous avons:

$$(1.6)\qquad \sum_p\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q u_p\cdot L_p(u_p)\geqslant-\sum_{i,p}D_i[\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q\cdot u_p\cdot\mathcal{T}_{i,p}(u_p)]+$$
$$+\sum_{i,p}\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^{q-1}\left[\left(2q+1-\frac{1}{\lambda}-\mu\right)u_p^2+\varepsilon\left(1-\frac{1}{\lambda}-\mu\right)\right]\mathcal{T}_{i,p}(u_p)\cdot D_i u_p+$$
$$+\sum_p(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}\left[-\frac{\Phi_R D_t\Phi_R}{q+1}\alpha_p-\Phi_R^2\left(\frac{2q+1}{2(q+1)}H+C_1\right)-4\lambda F\sum_i(D_i\Phi_R)^2\right]+$$
$$+\sum_p\frac{1}{2(q+1)}D_t[\Phi_R^2\alpha_p(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}]-\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q\cdot D_t\alpha_p.$$

Comme u est solution du problème 1., nous avons:

$$I_p \equiv \Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q u_p \cdot L_p(u_p) = \Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q \cdot |u_p|(\mathrm{Sgn.}\, u_p) f_p(u) \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q \cdot |u_p| \Big[\sum_k C_k^p |u_k| + h_p\Big],$$

$$I_p \leqslant \Phi_R^2 \sum_k C_k^p (u_p^2+\varepsilon)^{q+\frac12}(u_k^2+\varepsilon)^{\frac12} - \varepsilon \Phi_R^2 C_p^p (u_p^2+\varepsilon)^q + \Phi_R^2 (u_p^2+\varepsilon)^q |u_p| \cdot h_p .$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous avons:

$$\sum_p I_p \leqslant \Phi_R^2 \sum_p (u_p^2+\varepsilon)^{q+1}\left[\frac{2q+1}{2q+2}\sum_k C_k^p + \frac{1}{2q+2}\sum_k C_p^k + \frac{2q+1}{2q+2} H_1\right] - \tag{1.7}$$

$$-\varepsilon \sum_p \Phi_R^2 C_p^p (u_p^2+\varepsilon)^q + \sum_p \frac{\Phi_R^2}{2q+2}\,\frac{h_p^{2q+2}}{H_1^{2q+1}} .$$

Portons ce résultat dans 1.6, nous avons:

$$\sum_p (u_p^2+\varepsilon)^{q+1}\Big[-\frac{\Phi_R D_t \Phi_R}{q+1}\alpha_p - \Phi_R^2\Big(\frac{2q+1}{2(q+1)} H + C_1 + \frac{2q+1}{2q+2}\sum_k C_k^p + \tag{1.8}$$

$$+\frac{1}{2q+2}\sum_k C_p^k + \frac{2q+1}{2q+2} H_1\Big) - 4\lambda F \sum_i (D_i\Phi_R)^2\Big] + \sum_{i,p} \Phi_R^2 [u_p^2+\varepsilon]^{q-1} \cdot$$

$$\cdot \Big[\Big(2q+1-\frac{1}{\lambda}-\mu\Big)u_p^2 + \varepsilon\Big(1-\frac{1}{\lambda}-\mu\Big)\Big] \cdot \mathcal{T}_{i,p}(u_p) \cdot D_i u_p +$$

$$+\sum_p \frac{1}{2q+2} D_t[\Phi_R^2 \alpha_p (u_p^2+\varepsilon)^{q+1}] \leqslant \sum_{i,p} D_i[\Phi_R^2 (u_p^2+\varepsilon)^q \cdot u_p \cdot \mathcal{T}_{i,p}(u_p)] -$$

$$-\sum_p \varepsilon \Phi_R^2 C_p^p (u_p^2+\varepsilon)^q + \frac{\Phi_R^2}{2q+2}\cdot\frac{h_p^{2q+2}}{H_1^{2q+1}} + \Phi_R^2 \varepsilon (u_p^2+\varepsilon)^q \cdot D_t \alpha_p .$$

Par hypothèse: $0 \leqslant \mu < 2q+1$, on prendra $\lambda = 1/(2q+1-\mu)$. De plus, le coefficient de $(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}$ dans l'inégalité précédente est minoré par:

$$\Big[-\frac{\varphi \cdot D_t \varphi}{q+1}\alpha_p - \varphi^2\Big(\frac{2q+1}{2q+2} H + C_1 + \frac{2q+1}{2q+2}\sum_k C_k^p + \frac{1}{2q+2}\sum_k C_p^k + \frac{2q+1}{2q+2} H_1 -$$

$$-\frac{4F}{2q+1-\mu}\sum_i (D_i\varphi)^2\Big]\gamma_R^2 - \frac{4}{2q+1-\mu} F\Big[2M\varphi\sum_i |D_i\varphi| + nM^2\varphi^2\Big]\chi_{\omega_{R+1}-\omega_R} .$$

Comme par hypothèse φ est solution de (b), nous avons:

$$
\begin{aligned}
(1.9)\qquad & \sum_p a(t)\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}\alpha_p - 2q\varepsilon\sum_{i,p}\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^{q-1}\mathcal{T}_{i,p}(u_p)D_iu_p + \\
& + \sum_p \frac{1}{2q+2}D_t[\Phi_R^2\alpha_p(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}] \leqslant \sum_{i,p} D_i[\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q\cdot u_p\cdot\mathcal{T}_{i,p}(u_p)] - \\
& - \sum_p \varepsilon\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q[C_p^p - D_t\alpha_p] + \frac{\Phi_R^2}{2q+2}\sum_p\frac{h_p^{2q+2}}{H_1^{2q+1}} + \\
& + \sum_p \frac{4(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}}{2q+1-\mu}F\Big[2M\varphi\sum_i|D_i\varphi| + nM^2\varphi^2\Big]\chi_{\omega_{R+1}-\omega_R}\,.
\end{aligned}
$$

Intégrons cette inégalité sur $\Omega\times[\tau_1,\tau_2]$ où $t_1\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant t_2$. Comme $\varphi^2\gamma_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q\cdot\cdot u_p\cdot\mathcal{T}_{i,p}(u_p)$ est localement lipschitzienne, nulle sur $\Gamma\times[t_1,t_2]$ et nulle pour $|x|>R+1$, on peut utiliser le lemme A, et on obtient:

$$
\begin{aligned}
& \Big[\int_\Omega \Phi_R^2\sum_p\alpha_p(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}dx\Big]_{t=\tau_2} \leqslant \Big[\int_\Omega \Phi_R^2\sum_p\alpha_p(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}dx\Big]_{t=\tau_1} + \\
& + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_\Omega \Phi_R^2\frac{h_p^{2q+2}}{H_1^{2q+1}}\,dx\,dt - \int_{\tau_1}^{\tau_2}(2q+2)a(t)\Big[\int_\Omega\Phi_R^2\sum_p\alpha_p(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}dx\Big]dt - \\
& - \int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_\Omega \sum_p(2q+2)\varepsilon\Phi_R^2(C_p^p - D_t\alpha_p)(u_p^2+\varepsilon)^q\,dx\,dt + \\
& + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_\Omega 2q(2q+2)\varepsilon\sum_p\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^{q-1}\cdot\mathcal{T}_{i,p}(u_p)\cdot D_iu_p\cdot dx\,dt + \\
& + \frac{4(2q+2)}{2q+1-\mu}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_\Omega\sum_p F(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}\Big[2M\varphi\sum_i|D_i\varphi| + nM^2\varphi^2\Big]\chi_{\omega_{R+1}-\omega_R}\,dx\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Faisons tendre ε vers zéro dans l'inégalité et remarquons que si $q\leqslant0$ alors $2q(2q+2)\varepsilon\sum\Phi_R^2(u_q^2+\varepsilon)^{q-1}\cdot D_iu_p\cdot\mathcal{T}_{i,p}(u_p)\leqslant0$ si $q>0$, alors $2q(2q+2)\varepsilon$ $\sum_p\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^{q-1}D_iu_p\cdot\mathcal{T}_{i,p}(u_p)$ tend uniformément vers zéro quand ε tend vers zéro.

De plus:

$$
(2q+2)\varepsilon\Phi_R^2(C_p^p - D_t\alpha_p)(u_p^2+\varepsilon)^q \leqslant (2q+2)\sqrt{\varepsilon}\,\Phi_R^2|C_p^p - D_t\alpha_p|(u_p^2+\varepsilon)^{q+\frac12}
$$

tend uniformément vers zéro quand ε tend vers zéro.

On obtient, si on remplace R par R_m (terme de la suite qui intervient dans l'hypothèse C):

$$\left[\int_\Omega \Phi_{R_m}^2 \sum_p \alpha_p |u_p|^{2q+2}\,dx\right]_{t=\tau_2} \leqslant \left[\int_\Omega \Phi_{R_m}^2 \sum_p \alpha_p |u_p|^{2q+2}\,dx\right]_{t=\tau_1} -$$

$$-\int_{\tau_1}^{\tau_2} (2q+2)\,a(t)\left(\int_\Omega \Phi_{R_m}^2 \sum_p \alpha_p |u_p|^{2q+2}\,dx\right) dt +$$

$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\int_\Omega \Phi_{R_m}^2 \frac{h_p^{2q+2}}{H_1^{2q+1}}\,dx\right) dt +$$

$$+\frac{4(q+2)}{2q+1-\mu}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_\Omega \sum_p F|u_p|^{2q+2}\left[2\varphi M \sum_i |D_i\varphi| + nM^2\varphi^2\right]\chi_{\omega_{R_{m+1}}-\omega_{R_m}}\,dx\right] dt\,.$$

On a, en utilisant le lemme 7.3 et en considérant que:

$$\int_\Omega \sum_p F|u_p|^{2q+2}\left[2\varphi M \sum_i |D_i\varphi| + nM^2\varphi^2\right]\chi_{\omega_{R_{m+1}}-\omega_{R_m}}\,dx$$

est une fonction de t connue,

$$\left[\int_\Omega \Phi_{R_m}^2 \sum_p \alpha_p |u_p|^{2q+2}\,dx\right]_{t=\tau_2} \leqslant \left[\int_\Omega \Phi_{R_m}^2 \sum_p \alpha_p |u_p|^{2q+2}\,dx\right]_{t=\tau_1} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-(2q+2)\int_{\tau_1}^{\tau_2} a(t)\,dt\right] +$$

$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_\Omega \Phi_{R_m}^2(x,t)\,\frac{h_p^{2q+2}(x,t)}{H_1^{2q+1}(x,t)}\,dx\right]\cdot \exp\left[-(2q+2)\int_t^{\tau_2} a(u)\,du\right] dt +$$

$$+\frac{4(q+2)}{2q+1-\mu}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_\Omega \sum_p F|u_p|^{2q+2}\left[2\varphi M \sum_i |D_i\varphi| + nM^2\varphi^2\right]\chi_{\omega_{R_{m+1}}-\omega_{R_m}}\,dx\right]\cdot$$

$$\cdot \exp\left[-(2q+2)\int_t^{\tau_2} a(u)\,du\right] dt\,.$$

Si on fait tendre m vers l'infini et si on remarque que,

$$\frac{4(q+2)}{2q+1-\mu}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_{\Omega}\sum_p F|u_p|^{2q+2}\left[2\varphi M\sum_i|D_i\varphi|+nM^2\varphi^2\right]\chi_{\omega_{R_{m+1}}-\omega_{R_m}}dx\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-(2q+2)\int_t^{\tau_2}a(u)\,du\right]dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4q+8}{2q+1-\mu}(2M+nM^2)\gamma_m\exp\left[2(q+1)\int_{\tau_1}^{\tau_2}|a(u)|\,du\right].$$

On obtient l'inégalité 1.1.

2. – Cas linéaire.

Dans ce paragraphe q représentera un réel fixé supérieur ou égal à $-\frac{1}{2}$. Les opérateurs $\mathcal{T}_{i,p}$ et B_p seront données par:

$$\mathcal{T}_{i,p}(u_p)=\sum_{j=1}a_{i,j}^p D_j u_p,\qquad B_p(u_p)=\sum_i b_i^p D_i u_p,$$

où les $a_{i.j}^p$ et b_i^p appartiennent à $C^1(S)$.

On supposera que les hypothèses i), ii), iv), v) sont vérifiées, et de plus,

$$\text{iii}')\quad a_{i.j}^p=a_{j.i}^p\,;\qquad |D_i a_{i,j}^p|\leqslant F_1\,;\qquad |b_i^p|\leqslant F_2\,;\qquad |D_i b_i^p|\leqslant F_3$$

où F_1, F_2, F_3 sont des fonctions positives appartenant à $C(S)$.

THÉORÈME 2.1. *Soit u solution du problème* 1.1; *soit φ une fonction définie dans $\boldsymbol{R}_+\times[t_1,t_2]$, à valeurs dans $\boldsymbol{R}_+^*$ $(0\leqslant t_1<t_2\leqslant T)$.*

On suppose que: φ vérifie (a) et (b')

(b') φ est solution presque partout de l'inéquation suivante:

$$a(t)\alpha_p\varphi^2\leqslant-\frac{\varphi D_t+\varphi}{q+1}\alpha_p-\varphi^2\left[\frac{2q+1}{2q+2}H+\frac{2q+1}{2q+2}\sum_k C_k^p+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2q+2}\sum_k C_p^k+\frac{2q+1}{2q+2}H_1\right]-\frac{1}{2q+2}\left[2nF_1\varphi\sum_i|D_i\varphi|+4F\sum_{ij}|D_{ij}\varphi^2|+\right.$$

$$\left.+n\varphi^2F_3+F_2\sum_i|D_i\varphi^2|\right]$$

où $a(t)$ appartient à $C[t_1,t_2]$, H_1 est une fonction positive définie dans $\Omega\times[t_1,t_2]$; φ et u vérifient (C'), *(C') pour tout* (τ_1, τ_2) *vérifiant* $t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$, *il existe une suite* R_m *et une suite* γ_m *telles que* $R_m \to +\infty$, $\gamma_m \to 0$ *et*

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega} |u_p|^{2q+2}\Big[[F + F_1 + F_2]\varphi^2 + F\varphi \sum_i |D_i\varphi|\Big] \chi_{\omega_{R_{m+1}}-\omega_{R_m}} dx\,dt \leqslant \gamma_m .$$

Alors l'inégalité 1.1 *est vraie pour* $q \geqslant -\frac{1}{2}$.

DÉMONSTRATION. On reprend les mêmes calculs que dans § 1. On supposera, de plus, que la fonction γ_R admet des dérivées partielles secondes bornées par M. Si on considère la quantité $\sum_i 2\Phi_R(D_i\Phi_R)(u_p^2 + \varepsilon)^q u_p \cdot \mathcal{T}_{i,p}(u_p)$ qui intervient dans 1.3 nous avons:

$$\sum_{ij} (D_i\Phi_R^2)(u_p^2 + \varepsilon)^q u_p a_{ij}^p D_j u_p = \sum_{ij} (D_i\Phi_R^2) a_{ij}^p \frac{1}{2q+2} D_j[(u_p^2 + \varepsilon)^{q+1} - \varepsilon^{q+1}] =$$

$$= \sum_{ij} D_j \left[\frac{1}{2q+2}[(u_p^2 + \varepsilon)^{q+1} - \varepsilon^{q+1}] a_{ij}^p D_i \Phi_R^2\right] - \frac{1}{2q+2}[(u_p^2 + \varepsilon)^{q+1} -$$

$$- \varepsilon^{q+1}] \sum_{ij} D_j(a_{ij}^p D_i \Phi_R^2) .$$

De plus,

$$\Phi_R^2(u_p^2 + \varepsilon)^q u_p B_p(u_p) = \Phi_R^2 \sum_i b_i^p \frac{1}{2q+2} D_i[(u_p^2 + \varepsilon)^{q+1} - \varepsilon^{q+1}] =$$

$$= \sum_i D_i \left[\frac{1}{2q+2}[(u_p^2 + \varepsilon)^{q+1} - \varepsilon^{q+1}] b_i^p \Phi_R^2\right] - \frac{1}{2q+2}[(u_p^2 +$$

$$+ \varepsilon)^{q+1} - \varepsilon^{q+1}] \sum_i D_i(b_i^p \Phi_R^2) .$$

Nous avons donc à la place de l'inégalité 1.6, l'inégalité

$$\text{(2.1)} \quad \sum_p \Phi_R^2(u_p^2 + \varepsilon)^q u_p \cdot L_p(u_p) \geqslant -D_i[\Phi_R^2(u_p^2 + \varepsilon)^q u_p \cdot \sum_j a_{ij}^p D_j u_p -$$

$$- \frac{1}{2q+2}[(u_p^2 + \varepsilon)^{q+1} - \varepsilon^{q+1}] \sum_j a_{ij}^p D_j \Phi_R^2 - \frac{1}{2q+2}[(u_p^2 + \varepsilon)^{q+1} - \varepsilon^{q+1}] b_i^p \Phi_R^2] +$$

$$+ \sum_p (u_p^2 + \varepsilon)^{q+1}\left[-\frac{\Phi_R D_t \Phi_R}{q+1}\alpha_p - \frac{2q+1}{2q+2}\Phi_R^2 \cdot H - \frac{1}{2q+2}\left[\sum_{ij} D_j[a_{ij}^p D_i \Phi_R^2] +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_i D_i(\Phi_R^2 b_i^p)\right]\right] + \sum_p \frac{\varepsilon^{q+1}}{2q+2}\left[\sum_{ij} D_j[a_{ij}^p D_i \Phi_R^2] + \sum_i D_i(\Phi_R^2 b_i^p)\right] +$$

$$+ \sum_p \frac{1}{2q+2} D_t[\Phi_R^2 \alpha_p (u_p^2 + \varepsilon)^{q+1}] - \sum_q \Phi_R^2 \varepsilon (u_p^2 + \varepsilon)^q \cdot D_t \alpha_p .$$

Comme u est solution du problème 1.1, on peut faire le même calcul que celui fait dans le § 1; on obtient à la place de 1.8, l'inégalité

$$(2.2)\quad \sum_p (u_p^2+\varepsilon)^{q+1}\left[-\frac{\Phi_R D_t \Phi_R}{q+1}\alpha_p - \Phi_R^2\left(\frac{2q+1}{2q+2}H + \frac{2q+1}{2q+2}\sum_k C_k^p + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2q+2}\sum_k C_p^k + \frac{2q+1}{2q+2}H_1\right) - \frac{1}{2q+2}\left[\sum_{ij} D_j(a_{ij}^p D_i \Phi_R^2) + \sum_i D_i(\Phi_R^2 b_i^p)\right]\right] +$$
$$+ \frac{\varepsilon^{q+1}}{2q+2}\left[\sum_{ijp} D_j(a_{ij}^p D_i\Phi_R^2) + \sum_{ip} D_i(\Phi_R^2 b_i^p)\right] + \sum_p \frac{1}{2q+2} D_t[\Phi_R^2\alpha_p(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{ip} D_i\left[\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q u_p \sum_j a_{ij}^p D_j u_p - \frac{1}{2q+2}[(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}-\varepsilon^{q+1}]\left[\sum_j a_{ij}^p D_j \Phi_R^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + b_i^p \Phi_R^2\right]\right] - \sum_p \varepsilon\Phi_R^2(C_p^p - D_t\alpha_p)(u_p^2+\varepsilon)^q + \sum_p \frac{\Phi_R^2}{2q+2}\,\frac{h_p^{2q+2}}{H_1^{2q+1}}.$$

Le coefficient de $(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}$ est minoré par $\left(|a_{i,j}^p|\leqslant 4F\right)$:

$$\left[-\frac{\varphi D_t\varphi}{q+1}\alpha_p - \varphi^2\left(\frac{2q+1}{2q+2}(H+H_1) + \frac{2q+1}{2q+2}\sum_k C_k^p + \frac{1}{2q+2}\sum_k C_p^k\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2q+2}\left(nF_1\sum_i |D_i\varphi^2| + 4F\sum_{ij}|D_{ij}\varphi^2| + n\varphi^2 F_3 + F_2\sum_i |D_i\varphi^2|\right)\right]\gamma_R^2 -$$
$$- \frac{1}{2q+2}\left[n^2F_1\varphi^2M^2 + 8FM\sum_i |D_i\varphi^2| + 4n^2F\varphi^2(2M^2+2M) + 2nF_2\varphi^2 M\right]\chi_{\omega_{R+1}-\omega_R}.$$

Comme par hypothèse φ est solution de (b'), on a donc:

$$(2.3)\quad \sum_p a(t)\alpha_p\varphi^2\gamma_R(u_p^2+\varepsilon)^{q+1} + \sum_p \frac{1}{2q+2} D_t[\Phi_R^2\alpha_p(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_p \frac{\Phi_R^2}{2q+2}\,\frac{h_p^{2q+2}}{H_1^{2q+1}} + \sum_{ip} D_i\left[\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q u_p\sum_j a_{ij}^p D_j u_p - \frac{1}{2q+2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot[(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}-\varepsilon^{q+1}]\left[\sum_j a_{ij}^p D_j\Phi_R^2 + b_i^p\Phi_R^2\right]\right] - \Phi_R^2\,\varepsilon\sum_p (u_p^2+\varepsilon)^q(C_p^p -$$
$$- D_t\alpha_p) - \sum_p \frac{\varepsilon^{q+1}}{2q+2}\left[\sum_{ij} D_j(a_{ij}^p D_i\Phi_R^2) + \sum_i D_i(\Phi_R^2 b_i^p)\right] +$$
$$+ \sum_p \frac{(u_p^2+\varepsilon)^{q+1}}{2q+2}\left[n^2F_1\varphi^2M^2 + 8FM\sum_i |D_i\varphi|^2 + \right.$$
$$\left. + 4n^2F\varphi^2(2M^2+2M) + 2nF_2\varphi^2M\right]\chi_{\omega_{R+1}-\omega_R}.$$

La suite de la démonstration est la même que celle du théorème, l'inégalité 2.3 remplaçant l'inégalité 1.9.

3. – Etude de la partie positive des solutions $(q > -\frac{1}{2})$:

Dans ce paragraphe on suppose que les hypothèses intervenant dans le § 1 sont vérifiées et de plus, on suppose l'hypothèse vi).

vi) les fonctions f_p vérifient la propriété suivante:

si $u = (u_1, \ldots, u_N)$ et $v = (v_1, \ldots, v_N)$ sont tels que $u_k \leqslant v_k$ et $u_p = v_p$,

alors $f_p(x, t, u) \leqslant f_p(x, t, v)$.

DÉFINITION 3.1. *Soit u une fonction définie dans S, à valeurs dans $\mathbf{R}$, nous noterons par u^+ et u^- les fonctions définies par:*

$$u^+(x, t) = \max[0, u(x, t)]; \; u^-(x, t) = \max[0, -u(x, t)] \; \big((x, t) \textit{ appartenant à } S\big).$$

Si $v = (v_1, \ldots, v_N)$ est une application définie dans S, à valeurs dans $\mathbf{R}^N$ nous noterons $v^+ = (v_1^+, \ldots, v_N^+)$ et $v^- = (v_1^-, \ldots, v_N^-)$.

DÉFINITION 3.2. *Nous dirons que l'application u est solution du problème* 3.1 *si:*

1) *$u(x, t)$ appartient à $[C^{1,2}(S)]^N$,*

2) *$u^+(x, t) = 0$ pour (x, t) appartenant à $\Gamma \times [0, T]$,*

3) $L_p(u_p) \leqslant f_p(u)$.

THÉORÈME 3.1. *Soit u solution du problème* 3.1, *soit φ vérifiant a) et b) du théorème* 1.1.

Soient φ et u verifiant:

c″) pour tout (τ_1, τ_2) vérifiant $t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$, il existe une suite $R_m \to +\infty$ et une suite $\gamma_m \to 0$ telles que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |u_p^+|^{2q+2} F\Big[\varphi \sum_i |D_i \varphi| + \varphi^2\Big] \chi_{\omega_{R_m+1} - \omega_{R_m}} \, dx\, dt \leqslant \gamma_m .$$

Alors on a la relation (1) *où u_p a été remplacé par u_p^+.*

DÉMONSTRATION. On considère la quantité $\Phi_R^2 (u_p^2 + \varepsilon)^q u_p^+ L_p(u_p)$. Par un calcul analogue à celui de la démonstration du théorème 1.1 et en utilisant le lemme 7.1, on obtient presque partout dans $\Omega \times [t_1, t_2]$ (inégalité qui remplace 1.6):

$$(3.1)\qquad \sum_p \Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q u_p^+\cdot L_p(u_p)\geqslant -\sum_{i,p} D_i[\Phi_R^2(u_p^2+\varepsilon)^q u_p^+\cdot \mathcal{T}_{i,p}(u_p)]+$$

$$+\sum_p \Phi_R^2\,[(u_p^{+2}+\varepsilon)^{q-1}]\left[\left(2q+1-\frac{1}{\lambda}-\mu\right)u_p^{+2}+\varepsilon\left(1-\frac{1}{\lambda}-\mu\right)\right] D_i u_p^+\mathcal{T}_{i,p}(u_p)+$$

$$+\sum_p (u_p^{+2}+\varepsilon)^{q+1}\left[-\frac{\Phi_R D_t\Phi_R}{q+1}\alpha_p-\Phi_R^2\left(\frac{2q+1}{2q+2}H+C_1\right)-4\lambda F\sum_i |D_i\Phi_R^2|\right]+$$

$$+\sum_p \frac{1}{2q+2}D_t[\Phi_R^2\alpha_p(u_p^{+2}+\varepsilon)^{q+1}]-\Phi_R^2\varepsilon(u_p^{+2}+\varepsilon)^q D_t\alpha_p\,.$$

Comme u est solution du problème 3.1, nous avons:

$$\Phi_R^2(u_p^{+^2}+\varepsilon)^q\cdot u_p^+L_p(u_p)\leqslant \Phi_R^2(u_p^{+^2}+\varepsilon)^q\cdot u_p^+f_p(u)\,.$$

De plus, d'après l'hypothèse vi nous avons:

$$f_p(u)=f_p(u_1,\dots,u_N)\leqslant f_p(u_1+u_1^-,\dots,u_{p-1}+u_{p-1}^-,u_p,u_{p+1}+u_{p+1}^-,\dots,u_N+u_N^-).$$

Donc

$$Sgn\,u_p\cdot f_p(u)\leqslant \sum_{s\neq p} C_s^p u_s^+ + C_p^p u_p + h_p\,.$$

Le même calcul que celui fait dans la démonstration du théorème 1.1 nous donnera:

$$\sum_p \Phi_R^2(u_p^{+2}+\varepsilon)^q\cdot u_p^+f_p(u)\leqslant \Phi_R^2\sum_p (u_p^{+2}+\varepsilon)^{q+1}\left[\frac{2q+1}{2q+2}\sum_k C_k^p+\frac{1}{2q+2}\sum_k C_p^k+\right.$$

$$\left.+\frac{2q+1}{2q+2}H_1\right]-\varepsilon\Phi_R^2\;C_p^p\,(u_p^{+2}+\varepsilon)^q+\frac{\Phi_R^2}{2q+2}\,\frac{h_p^{2q+2}}{H_1^{2q+1}}\,.$$

Nous obtenons donc la même inégalité (1.9) où u_p a été remplacé par u_p^+ sauf $\mathcal{T}_{i,p}(u_p)$ qui reste inchangé. La suite de la démonstration est la même que pour le théorème 1.1. D'où le résultat.

4. – Cas linéaire.

Etude de la partie positive de la solution ($q\geqslant -\frac{1}{2}$). On supposera les hypothèses du § 2 vérifiées, et l'hypothèse vi) du § 3.

THÉORÈME 4.1: *Soit u solution du problème* 3.1
Soit φ vérifiant a et b'
Soit φ et u vérifiant

c‴) pour tout (τ_1, τ_2) *vérifiant* $t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$, *il existe une suite* $R_m \to +\infty$ *et une suite* $\gamma_m \to 0$ *telles que:*

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega} |u_p^+|^{2q+2}\Big[\varphi^2[F + F_1 + F_2] + F\varphi \sum_i |D_i\varphi|\Big]\chi_{\omega_{R_{m+1}}-\omega_{R_m}}\,dx\,dt \leqslant \gamma_m\,.$$

alors on a la relation 1.1 *où* u_p *a été remplacé par* u_p^+.

DÉMONSTRATION. Si nous modifions la démonstration du théorème 2.1, comme nous avons modifié la démonstration du théorème 1.1 pour obtenir le théorème 3.1, nous obtenons le résultat du théorème.

§ 5. – Inégalité du type 1.1 où u_p est remplacé par $u_p - v_p$, u_p *et* v_p étant solutions de problème du type 1.1 ou 3.1.

DÉFINITION 5.1. *Nous dirons que le couple* (u, v) *est solution du problème* 5.1 *si:*

1) $u - v$ *appartiennent à* $[C^{1,2}(S)]^N$,
2) $u - v = 0$ *pour* (x, t) *appartenant à* $\Gamma\times[0, T]$
3) $L_p(u_p) = f_p(u)$

et

$$L_p(v_p) = g_p(v)\,.$$

DÉFINITION 5.2. u *appartenant à* $[C^{1,2}(S)]^N$, *on définira (pour tout* W *appartenant à* $[C^{1,2}(S)]^N$*) les opérateurs*

$L_u(W)$ *par* $L_u(W) = L(u) - L(u - W)$

$\mathcal{T}_{u,i,p}(W_p)$ *par* $\mathcal{T}_{u,i,p}(W_p) = \mathcal{T}_{i,p}(u_p) - \mathcal{T}_{i,p}(u_p - W_p)$

$B_{u,p}(W_p)$ *par* $B_{u,p}(W_p) = B_p(u_p) - B_p(u_p - W_p)$

$f_{u,p}(W_p)$ *par* $f_{u,p}(W) = f_p(u) - g_p(u - W)$.

THÉORÈME 5.1:

Si L_u, $\mathcal{T}_{u,i,p}$, $B_{u,p}$, $f_{u,p}$ *vérifient l'hypothèse* 1.1,

si (u, v) *est solution du problème* 5.1,

si φ *vérifie* a, b, *si* φ *et* $W = u - v$ *vérifient* C (théorème 1.1) *alors on a l'inégalité* 1.1 *où* u *a été remplacé par* W $(q > -\frac{1}{2})$.

REMARQUE. Pour que $\mathcal{T}_{u,i,p}$ vérifie l'hypothèse 1.1, il est nécessaire que l'opérateur $\mathcal{T}_{i,p}$ ne dépendent que de x, t et $D_j u_p$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que si (u, v) est solution du problème 5.1, alors $W = u - v$ est solution de

$L_{u,p}(W_p) = f_{u,p}(W)$, et que nous pouvons alors appliquer le théorème 1.1 à W.

THÉORÈME 5.2. *Dans le cas linéaire, si* $\mathcal{T}_{i,p}$, B_p, $f_{u,p}$ *vérifient les hypothèses* i), ii), iv), v), iii′),

si (u, v) *est solution du problème* 5.1,

si φ *et* W $(W = u - v)$ *vérifient* a), b′), c′), *alors l'inégalité* 1.1 *est vraie pour* $q \geq -\frac{1}{2}$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que $\mathcal{T}_{u,i,p}(W) = \mathcal{T}_{i,p}(W)$ et que $B_{u,p}(W_p) = B_p(W_p)$ et d'appliquer le théorème 2.1.

DÉFINITION 5.3. *Nous dirons que le couple* (u, v) *est solution du problème* 5.2 *si*:

1) *u et v appartiennent à* $[C^{1,2}(S)]^N$

2) $(u - v)^+ = 0$ *pour* (x, t) *appartenant à* $\Gamma \times [0, T]$

3) $L_p(u_p) \leq f_p(u)$

$L_p(v_p) \geq g_p(u)$.

THÉORÈME 5.3 $(q > \frac{1}{2})$. *Si* L_u, $\mathcal{T}_{u,i,p}$, $B_{u,p}$, $f_{u,p}$ *vérifient les hypothèses* 1.1 *et* vi (§ 3), *si* (u, v) *est solution du problème* 5.2,

si φ *vérifie a et b*

si φ *et* $u - v = W$ *vérifient* c'' *où* u_p^+ *a été remplace par* W_p^+, *alors on a l'inégalité* 1.1 *où* u_p *est remplacé par* W_p^+.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que:

$$L_u(W_p) \leq f_{u,p})(W), \quad \text{et d'utiliser le théorème 3.1}.$$

THÉORÈME 5.4 $(q \geq -\frac{1}{2})$. *Dans le cas linéaire, si* $\mathcal{T}_{i,p}$, B_p, $f_{u,p}$ *vérifient les hypotèses* i), ii), iv), iii′),

si (u, v) *est solution du problème* 5.2

si φ *vérifie a et* b'

si φ *et* $W = u - v$ *vérifient* c'''),

alors l'inégalité 1.1 *est vraie où* u_p *a été remplacée* W_p^+.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le théorème 4.1.

6. – Applications.

DÉFINITION 6.1. *Soit* ψ *une fonction définie dans* $\boldsymbol{R}^n \times [0, T]$ *à valeurs dans* $\boldsymbol{R}_+$;

On note $\boldsymbol{K}_\psi$ *l'ensemble des applications* u *appartenant à* $[C^{1,2}(S)]^N$, *vérifiant la propriété suivante*:

$$\psi^2 u_p^{2q+2} \text{ appartient à } L^1(S) \text{ pour tout } p$$

On note $\boldsymbol{K}_{+\psi}$ *l'ensemble des applications* u *appartenant à* $[C^{1,2}(S)]^N$, *vérifiant la propriété suivante*:

$$\psi^2 (u_p^+)^{2q+2} \text{ appartient à } L^1(S) \text{ pour tout } p\,.$$

DÉFINITION 6.2. *Soit* A *une fonction continue, strictement positive sur le segment* $[-1, +\infty[$.

On note par:

$\mathcal{A}$ *la fonction définie par*:

$$s \to \mathcal{A}(s) = \int_{-1}^{s} \frac{du}{\sqrt{A(u)}}$$

ψ_A *la fonction définie dans* $\boldsymbol{R}^n \times [0, T]$ *par*:

$$(x, t) \to \psi_A(x, t) = \exp\left[-m_1[\mathcal{A}(|x|)]^2\right]$$

$\varphi_{A,m,\beta,\tau}$ *la fonction définie dans* $\boldsymbol{R}^n \times [\tau, \tau + \beta/2]$ *par*:

$$(x, t) \to \varphi_{A,m,\beta,\tau}(x, t) = \exp\left[-m\,\frac{[\mathcal{A}(|x|)]^2}{\beta-(t-\tau)}\right]$$

où m_1, m, β *sont des constantes positives* ($\beta < 1$), τ *un réel.*

DÉFINITION 6.3. *Nous dirons que* A *vérifie l'hypothèse* 6.1 *si* $A(s)\exp[-M_1[\mathcal{A}(s)]^2] \leqslant K_1$ *pour tout* $s \geqslant 0$, *où* M_1 *et* K_1 *sont des constantes positives.*

DÉFINITION 6.4. *Nous dirons que les fonctions* H, C_1, $\sum_k C_k^p$, $\sum_k C_p^k$, H_1, F, α_p (*intervenant dans* H 1.1) *vérifient l'hypothèse* 6.2 A *si*

1) $\alpha_p \leqslant K_1 \exp\left[M_2[\mathcal{A}(|x|)]^2\right]$,
2) H, C_1, $\sum_k C_k^p, \sum_k C_p^k$, $H_1 \leqslant K_1 \alpha_p [\mathcal{A}(|x|)]^2$,
3) $F \leqslant K_1 \alpha_p A(|x|)$.

THÉORÈME 6.1. *Soit A donné, vérifiant l'hypothèse* 6.1; *on suppose que les fonctions H, C_1, $\sum_k C_k^p$, $\sum_k C_p^k$, H_1, F, α_p vérifient l'hypothèse* 6.2 A.

Si u appartient à K_{φ_A},
si

$$m < \frac{2q+1-\mu}{(q+1)\cdot 16K_1} = \beta_1,$$

si

$$\beta \leqslant \min\left[\frac{2m}{M_1+M_2+m_1}, \sqrt{\frac{m(1-m/\beta_1)}{K_1(4q+3)}}\right],$$

alors,

1) $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$ *vérifie* (*b*) *du théorème* 1.1, *où*

$$a(t) = \mathcal{A}^2(0)\left[\frac{m}{(q+1)[\beta-(t-\tau)]^2} - \frac{4q+3}{q+1}K_1 - \frac{16K_1m^2}{(2q+1-\mu)[\beta-(t-\tau)]^2}\right],$$

2) $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$ *et u vérifient* (*c*) *du théorème* 1.1.

DÉMONSTRATION. Considérons le deuxieme membre de (*b*) où φ a été remplacée par $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$, on a:

$$\alpha_p\mathcal{A}^2\left[\frac{m}{(q+1)[\beta-(t-\tau)]^2} - K_1\frac{4q+3}{q+1} - \frac{16K_1m^2}{(2q+1-\mu)[\beta-(t-\tau)]^2}\right]\varphi^2_{A,m,\beta,\tau}$$

Soit λ vérifiant $0<\lambda<1$, la quantité entre crochet peut s'écrire:

$$\frac{\lambda m}{(q+1)[\beta-(t-\tau)]^2} - K_1\frac{4q+3}{q+1} + \left[\frac{1-\lambda}{q+1} - \frac{16K_1m}{2q+1-\mu}\right]\frac{m}{[\beta-(t-\tau)]^2},$$

quantité qui est positive si

$$\frac{\lambda m}{\beta^2} - (4q+3)K_1 \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant m \leqslant \frac{(1-\lambda)(2q+1-\mu)}{16K_1(q+1)}$$

et par suite comme $\mathcal{A}$ est croissant, le deuxieme membre de (*b*) est supérieure ou égal à:

$$\alpha_p a(t)\cdot\varphi^2_{A,m,\beta,\tau} \qquad \text{où} \qquad a(t) = \mathcal{A}^2(0)\left[\frac{m}{(q+1)[\beta-(t-\tau)]^2} - \frac{4q+3}{q+1}K_1 - \right.$$
$$\left. - \frac{16K_1m^2}{(2q+1-\mu)[(\beta-(t-\tau)]^2}\right]$$

Considérons maintenant la quantité $F\Big[\varphi \sum_i |D_i\varphi| + \varphi^2\Big]$ qui intervient dans (c) du théorème 1.1, on a:

$$F\Big[\varphi_{A,m,\beta,\tau} \sum_i |D_i \varphi_{A,m,\beta,\tau}| + \varphi^2\Big] \leqslant$$
$$\leqslant K_1^2 A(|x|)\left[\frac{m\cdot n \mathcal{A}}{\beta-(t-\tau)}\cdot\frac{1}{\sqrt{A}}+1\right]\exp\left(-\frac{2m}{\beta}+M_2\right)\mathcal{A}^2 \leqslant$$
$$\leqslant K_1^2\left[2\,\frac{m\cdot n}{\beta}\sqrt{A}\,\mathcal{A}\exp - M_1\mathcal{A}^2 + A\exp - M_1\mathcal{A}^2\right]\exp\,\cdot$$
$$\cdot\left[-2\,\frac{m}{\beta}+M_2+M_1\right]\mathcal{A}^2\,.$$

En utilisant l'hypothèse 6.3 et en remarquant que $\mathcal{A}\exp[-M_1/2]\mathcal{A}^2$ est borné, on a:

$$F\Big[\varphi_{A,m,\beta,\tau} \sum_i |D_i \varphi_{A,m,\beta,\tau}| + \varphi^2\Big] \leqslant$$
$$\leqslant K\exp\left(-\frac{2m}{\beta}+M_2+M_1\right)\mathcal{A}^2,\ \text{où } K\ \left(\text{dépend de } \frac{m}{\beta}\right)$$

est une constante positive. Donc si $2m/\beta \geqslant M_1 + M_2 + m_1$ et en remarquant que u appartient à K_{φ_A}, (c) du théorème 1.1 est vérifié.

Donc, pour

$$m < \frac{2q+1-\mu}{16K_1(q+1)} = \beta_1$$

et

$$0 \leqslant \beta \leqslant \min\left(\frac{2m}{M_1+M_2+m_1},\ \sqrt{\frac{m(1-m/\beta_1)}{(4q+3)K_1}}\right),$$

les propriétés 1 et 2 du théorème 6.1 sont vérifiées avec

$$a(t) = \mathcal{A}^2(0)\left[\frac{m}{(q+1)|\beta-(t-\tau)]^2} - \frac{5q+4}{q+1}K_1 - \frac{4K_1m^2}{(2q+1-\mu)[\beta-(t-\tau)]^2}\right].$$

DÉFINITION 6.5. *Soit A une fonction continue, strictement positive sur le segment* $[-1, +\infty[$ *on note par*:

$\mathcal{A}_1$ *la fonction définie par*

$$s \to \mathcal{A}_1(s) = \int_{-1}^{s} \frac{u^2}{(1+u^2)\sqrt{A(u)}}\,du\,,$$

$\psi_{1,A}$ *la fonction définie dans* $\boldsymbol{R}^n\times[0,T]$ *par*

$$(x,t)\to\psi_{1,A}(x,t)=\exp\left[-m_1[\mathcal{A}_1(|x|)]^2\right]$$

$\varphi_{1,A,m,\beta,\tau}$ *la fonction définie dans* $\boldsymbol{R}^n\times[\tau,\tau+\beta/2]$ *par*

$$(x,t)\to\varphi_{1,A,m,\beta,\tau}(x,t)=\exp-m\,\frac{[\mathcal{A}_1(|x|)]^2}{\beta-(t-\tau)}$$

où m_1, m, β *sont des constantes positives* $(\beta<1)$ τ *un réel.*

DÉFINITION 6.6 A. *Nous dirons que les fonctions* H, H_1, $\sum_k C_k^p$, $\sum_k C_p^k$, F, F_1, F_2, F_3, α_p *vérifient l'hypothèse* 6.6 A *si:*

1) $\alpha_p\leqslant K_1\exp M_2[\mathcal{A}_1(|x|)]^2$

2) $H,\ \sum_k C_k^p,\ \sum_k C_p^k,\ H_1,\ F_3\leqslant K_1\alpha_p[\mathcal{A}_1(|x|)]^2$

3) $F_1,\ F_2\leqslant K_1\alpha_p\cdot\sqrt{A(|x|)}\cdot\mathcal{A}_1(|x|)$

4) $\dfrac{n|x|}{1+|x|^2}F\cdot\max\left[\dfrac{\mathcal{A}_1}{\sqrt{A}},\dfrac{1}{A}\left|\dfrac{|x|^3}{1+|x|^2}-\dfrac{\mathcal{A}_1A'|x|}{2\sqrt{A}}\right|\right]\leqslant K_1\alpha_p\mathcal{A}_1^2;\ \dfrac{F}{A}\leqslant K_1\alpha_p$.

THÉORÈME 6.2. *Soit* A *une fonction strictement positive définie sur* $[-1,+\infty[$, *dérivable, vérifiant l'hypothèse* 6.1; *on suppose que les coefficients* H, $\sum_k C_k^p$, $\sum_k C_p^k$, F, F_1, F_2, F_3, α_p *vérifient l'hypothèse* 6.6 A.

Si u *appartient à* $K_{\psi_{1,A}}$,

$$si\quad m<\frac{1}{32K_1n}=\beta_1,\qquad si\quad \beta\leqslant\min\left[\frac{2m}{M_1+M_2+m_1},\beta_2\right],$$

où

$$\beta_2=\frac{2m(1-m/\beta_1)}{m(2n+26)K_1+\sqrt{m^2(2n+26)^2K_1^2+2m(1-m/\beta_1)(6q+n+4)K_1}}$$

alors:

1) $\varphi_{1,A,m,\beta,\tau}$ *vérifie* (b') *du théorème* 2.1, *où*

$$a(t)=\frac{\mathcal{A}_1(0)}{2(q+1)}\varphi_{1,A,m,\beta,\tau}\left[\frac{2m}{[\beta-(t-\tau)]^2}-(6q+n+4)K_1-\right.$$
$$\left.-\frac{m}{\beta-(t-\tau)}(4n+52)K_1-\frac{64m^2K_1n}{[\beta-(t-\tau)]^2}\right]$$

2) $\varphi_{1,A,m,\beta,\tau}$ *et* u *vérifient* (c') *du théorème* 2.1.

DÉMONSTRATION:

on a:

$$D_i\varphi_{1,A,m,\beta,\tau} = \frac{-2m\mathcal{A}_1(|x|)}{\beta-(t-\tau)}\cdot\frac{|x|\cdot x_i}{(1+|x|^2)\sqrt{A(|x|)}}\cdot\varphi_{1,A,m,\beta,\tau}$$

et

$$D_{ij}\varphi_{1,A,m,\beta,\tau} = \frac{4m^2\mathcal{A}_1^2}{[\beta-(t-\tau)]^2}\cdot\frac{|x|^2x_ix_j}{(1+|x|^2)^2A}\varphi_{1,A,m,\beta,\tau}-$$
$$-\frac{2m}{\beta-(t-\tau)}\left[\frac{|x|^2\cdot x_ix_j}{(1+|x|^2)^2\cdot A}+\frac{\mathcal{A}_1|x|\partial_{ij}}{(1+|x|^2)\sqrt{A}}-\frac{1}{2}\frac{A'x_ix_j\mathcal{A}_1}{(1+|x|^2)A^{\frac{3}{2}}}+\frac{1-|x|^2}{(1+|x|^2)^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{x_ix_j}{|x|\cdot\sqrt{A}}\mathcal{A}_1\right]\cdot\varphi_{1,A,m,\beta,\tau}\,.$$

et en utilisant l'hypothèse 6.6 A, le deuxième membre de (b') est minoré par:

$$\alpha_p\varphi^2_{1,A,m,\beta,\tau}\mathcal{A}_1^2(|x|)\left[\frac{m}{(q+1)[\beta-(t-\tau)]^2}-\frac{6q+n+4}{2q+2}K_1-\frac{4m}{(\beta-(t-\tau)(2q+2)}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot(n+1)K_1-\frac{64m^2n}{(2q+2)[\beta-(t-\tau)]^2}K_1-\frac{16m}{(2q+2)[\beta-(t-\tau)]}3K_1\right]=$$
$$=\alpha_p\varphi^2_{1,A,m,\beta,\tau}\frac{\mathcal{A}_1^2(|x|)}{2(q+1)}\left[\frac{2m}{[\beta-(t-\tau)]^2}-(6q+n+4)K_1-\right.$$
$$\left.-\frac{m}{\beta-(t-\tau)}(4n+52)K_1-\frac{64m^2K_1n}{[\beta-(t-\tau)]^2}\right]$$

la quantité qui se trouve entre crochets est positive si

$$m<\frac{1}{32K_1n}=\beta_1$$

et si β vérifie

$$\frac{1}{\beta}>\frac{m(2n+26)K_1+\sqrt{m^2(2n+26)^2K_1^2+2m(1-m/\beta_1)(6q+n+4)K_1}}{2m(1-m/\beta_1)}=\beta_2$$

et par suite comme $\mathcal{A}_1(|x|)$ est croissant, le deuxième membre de (b') est minoré par:

$$\alpha_p\frac{\mathcal{A}_1^2(0)}{2(q+1)}\cdot\varphi_{1,A,m,\beta,\tau}\left[\frac{2m}{[\beta-(t-\tau)]^2}-(6q+n+4)K_1-\frac{m}{\beta-(t-\tau)}(4n+\right.$$
$$\left.+52)K_1-\frac{64m^2K_1n}{[\beta-(t-\tau)]^2}\right].$$

Considérons maintenant la quantité:

$$(F_1 + F_2 + F)\varphi^2 + F\varphi \sum_i |D_i\varphi| \qquad \text{qui intervient dans } c'.$$

On a:

$$(F_1 + F_2 + F)\varphi^2_{1,A,m,\beta,\tau} + F\varphi_{1,A,m,\beta,\tau} \sum_i |D_i\varphi_{1,A,m,\beta,\tau}| \leqslant$$
$$\leqslant K_1^2 \left[2\sqrt{A}\,\mathcal{A}_1 + A + \frac{4mn}{\beta}\sqrt{A}\,\mathcal{A}_1\right] \exp\cdot\left[\left(-\frac{2m}{\beta} + M_2\right)\mathcal{A}_1^2\right].$$

En utilisant l'hypothèse 6.3 et en remarquant que $\mathcal{A}_1 \exp[-M_1/2]\mathcal{A}_1$ est borné, on a:

$$(F + F_1 + F_2)\varphi_{1,A,m,\beta,\tau} + F\varphi_{1,A,m,\beta,\tau} \sum_i |D_i\varphi_{1,A,m,\beta,\tau}| \leqslant$$
$$\leqslant K\exp\cdot\left[\left(-\frac{2m}{\beta} + M_2 + M_1\right)\mathcal{A}_1^2\right],$$

où K est une constante positive. Donc si $2m/\beta \geqslant M_1 + M_2 + m_1$ et en remarquant que u appartient à K_{φ_A}, l'hypothèse (c') du théorème 2.1 est vérifiée.

§ 7. – Nous citons sans démonstration deux lemmes dont nous avons fait usage (démonstration voir [7]), et un lemme dont le résultat ressemble à ceux obtenus dans [6].

LEMME 7.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, Γ frontiére de Ω.*
Soit f une fonction définie dans $\Omega \times [t_1, t_2]$ localement liptschitzienne, nulle sur $\Gamma \times [t_1, t_2]$. Alors nous avons pour tout t appartenant à $[t_1, t_2]$

$$\int_{\omega_r} D_i f\, dx = \int_{\sigma_r} f \cdot \frac{x_i}{r}\, dS.$$

LEMME 7.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, soit f une fonction appartenant à $C^1(\Omega)$, soit $f_+(x) = \max(0, f(x))$ on a les résultats suivants:*

1) *la fonction f_+ admet presque partout dans Ω des dérivées partielles et si on appelle Ω_1 l'ensemble des points x de Ω tel que $f(x) > 0$ et Ω_2 l'ensemble des points x de Ω où $f(x) \leqslant 0$:*
les restrictions à Ω_1 de $D_i f_+$ et $D_i f$ sont égales
la restriction à Ω_2 de $D_i f_+$ est nulle presque partout.

2) *la fonction f_+ est localement lipschitzienne dans Ω.*

Lemme 7.3. *Soit $y(t)$ fonction continue sur $[T, T+\beta]$ et vérifiant pour tout $\tau_1, \tau_2 (T \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant T+\beta)$ l'inégalité*

$$y(\tau_2) \leqslant y(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(t) y(t)\, dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(t)\, dt, \tag{1}$$

où $a(t)$ et $h(t)$ sont des fonctions continues, alors pour tout $\tau_1 \tau_2$ vérifiant $T \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant T+\beta$, on a

$$y(\tau_2) \leqslant y(\tau_1) \exp\Big[\int_{\tau_1}^{\tau_2} a(t)\, dt\Big] + \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(t) \exp\Big[\int_t^{\tau_2} a(u)\, du\Big]\, dt.$$

Démonstration. Fixons τ_1, et considérons l'équation intégrale

$$z(\tau) = \big(y(\tau_1) + \varepsilon\big) + \int_{\tau_1}^{\tau} a(t) \cdot z(t)\, dt + \int_{\tau_1}^{\tau} h(t)\, dt \qquad \tau \geqslant \tau_1, \ \varepsilon > 0 \tag{2}$$

on vérifie facilement que:

$$G_\varepsilon(\tau) = \big(y(\tau_1) + \varepsilon\big) \exp\Big[\int_{\tau\cdot}^{\tau} a(t)\, dt\Big] + \int_{\tau_1}^{\tau} h(t) \exp\Big[\int_t^{\tau} a(u)\, du \ \ dt$$

est solution de (2) et de plus, que pour tout τ_2, τ_3 vérifiant $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_3 \leqslant T+\beta$ on a:

$$G_\varepsilon(\tau_3) = G_\varepsilon(\tau_2) + \int_{\tau_2}^{\tau_3} a(t) \cdot G_\varepsilon(t)\, dt + \int_{\tau_2}^{\tau_3} h(t)\, dt \tag{3}$$

si $y(t)$ est solution de (1), on a donc pour tout (τ_2, τ_3) $(\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_3 \leqslant T+\beta)$

$$y(\tau_3) - G_\rho(\tau_3) \ \leqslant y(\tau_2) - G_\varepsilon(\tau_2) + \int_{\tau_2}^{\tau_3} a(t)[y(t) - G_\varepsilon(t)]\, dt.$$

D'après la définition de $G_\varepsilon(\tau)$, on a donc, $y(\tau_1) - G_\varepsilon(\tau_1) \leqslant -\varepsilon < 0$. Démontrons que pour tout τ $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant T+\beta$ on a $y(\tau) - G_\varepsilon(\tau) < 0$. En effet, supposons qu'il existe $\tau_0 > \tau_1$ tel que

$$y(\tau_0) - G_\varepsilon(\tau_0) = 0$$

et pour tout $\tau(\tau_1 \leqslant \tau < \tau_0) y(\tau) - G_\varepsilon(\tau) < 0$, alors pour tout $\tau(\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_0)$, on aurait

$$y(\tau_0) - G_\varepsilon(\tau_0) = 0 \leqslant y(\tau) - G_\varepsilon(\tau) + \int_\tau^{\tau_0} [a(t) - |a(t)|][y(t) - G_\varepsilon(t)]\, dt$$

c'est-à-dire que $y - G_\varepsilon$ serait solution de l'inégalité intégrale: pour tout $\tau(\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_0)$

$$y(\tau) - G_\varepsilon(\tau) \geqslant \int_\tau^{\tau_0} (|a| - a)[y(t) - G_\varepsilon(t)]\, dt$$

comme $|a| - a \geqslant 0$, on démontre facilement que $y(\tau) - G_\varepsilon(\tau) \geqslant 0$ contraire à l'hypothèse que $y(\tau_1) - G_\varepsilon(\tau_1) < 0$.

Donc, pour tout τ, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau + \beta$, on a:

$$y(\tau) \leqslant (y(\tau_1) + \varepsilon) \exp\left[\int_{\tau_1}^{\tau} a(t)\, dt\right] + \int_{\tau_1}^{\tau} h(t) \exp\left[\int_{\tau_1}^{\tau} a(u)\, du\right] dt$$

et comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, en faisant tendre ε vers zéro, nous avons le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. G. Aronson - P. Besala, *Uniqueness of positive solutions of parabolic equations with unbounded coefficients*, Coll. Math. **18** (1967), pp. 125-135.

[2] D. G. Aronson - P. Besala, *Uniqueness of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations*, Journ. of Math. Analysis and Appl., **13** (1966), pp. 516-526.

[3] P. Besala, *On L^p-estimates for solutions of the Cauchy problem for parabolic differential equations*, Annales Polonici Mathematici, XXV/2 (1971), pp. 179-185.

[4] J. Chabrowski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques dans un domaine non borné*, Annales Polonici Mathematici, **22** [1969), pp. 21-37.

[5] J. Chabrowski - G. Reynaud, *Inégalités portant sur des systèmes linéaires de type parabolique et applications à la recherche de classes d'unicité*, Annales Polonici Mathematici (à paraître).

[6] Z. Opial, *Sur un système d'inégalitès intégrales*, Ann. Polon. Math., **3** (1964), pp. 200-209.

[7] G. Reynaud, *Quelques rèsultats sur les solutions de systèmes d'inéquations de type parabolique*, Thèses, Université D'Aix, Marseille, n. CNRS A. O. 6791.

[8] G. Reynaud, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, **271**, Série A (1970), pp. 385-274; Série A (1972), pp. 636-274; Série A (1972), p. 777.