

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FRANCESCO BALDASSARRI

Una funzione intera p -adica a valori interi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 2, n° 2
(1975), p. 321-331

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1975_4_2_2_321_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Una funzione intera p -adica a valori interi.

FRANCESCO BALDASSARRI (*)

La funzione descritta nel titolo è una serie di potenze $\Psi(x)$ in una indeterminata, a coefficienti interi razionali (ed esponenti ovviamente interi non negativi) che converge per ogni elemento del corpo p -adico \mathbb{Q}_p ad un intero p -adico (teorema 12); ed anzi, se Ω è una estensione di \mathbb{Q}_p completa rispetto ad una valutazione v , di rango 1, che induce la valutazione p -adica su \mathbb{Q}_p e $\xi \in \Omega$, la condizione che $v(\Psi(p^n \xi))$ resti non negativo è necessaria e sufficiente a che ξ , a priori elemento di Ω , sia in realtà in \mathbb{Q}_p (corollario 15).

Queste proprietà abbastanza strane, e di natura aritmetica, consigliano l'esposizione autonoma qui presentata. In realtà la $\Psi(x)$ è sorta nel corso della mia tesi di laurea, il cui oggetto era l'interpretazione di certe iperalgebre e dei loro anelli di bivettori di Witt alla luce delle considerazioni svolte da I. Barsotti in una conferenza all'Istituto Nazionale di Alta Matematica (1973). Una applicazione della Ψ alla costruzione di un omomorfismo continuo che estende la funzione esponenziale, nonchè, eventualmente, le considerazioni di «analisi funzionale p -adica» dalle quali Ψ è scaturita saranno forse esposte separatamente.

Quantunque se ne usino solo i primissimi risultati, i riferimenti all'[MA] della bibliografia sono continui: l'1 è il lemma 1.2 di [MA] tradotto in caratteristica 0, ed è con esso sinottico come buona parte di ciò che precede il teorema principale 12 (escluso). Vanno notate delle differenze: l'1 dà solo una condizione sufficiente mentre l'1.2 di [MA] dava anche la condizione necessaria; però le pseudovalutazioni qui usate sono più generali; le algebre del tipo descritto all'1 sono analoghe alle algebre topologiche localmente convesse dell'analisi classica.

(*) Università di Padova.

Pervenuto alla Redazione il 4 giugno 1974.

Desidero ringraziare I. Barsotti che mi ha guidato nello svolgimento di questo lavoro.

1. – La lettera Q indicherà sempre il corpo razionale, Z l'anello degli interi e p un primo razionale fissato; Q_p e Z_p saranno i completamenti di Q e Z nella uniformità indotta dalla valutazione p -adica v , normalizzata con $v(p) = 1$. Z'_p invece indicherà gli interi p -adici razionali, cioè $Z_p \cap Q$ (intersezione fatta in Q_p); gli anelli saranno sempre commutativi con identità. Ω indicherà un corpo di caratteristica 0, completo rispetto ad una valutazione v , di rango 1, che induce in $Q_p \subseteq \Omega$ la v precedentemente descritta; invece Ω_p indicherà il completamento della chiusura algebrica di Q_p , sicché Ω_p è un particolare Ω .

Ripeto ora alcune definizioni che si trovano al principio di [MA]. Se $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots$ sono elementi di una Q -algebra di caratteristica 0, un monomio ammesso nelle x_i è un monomio del tipo $q[(r_0!) \dots (r_s!)]^{-1} x_0^{r_0} \dots x_s^{r_s}$ ove $q \in Z'_p$. Sia A una Q -algebra, dotata di una topologia Z'_p -lineare (cioè tale che una base di intorni dello 0 sia formata da Z'_p -moduli, con intersezione ridotta all'elemento 0), e siano $i \rightarrow x_{ji}$ ($i = -1, -2, \dots$) delle successioni di elementi di A ; si attribuisca peso p^i a x_{ji} . Tali successioni sono *simultaneamente ammesse* (se ve n'è una sola, la si dirà *ammessa*) se: per ogni intorno U dello 0, e per ogni intero $m \geq 0$, esiste un intero positivo r tale che siano in U tutti i monomi ammessi nelle x_{ji} , di peso p^{-m} , ciascuno dei quali abbia grado positivo in qualche x_{ji} con $i \leq -r$.

2. – Una *pseudovalutazione* di un anello R è una applicazione $x \rightarrow w(x)$ di R su $\Gamma \cup \{+\infty\}$ (Γ essendo un gruppo ordinato addittivo) che soddisfi gli assiomi seguenti: $w(x+y) \geq \min(w(x), w(y))$, $w(xy) \geq w(x) + w(y)$, $w(1) = 0$, $w(0) = +\infty$. Alle pseudovalutazioni si applica la stessa nomenclatura che si applica alle valutazioni.

1) LEMMA. Sia R' una Q -algebra di caratteristica 0; siano w_r , con r percorrente un insieme \mathfrak{J} , sue pseudovalutazioni di rango ≤ 1 , tali che $w_r(x) = +\infty$ per ogni $r \in \mathfrak{J}$ solo se $x = 0$, e che ogni w_r induca su Q la valutazione p -adica v , con $w_r(p) = 1$. Sia R il sottoanello di R' formato dagli elementi x di R' tali che $w_r(x) \geq 0$ per ogni r di \mathfrak{J} ; si munisca R' della topologia R -lineare definita dal sistema di intorni dello 0 i cui elementi sono gli R -moduli $U(r_1, \dots, r_h; s_1, \dots, s_h)$, con $r_1, \dots, r_h \in \mathfrak{J}$ e s_1, \dots, s_h reali, così definiti: $y \in U(r_1, \dots, r_h; s_1, \dots, s_h)$ se e solo se $w_r(y) \geq s_i$ per $i = 1, \dots, h$. Siano $j \rightarrow x_{ij}$ ($j = -1, -2, \dots$) successioni di elementi di R' ; sia $n \rightarrow \alpha_r(n)$ la massima applicazione monotona non decrescente dell'insieme degli interi positivi sull'insieme dei reali e degli elementi $-\infty, +\infty$, che soddisfa la $\alpha_r(n) \leq p^n (w_r(x_{i,-n}) - 1/(p-1))$ per ogni i e n ; in altre parole, sia $\alpha_r(n) = \inf p^i (w_r(x_{i,-i}) - 1/(p-1))$, per i qualsiasi i e $j \geq n$. Si

supponga che le α_r non assumano mai il valore $-\infty$ e che per n grande ($> N_r$) sia $\alpha_r(n) \geq 0$.

Allora se tutte le serie $\sum_1^\infty p^{-n} \alpha_r(n)$ sono divergenti, le $j \rightarrow x_{ij}$ sono simultaneamente ammesse.

DIM. (Svolta nel caso di una sola w_r , che chiameremo w , e di una sola successione $j \rightarrow x_j$; vi è una sola α_r , che chiameremo α . Inoltre la condizione di ammissibilità sarà verificata solo per i monomi di peso 1, la dimostrazione essendo la stessa per i monomi di peso p^{-m}).

Un monomio ammesso nelle x_j , di peso 1, e divisibile per x_{-m} , può per semplicità essere supposto del tipo: $M_s = [(s_r!) \dots (s_1!)]^{-1} x_{-r}^{s_r} \dots x_{-1}^{s_1}$, ove (1) gli s_i sono interi non negativi, (2) $s_m > 0$, (3) $\sum_i s_i p^{-i} = 1$. Si ha:

$$w(M_s) \geq s_r w(x_{-r}) + \dots + s_1 w(x_{-1}) - v((s_r!) \dots (s_1!)) \geq s_r w(x_{-r}) + \dots + s_1 w(x_{-1}) - \frac{\sum_i s_i}{p-1} = \sum_1^r s_i \left(w(x_{-i}) - \frac{1}{p-1} \right) \geq \sum_1^r s_i p^{-i} \alpha(i) = z(s).$$

Cerchiamo il minimo valore, sia esso z_m , assunto da $z(s)$ tra gli s come sopra, assumendo inoltre, senza restrittività, che $m=r$. Prima però mostriamo che se t_1, \dots, t_r sono interi non negativi e $\sum_1^r t_i p^{-i} = k p^{-r}$ con k intero non negativo, il minimo di $z(t) = \sum_1^r t_i p^{-i} \alpha(i)$ è assunto dal $t = (t_1, \dots, t_r)$, caratterizzato univocamente dalla proprietà che t_2, \dots, t_r sono $\leq p-1$. Se quanto asserito è vero per $r=n-1$ (banalmente vero per $r=1$) e per ogni k , sia $t' = (t'_1, \dots, t'_n)$ punto di minimo per $z(t)$ nell'insieme dei t con $t_n = t'_n$ (fissato tra i possibili valori); allora t'_2, \dots, t'_{n-1} sono $\leq p-1$. Inoltre il passaggio da t'_n a $t'_n + p$ (successivo possibile t_n) dà come punto di minimo relativo a $t'_n + p$: $t'' = (t'_1, \dots, t'_{a-1}, t'_a - 1, p-1, \dots, p-1, t'_n + p)$ se $t'_{n-1} = t'_{n-2} = \dots = t'_{a+1} = 0$ e $t'_a \neq 0$, dato che t''_i è in tal caso $\leq p-1$, per $i=2, \dots, n-1$. Ma $z(t'') \geq z(t')$, e dunque il minimo possibile $t_n (\leq p-1)$ fornisce, come minimo relativo, il minimo assoluto di $z(t)$. ⁽¹⁾

Il calcolo di z_m ora è semplice: $z_m = z(s) = z((s_1, \dots, s_m))$ con $s_2, \dots, s_{m+1} \leq p-1$; s_m certo deve essere multiplo di p e la precedente scrittura di t'' mostra che il minimo si ha per $s_m = p$. Ma allora $s_2 = s_3 = \dots = s_{m-1} = p-1$. Infine $s_1 = p-1$. Dunque

$$z_m = z((p-1, p-1, \dots, p)) = \sum_1^m (p-1) p^{-i} \alpha(i) + p^{-m} \alpha(m).$$

(1) Questo ragionamento chiarisce anche la dimostrazione del lemma 1.2 di [MA].

Chiaramente, perchè $j \rightarrow x_j$ sia ammessa basta che $\lim_{m \rightarrow +\infty} z_m = +\infty$, e questo succede certamente se $\sum_1^{\infty} p^{-i} \alpha(i)$ è divergente. C.V.D.

2) COROLLARIO. *Ipotesi come all'1; suppongasi inoltre che le w_i siano tutte discrete. Allora una successione $j \rightarrow x_j$ è ammessa se per ogni i esiste un n tale che $w_i(x_{-j}) > 1/(p-1)$ per $j > n$; successioni verificanti questa condizione con un n indipendente dalla particolare successione, dipendente cioè solo da i , sono simultaneamente ammesse.*

DIM. Se $p=2$ la condizione significa $w_i(x_{-j}) \geq 2$ per $j > n$; se $p > 2$ significa $w_i(x_{-j}) \geq 1$ per $j > n$. Nel primo caso $\alpha_i(n) \geq p^n$ e nel secondo $\alpha_i(n) \geq ((p-2)/(p-1)) p^n$, per n grande. Allora la serie dell'1 diverge e la successione è ammessa. La seconda asserzione è ovvia, da 1. C.V.D.

3. - Sia x una indeterminata su Q_p di pendenza 0 (vedasi [VP], sez. 2). La topologia canonica di $Q_p[x]$ ha allora come sistema fondamentale di intorno di 0 i V_h ($h=0, 1, 2, \dots$) così definiti: V_h è il sotto- Z_p -modulo di $Q_p[x]$ generato dai monomi ax^m tali che $v(a) \geq h(1+m)$. È chiaro da [1], lemma 1.2, che V_h è lo Z_p -modulo dei polinomi a coefficienti in Q_p che assumono v -valore $\geq h$ sul disco chiuso $C_{-h} = \{x \in \Omega_p | v(x) \geq -h\}$. Dunque la topologia canonica di $Q_p[x]$ è indotta dalle seguenti pseudovalutazioni discrete w_h ($h=0, 1, 2, \dots$): $w_h(f(x)) = \min_{\xi \in C_{-h}} v(f(\xi))$, per $f(x) \in Q_p[x]$. Il completamento di $Q_p[x]$ nella topologia canonica si indica con $Q_p[[x]]$ ed è l'anello delle serie di potenze della x , a coefficienti in Q_p , convergenti su tutto Ω_p ; si ha cioè $Q_p[[x]] = \left\{ \sum_0^{\infty} a_m x^m \mid \lim_{m \rightarrow +\infty} v(a_m)/m = +\infty \right\}$.

3) LEMMA. *La successione x, px, p^2x, \dots è ammessa nella topologia canonica di $Q_p[[x]]$.*

DIM. $\lim_{i \rightarrow +\infty} w_h(p^i x) = +\infty$ per $h=0, 1, 2, \dots$, e l'asserzione segue allora da 2. C.V.D.

4) COROLLARIO. *Le successioni $\xi, p\xi, p^2\xi, \dots$, al variare di ξ fra gli elementi di Ω di v -valore maggiore di un reale preassegnato sono simultaneamente ammesse nella v -topologia di Ω .*

DIM. Infatti il Q_p -algebra omomorfismo di $Q_p[x]$ su Ω che applica x su ξ è continuo, ed è perciò unicamente estensibile, per continuità, ad un Q_p -algebra omomorfismo di $Q_p[[x]]$ su Ω . C.V.D.

Sia A una Q -algebra *quasi completa* (cioè tale che le successioni di Cauchy di elementi di A convergano in A) in una topologia Z'_p -lineare. Una succes-

sione ammessa $i \rightarrow x_i$ ($i = n, n-1, \dots$), ove n è un intero fissato, di elementi di A , è chiamata in [MA] un *covettore* di *componenti* x_i e di *componenti fantasma* $x^{(i)}$, date da:

$$5) \quad x^{(i)} = x_i + p^{-1}x_{i-1}^p + p^{-2}x_{i-2}^{p^2} + \dots \quad (i = n, n-1, \dots).$$

In tal caso anche $i \rightarrow x^{(i)}$ ($i = n, n-1, \dots$) risulta, per 1.10 di [MA], un covettore a componenti in A ; esistono inoltre funzioni razionali intere $\psi_i(Y_{i-1}, \dots, Y_0)$ (le Y_j qui sono indeterminate) di i argomenti, a coefficienti in Q , tali che:

$$6) \quad x_i = x^{(i)} + \psi_1(x^{(i-1)}) + \psi_2(x^{(i-1)}, x^{(i-2)}) + \dots \quad (i = n, n-1, \dots).$$

E anzi, dato un qualunque covettore $i \rightarrow x^{(i)}$ ($i = n, n-1, \dots$), le 6 convergono e la successione $i \rightarrow x_i$ ottenuta è un covettore a componenti in A le cui componenti fantasma date da 5 sono proprio le $x^{(i)}$ da cui si era partiti. Vale inoltre, per 1.9 di [MA], il seguente:

7) LEMMA. $\psi_i(Y_{i-1}, \dots, Y_0)$ è divisibile per Y_0 , ed è isobarico di peso p^i quando a Y_j si attribuisca peso p^j ; ogni monomio che compare in ψ_i ha grado maggiore di $(p-1)i$, ed è ammesso. Inoltre

$$h_i(Y_{i-1}, \dots, Y_0) = \frac{\psi_i(pY_{i-1}, \dots, pY_0)}{pY_0} \in Z[Y_0, \dots, Y_{i-1}];$$

questa è la definizione di $h_i(Y_{i-1}, \dots, Y_0)$.

La somma di covettori (simultaneamente ammessi) è definita all'1.11 di [MA]: se $x: i \rightarrow x_i$ e $y: i \rightarrow y_i$ ($i = n, n-1, \dots$) sono siffatti covettori, $z = x + y$ è il covettore definito da:

$$8) \quad z_i = \Phi(x_i, x_{i-1}, \dots; y_i, y_{i-1}, \dots) = \\ = x_i + y_i + \sum_1^{\infty} \varphi_j(x_{i-1}, \dots, x_{i-j}; y_{i-1}, \dots, y_{i-j}) \quad (i = n, n-1, \dots),$$

ove le φ_j sono funzioni razionali intere a coefficienti interi. Si ha:

$$z^{(i)} = x^{(i)} + y^{(i)} \quad (i = n, n-1, \dots).$$

I *bivettori* a componenti in A sono successioni infinite nei due sensi $x: i \rightarrow x_i$ ($i \in Z$) tali che, per ogni $n \in Z$, $i \rightarrow x_i$ ($i = n, n-1, \dots$) sia un covettore: per i bivettori valgono le formule 5, 6 e 8; quando un bivettore x è indicato esplicitamente come $(\dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots)$, è importante il punto e virgola prima della componente di posto 0, che serve appunto ad identificarla.

Applichiamo tutto ciò al caso $A = Q_p[[x]]$, $x^{(i)} = p^{-i}x$, ($i \in \mathbb{Z}$), il che è possibile per 3; si ottiene che

$$i \rightarrow x_i = p^{-i}x + \psi_1(p^{-i+1}x) + \psi_2(p^{-i+1}x, p^{-i+2}x) + \dots \quad (i \in \mathbb{Z})$$

è un bivettore a componenti in $Q_p[[x]]$. Definiamo allora:

$$9) \quad \Psi(x) = x_0 = x + \sum_1^{\infty} \psi_i(px, \dots, p^i x) \in Q_p[[x]] ;$$

si noti che $Q_p[[x]]$ è sottoanello di $Q_p\{x\}$ (anello delle serie di potenze formali a coefficienti in Q_p), per [VP], lemma 1.1 e sez. 2. Si ha dunque, da 1.10 di [MA]:

$$10) \quad x = \sum_0^{\infty} p^{-j} \Psi(p^j x)^{p^j},$$

ove la serie a secondo membro converge sia nella topologia canonica di $Q_p[[x]]$, sia nella topologia di serie formali (discreta su Q_p) di $Q_p\{x\}$ (ovviamente). Ed anzi, la 10 definisce univocamente la serie formale $\Psi(x)$.

Si considerino ora due indeterminate x, y su Q_p , di pendenza nulla, e sia $Q_p[[x, y]]$ il completamento di $Q_p[x, y]$ nella topologia canonica (VP] sez. 2). Si tratta di nuovo dell'anello delle serie di potenze a coefficienti in Q_p , convergenti su tutto $\Omega_p \times \Omega_p$, munito della topologia indotta dalle pseudovalutazioni w_h ($h = 0, 1, 2, \dots$), ove:

$$w_h(f(x, y)) = \min_{(\xi, \eta) \in C_{-h} \times C_{-h}} v(f(\xi, \eta))$$

per ogni $f(x, y) \in Q_p[[x, y]]$. Infatti un sistema fondamentale di intorni di 0 nella topologia canonica è formato dai V_h ($h = 0, 1, \dots$), ove V_h è il sotto- \mathbb{Z}_p -modulo di $Q_p[x, y]$ generato dai monomi $ax^r y^s$, con (r, s) tali che: $v(a) \geq h(1 + r + s)$, e coincide con lo \mathbb{Z}_p -modulo dei polinomi $f(x, y)$ di $Q_p[x, y]$ tali che $w_h(f(x, y)) \geq h$, per [1], lemma 1.2. In $Q_p[[x, y]]$ le successioni x, px, p^2x, \dots e y, py, p^2y, \dots sono simultaneamente ammesse, e l'1.11 di [MA] assicura che:

$$11) \quad \Psi(x + y) = \Phi(\Psi(x), \Psi(px), \dots; \Psi(y), \Psi(py), \dots),$$

ove Φ è appunto la funzione definita nell'1.11 di [MA], e la serie che la definisce converge sia nella topologia canonica di $Q_p[[x, y]]$, sia nella topologia

di serie formali di $Q_p\{x, y\}$, dato che il grado di ogni monomio che compare in $\varphi_i(x_{i-1}, \dots, x_0; y_{i-1}, \dots, y_0)$ (qui x_i, y_i sono indeterminate) è almeno $(p-1)i$ (vedi pag. 10 di [MA]). L'uguaglianza 11 vale in $Q_p[[x, y]]$ e dunque in $Q_p\{x, y\}$ ([VP], lemma 1.1 e pag. 114); anzi, dato che

$$\Psi(x) = x + \sum_1^{\infty} \psi_i(px, \dots, p^i x) = x + \sum_1^{\infty} p^i x h_i(x, \dots, p^{i-1} x) \in Z\{x\}$$

(cfr. 7), e che le φ_i sono a coefficienti interi, la 11 vale in $Z\{x, y\}$.

Si noti infine che anche la 10 vale in $Z\{x\}$.

4. - Si osservi ora che per $\xi, \eta \in \Omega$, l'omomorfismo di Q_p -algebre:

$$\begin{aligned} \varphi: Q_p[x, y] &\rightarrow \Omega \\ x, y &\rightarrow \xi, \eta \end{aligned}$$

è continuo se su $Q_p[x, y]$ si pone la topologia canonica, e si può dunque unicamente estendere per continuità a $Q_p[[x, y]]$. Le formule 10 e 11 restano pertanto valide sostituendovi x e y con ξ ed η e danno delle uguaglianze in Ω .

Il seguente è il teorema fondamentale:

12) TEOREMA. $\Psi(x)$ è serie di potenze a coefficienti interi tale che $\Psi(\xi)$ esiste (converge) per ogni $\xi \in \Omega$. Inoltre per ogni $\xi \in Q_p$ si ha $\Psi(\xi) \in Z_p$.

DIM. Resta da dimostrare l'ultimo asserto. In base all'1.10 di [MA] si tratta di provare che se $\xi \in Q_p$ e si pone, per $i = 0, -1, -2, \dots$, $x^{(i)} = p^{-i}\xi$, allora $x_i \in Z_p$ per ogni $i = 0, -1, -2, \dots$.

a) Sia $\xi = p^{-n}\eta$ con $\eta^p = \eta$ ed $n > 0$, e poniamo, per $m \leq n$, e in accordo con 6, $x_m = \Psi(p^{-m}\eta)$; si ha (9, 7):

$$x_{-j} = p^j \eta + \sum_1^{\infty} \psi_i(p^{j+1}\eta, \dots, p^{j+i}\eta) = p^j \eta + \sum_1^{\infty} p^{j+i} \eta h_i(p^j \eta, \dots, p^{j+i-1} \eta),$$

onde $x_{-j} \equiv p^j \eta \pmod{p^{j+1} Z_p}$, se $j \geq 0$.

Poi, per 5, $x_1 + p^{-1}x_0^p + p^{-2}x_{-1}^{p^2} + \dots = p^{-1}\eta$; ma, per quanto si è visto, $x_0^p \equiv \eta^p = \eta \pmod{p^2 Z_p}$, e $p^{-j-1}x_{-j}^{p^{j+1}} \equiv 0 \pmod{p^{j+1} Z_p}$ se $j > 0$, e dunque: $x_1 \equiv 0 \pmod{p Z_p}$.

Ipotesi induttiva: $x_m \equiv 0 \pmod{p Z_p}$ per tutti gli $m > 0$ e $\leq N$, con $N < n$; si ha: $x_{N+1} + p^{-1}x_N^p + p^{-2}x_{N-1}^{p^2} + \dots + p^{-N-1}x_0^{p^{N+1}} + p^{-N-2}x_{-1}^{p^{N+2}} + \dots = p^{-N-1}\eta$. Tutti i termini scritti, esclusi (per ora) x_{N+1} , $p^{-N-1}x_0^{p^{N+1}}$, $p^{-N-1}\eta$, sono $\equiv 0 \pmod{p Z_p}$, sicchè $x_{N+1} \equiv p^{-N-1}(\eta - x_0^{p^{N+1}}) \equiv 0 \pmod{p Z_p}$:

L'induzione è così dimostrata. Notiamo per uso futuro che resta in particolare dimostrato che $\Psi(p^{-m}) \equiv 0 \pmod{pZ_p}$ per $m \neq 0$.

b) Caso generale. Se $v(\xi) > 0$, con $\xi \in Q_p$, è $\Psi(\xi) \in pZ_p$. Supposto $\Psi(\xi) \in Z_p$ per ogni ξ di Q_p tale che $v(\xi) > -n$, sia $\eta \in Q_p$ tale che $v(\eta) = -n$; chiamiamo $\{\eta_{-n}\}$ il rappresentante moltiplicativo, in Z_p , della immagine di $p^n \eta$ modulo p : sia cioè

$$\{\eta_{-n}\} = \lim_{r \rightarrow +\infty} (p^n \eta)^{p^r}, \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Allora $\{\eta_{-n}\}^p = \{\eta_{-n}\}$ e $v(\eta - \{\eta_{-n}\} p^{-n}) > -n$; si ponga $\xi = \eta - \{\eta_{-n}\} p^{-n}$. Si ha (11):

$$\Psi(\eta) = \Phi(\Psi(\xi), \Psi(p\xi), \dots; \Psi(\{\eta_{-n}\} p^{-n}), \Psi(\{\eta_{-n}\} p^{-n+1}), \dots) \in Z_p. \quad \text{C.V.D.}$$

Nel seguito si utilizzeranno ([MA], capitolo 2) bivettori a componenti in anelli di caratteristica p ; nel nostro caso tali anelli saranno dei corpi perfetti dotati della topologia discreta: il corpo di p elementi F_p , oppure il corpo residuo F di Ω , che dovrà quindi essere supposto perfetto; in questa sezione è anzi opportuno supporre non solo che F sia perfetto, ma anche che Ω contenga l'estensione massima non ramificata di Q_p (il cui corpo residuo è la chiusura algebrica \bar{F}_p di F_p). Se l' Ω inizialmente scelto non soddisfacesse a queste condizioni, lo estenderemo opportunamente (per esempio prendendo il completamento della sua chiusura algebrica); tuttavia gli enunciati che seguono non contengono questa condizione su Ω , in quanto è immediatamente verificabile che se essi valgono per l' Ω esteso debbono valere anche per l' Ω dato.

Gli anelli di bivettori $\text{biv } F_p$, $\text{biv } \bar{F}_p$, $\text{biv } F$ coincidono, come è noto, con le estensioni su Q dei corrispondenti anelli di vettori infiniti di Witt; è noto che $\text{biv } F_p = Q_p$ e che $\text{biv } F \subseteq \Omega$. Per la definizione degli endomorfismi π e t di $\text{biv } F$ si veda al capitolo 1 di [MA], e in particolare all'1.12 per la proprietà $\pi t = t\pi = p\iota$ (moltiplicazione per p).

Ora se $\xi \in \Omega$ ha la proprietà che $v(\Psi(p^n \xi)) \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si consideri il bivettore a componenti in F : $b = (\dots, \sigma \Psi(p\xi); \sigma \Psi(\xi), \sigma \Psi(p^{-1}\xi), \dots) \in \Omega$ ove σ indica la riduzione modulo il primo massimo \mathfrak{M} della schiera valutante \mathfrak{T} di Ω . La moltiplicazione per p di ξ produce la moltiplicazione per p delle componenti fantasma $p^{-n}\xi$, $p^{-n+1}\xi$, ... del covettore di componenti $\Psi(p^{-n}\xi)$, $\Psi(p^{-n+1}\xi)$, ..., per ogni n ; è dunque

$$pb = (\dots, \sigma \Psi(p^2 \xi); \sigma \Psi(p\xi), \dots) = tb,$$

onde $\pi b = b$. Pertanto $\sigma\Psi(p^n\xi) \in F_p$ per ogni $n \in Z$ e $b \in Q_p$. Ciò premesso, vale il:

13) LEMMA. *L'applicazione $\gamma: \xi \rightarrow (\dots, \sigma(\Psi(p\xi)); \sigma(\Psi(\xi)), \sigma(\Psi(p^{-1}\xi)), \dots)$ di Q_p in $\text{biv } F_p = Q_p$ è l'isomorfismo identico.*

DIM. $\gamma(\xi + \eta) = \gamma(\xi) + \gamma(\eta)$ per $\xi, \eta \in Q_p$; inoltre γ è applicazione continua, ed è quindi omomorfismo di Q_p -moduli; ma applica 1 su 1, in quanto, come si è osservato alla fine del caso 1 nella dimostrazione del 12, si ha $\sigma\Psi(p^m) = 0$ per $m \neq 0$. C.V.D.

14) TEOREMA. *Sia $\zeta \in \Omega$ tale che $v(\Psi(p^n\zeta)) > 0$ per ogni $n \in Z$; allora $\zeta = 0$.*

DIM. Se fosse $\zeta \neq 0$ esisterebbe un $m \in Z$ tale che $-1 < v(p^m\zeta) \leq 0$, e in tal caso, anticipando il teorema 17 del numero successivo (la cui dimostrazione è indipendente dai 14, 15), si avrebbe $\beta(\Psi(p^m\zeta)) = p^m\zeta$.

Ma questo è assurdo perchè $\beta(x)$ converge per $x = \Psi(p^m\zeta) \in \mathfrak{M}$ ad un elemento di \mathfrak{M} , mentre $p^m\zeta \notin \mathfrak{M}$. C.V.D.

15) COROLLARIO. *Sia $\xi \in \Omega$ tale che $v(\Psi(p^n\xi)) \geq 0$ per ogni $n \in Z$; allora $\xi \in Q_p$.*

DIM. Si chiami ancora γ l'applicazione $\xi \rightarrow b$, ove b è l'elemento di $\text{biv } F_p = Q_p$ definito prima di 13; γ è ora applicazione di un sottoinsieme di Ω su Q_p , tale che $\gamma(\xi + \eta) = \gamma(\xi) + \gamma(\eta)$, questa essendo valida non appena due fra i tre termini esistono. Si ponga in questa formula $\eta = -b$ e si osservi che $\gamma(\xi - b)$ esiste ed è $= 0$, in quanto $\gamma(\xi - b) = \gamma(\xi) - \gamma(b)$, e $\gamma(b) = b = \gamma(\xi)$ per 13. Ciò è quanto dire che $\Psi(p^n(\xi - b)) \in \mathfrak{M}$ per ogni $n \in Z$. Il 14 comporta allora che $\xi = b$. C.V.D.

5. - Nel lemma che segue, C_h indicherà l'insieme degli $\xi \in \Omega$ tali che $v(\xi) \geq h$; in particolare $C_{-\infty} = \Omega$ e $C_{+\infty} = (0)$.

16) LEMMA. *Siano $A(x) = \sum_0^\infty a_i x^i$ e $B(x) = \sum_1^\infty b_i x^i$ serie di potenze a coefficienti in Ω nella indeterminata x ; sia $D(x) = A(B(x))$ e si supponga che $B(\zeta)$ e $D(\zeta)$ convergano per $\zeta \in C_h$, per un certo h . Sia $k = \inf_{\zeta \in C_h} v(B(\zeta))$ e si supponga che $A(\eta)$ converga per $\eta \in C_k$; allora per ogni $\zeta \in C_h$, si ha: $D(\zeta) = A(B(\zeta))$.*

DIM. Si può supporre $h \neq -\infty$. Indichiamo con $A_m(x)$, $B_m(x)$, $D_m(x)$ le somme parziali m -esime delle serie di potenze che rappresentano rispettivamente $A(x)$, $B(x)$, $D(x)$. Dato n , esiste un $M(n) \geq n$ tale che per $m > M(n)$ ogni monomio che compare in $A_m(B_m(x)) - D_m(x)$ ha grado $> n^2$ (questo è conseguenza immediata dell'ipotesi $A(B(x)) = D(x)$). Ogni tale monomio o compare in $D_m(x)$, o in $A_m(B_m(x))$; si osservi che i monomi di grado $> n^2$ che compaiono in $A_m(B_m(x))$ sono tutti e soli i monomi di grado $> n^2$ che compaiono in $A_m(B_m(x)) - A_n(B_n(x))$, dato che $A_n(B_n(x))$ ha grado n^2 .

Dato un reale H , esiste un reale I tale che per $i > I$ sia $v(A(B_i(\zeta)) - A(B(\zeta))) > H$ per ogni $\zeta \in C_h$, perchè $\eta \rightarrow A(\eta)$ è funzione uniformemente continua in C_h ; poi esiste un reale J tale che per $j > J$ sia $v(A_j(B_i(\zeta)) - A(B_i(\zeta))) > H$ per ogni i e per ogni $\zeta \in C_h$. Quindi per $i > I$ e $j > J$, e per ogni $\zeta \in C_h$, è $v(A_j(B_i(\zeta)) - A(B(\zeta))) > H$; in particolare, dato H esiste un n tale che per $m > M(n)$ sia

$$v(A_m(B_m(\zeta)) - A(B(\zeta))) > H \quad \text{e} \quad v(A_m(B_m(\zeta)) - A_n(B_n(\zeta))) > H$$

per ogni $\zeta \in C_h$. Questo comporta che se $P(x)$ è un monomio di grado $> n^2$ che compare in $A_m(B_m(x))$, e quindi, come si è visto sopra, in $A_m(B_m(x)) - A_n(B_n(x))$, deve essere $v(P(\zeta)) > H$ per ogni $\zeta \in C_h$. Se n viene scelto anche in modo che ogni monomio $Q(x)$ di grado maggiore di n^2 compaia in $D(x)$ sia tale che $v(Q(\zeta)) > H$ per ogni $\zeta \in C_h$, abbiamo così dimostrato che $v(A_m(B_m(\zeta)) - D_m(\zeta)) > H$ per ogni $\zeta \in C_h$ e per $m > M(n)$. Da ciò, e da quanto precede consegue che $v(A(B(\zeta)) - D(\zeta)) > H$. C.V.D.

Sia ora $\beta(x) = \sum_1^\infty b_i x^i \in Z[x]$, la serie reciproca di $\Psi(x)$; si abbia cioè, formalmente: $\Psi(\beta(x)) = \beta(\Psi(x)) = x$. Si ponga $\Psi(x) = \sum_1^\infty a_i x^i$; la formula ricorrente, ricavata da 10, che dà gli a_r , è:

$$a_1 = 1,$$

$$a_r = - \sum_1^{[\log_p r]} \sum_{(e_1, \dots, e_{r-1})} \frac{p^h!}{(e_1! \dots (e_{r-1})!)} p^{h(r-1)} a_1^{e_1} \dots a_{r-1}^{e_{r-1}},$$

se $r > 1$, ove la $\sum_{(e_1, \dots, e_{r-1})}$ è estesa ai vettori di numeri interi non negativi tali che $\sum e_i = p^h$ e $\sum i e_i = r$; pertanto $v(a_r) \geq r - 1$ per ogni r . I coefficienti di $\beta(x)$ sono dati invece dalle:

$$b_1 = 1,$$

$$b_h = - \sum_1^{h-1} b_j \sum_{(e_1, \dots, e_h)} \frac{j!}{(e_1! \dots (e_h)!)} a_1^{e_1} \dots a_h^{e_h},$$

se $h > 1$, ove la \sum è estesa ai vettori di numeri interi non negativi tali che $\sum e_i = j$, $\sum_{(e_1, \dots, e_h)} i e_i = h$. Se si suppone $v(b_j) \geq j - 1$ per $j \leq h - 1$ (vero per $h = 2$), si ha:

$$v(b_h) \geq \min v(b_j) + e_1 v(a_1) + \dots + e_h v(a_h) \geq j - 1 + e_1 0 + e_2 1 + \dots + e_h (h - 1) = e_1 + 2e_2 + \dots + h e_h - 1 \quad (\text{il minimo è fatto sui monomi } b_j a_1 \dots a_h \text{ che compaiono nella formula che dà } b_h).$$

Dunque $v(b_h) \geq h - 1$ per ogni h .

Sia ora $\zeta \in \Omega$, $v(\zeta) > -1$:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} v(b_h) + h v(\zeta) \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} h(v(\zeta) + 1) - 1 = +\infty;$$

dunque $\beta(\zeta)$ converge per ogni $\zeta \in \Omega$ con $v(\zeta) > -1$; ed ovviamente $v(\beta(\zeta)) > -1$; lo stesso dicasi per $\Psi(\zeta)$. Se, d'altra parte, $\zeta \in \Omega$ e $v(\zeta) = -1$, $\beta(\zeta)$ non può convergere: in caso contrario, infatti, la serie di $\beta(\zeta)$ dovrebbe convergere, come è noto, per ogni tale ζ , ed in particolare per $\zeta \in Q_p$ (per esempio $\zeta = p^{-1}$); ma allora il lemma 16 darebbe $\Psi(\beta(\zeta)) = \zeta$, e questo per $\zeta \in Q_p$ contraddirebbe al 12. Concludendo si ha:

17) TEOREMA. *La serie reciproca $\beta(x)$ di $\Psi(x)$ è un elemento di $Z\{x\}$ che converge per $\zeta \in \Omega$ se e solo se $v(\zeta) > -1$. In tal caso si ha:*

$$\Psi(\beta(\zeta)) = \zeta = \beta(\Psi(\zeta)).$$

BIBLIOGRAFIA

- [MA] I. BARSOTTI, *Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva*, Capitoli 1, 2, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **18** (1964), p. 1.
- [VP] I. BARSOTTI, *Varietà abeliane su corpi p -adici*, Parte I, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Mathematica, **1** (1968), p. 109.
- [1] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface*, Publ. Math. I.H.E.S., **12** (1962).