ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

EDOARDO SERNESI

L'unirazionalità della varietà dei moduli delle curve di genere dodici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 8, nº 3 (1981), p. 405-439

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1981_4_8_3_405_0>

L'unirazionalità della varietà dei moduli delle curve di genere dodici.

EDOARDO SERNESI (*)

Introduzione.

Per ogni intero $p \geq 1$ l'insieme $\mathcal{M}_p$ delle classi di isomorfismo birazionale di curve algebriche di genere p ha una struttura naturale di varietà algebrica quasi proiettiva [M 1]. Una descrizione esplicita di $\mathcal{M}_p$ è stata finora ottenuta solo nei casi $p = 1, 2$ (cfr. [E-Ch] e [I]) mentre per valori maggiori di p si hanno alcune informazioni generali, come ad esempio che $\mathcal{M}_p$ è irriducibile di dimensione $3p - 3$ (questo è un risultato classico in caratteristica zero [E-Ch]).

In [Sev] Severi indicò una via per dimostrare che $\mathcal{M}_p$ è *unirazionale* se $p \leq 10$; la sua idea, basata sulla considerazione di famiglie di curve piane con nodi, fu ripresa e sviluppata ampliamente da B. Segre [Se] e il risultato può considerarsi oggi acquisito (per una discussione si veda anche [A-S 2]). Nella stessa Memoria Severi congetturò anche l'unirazionalità di $\mathcal{M}_p$ per tutti i valori di $p \geq 11$. In questo lavoro si risponde affermativamente alla congettura nel caso $p = 12$. Il risultato è ottenuto, in accordo con il suggerimento di Severi, dallo studio delle curve di $\mathbb{P}^3$ di genere 12 e ordine 12 (il minimo possibile senza particolarizzare i moduli).

Il lavoro è diviso in due parti. Nella parte I, fissata una curva irriducibile non singolare C ed un morfismo birazionale di C su una curva $\Gamma \subset \mathbb{P}^r$, si studiano i gruppi

$$\gamma(\mathcal{O}_C) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}(mD))$$

$$\gamma(\mathcal{O}(K)) = \bigoplus_{m \in Z} H^0(C, \mathcal{O}(K + mD))$$

(*) Ricerca in parte svolta mentre l'autore era borsista CNR-NATO presso il Department of Mathematics at Harvard University.

Pervenuto alla Redazione il 31 Marzo 1980 ed in forma definitiva il 5 Novembre 1980.

dove K è un divisore canonico e D è il divisore immagine su C di una sezione iperpiana di Γ. Questi sono moduli graduati sull'algebra dei polinomi in $r+1$ variabili a coefficienti nel campo base che hanno la proprietà di essere di Cohen-Macaulay; ciò ne facilita lo studio dal punto di vista omologico. Si ottengono infatti informazioni abbastanza precise sulle loro sizigie e sugli ideali di Fitting associati, specialmente nel caso di curve in $\mathbb{P}^3$.

I risultati generali della parte I vengono applicati nella parte II per costruire una famiglia di curve non singolari irriducibili di genere 12 a moduli generali, realizzate come curve di $\mathbb{P}^3$ di ordine 12, parametrizzata da una varietà razionale. Il passo più delicato della costruzione si appoggia sull'esistenza, dimostrata nel paragrafo 6, di curve irriducibili non singolari di genere 12 e ordine 12 in $\mathbb{P}^3$ a moduli generali sulle quali le superfici quintiche seghino una serie lineare completa.

I metodi su cui è basato questo lavoro rientrano sostanzialmente nel programma iniziato da Petri in [P 1] e [P 2], poi ripreso in [S D], [A-S 1] e [A-S 2]. Si adotterà il linguaggio degli schemi che si supporranno sempre definiti su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso; nella parte II si farà l'ulteriore ipotesi che $\mathbb{K}$ sia di caratteristica zero al solo scopo di poter disporre del teorema di Bertini nel paragrafo 6.

Desidero ringraziare Enrico Arbarello per aver suscitato il mio interesse per il problema dell'unirazionalità dei moduli delle curve attraverso moltissime interessanti discussioni. Ringrazio vivamente anche Ciro Ciliberto ed Alan Mayer per alcune utili conversazioni riguardanti gli argomenti del paragrafo 6.

In una prima versione del lavoro è risultata errata la dimostrazione della proposizione (6.7). Ciò è stato notato da E. Arbarello, C. Ciliberto e dal referee. Una dimostrazione alternativa ma vicina, a quella presentata qui è stata trovata da C. Ciliberto e Joe Harris. Esprimo a tutti i miei ringraziamenti.

Parte I

1. – Generalità.

In tutta la parte I si supporrà fissata una curva proiettiva irriducibile non singolare C di genere p definita su un campo algebricamente chiuso $\mathbb{K}$. Denoteremo sempre con K un divisore canonico su C. Se $\mathcal{F}$ è un fascio di $\mathcal{O}_C$-moduli e Δ è un divisore su C, i $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di coomologia $H^i(C, \mathcal{F})$,

$H^i(C, \mathcal{O}(\Delta))$, $H^i(C, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(\Delta))$ saranno denotati, quando ciò non dia luogo ad equivoci, rispettivamente $H^i(\mathcal{F})$, $H^i(\Delta)$, $H^i(\mathcal{F}(\Delta))$ e le loro dimensioni $h^i(\mathcal{F})$, $h^i(\Delta)$, $h^i(\mathcal{F}(\Delta))$; con $|\Delta|$ denoteremo la serie lineare completa individuata da Δ.

Supporremo dato una volta per tutte un divisore D su C di grado n ed un sottospazio vettoriale $V \subseteq H^0(D)$ di dimensione $r+1 \geqslant 2$ tale che *in nessun punto di C si annullino tutti gli elementi di V*. Dunque V definisce una sottoserie lineare di $|D|$ priva di punti fissi, di grado n e dimensione r (una g_n^r); sia

$$\pi_V\colon C \to \mathbf{P}^r$$

il corrispondente morfismo di C nello spazio proiettivo di dimensione r.

Per ogni $m \in \mathbf{Z}$ denotiamo con S_m l'm-esima potenza simmetrica di V ($S_m = 0$ se $m < 0$) e con

$$S = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} S_m$$

l'algebra simmetrica di V. Se

$$E = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} E_m$$

è un S-modulo graduato ed $s \in \mathbf{Z}$, denotiamo come di consueto

$$E(s) = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} E(s)_m$$

dove $E(s)_m = E_{s+m}$ ed

$$E^* = \operatorname{Hom}(E, S)\,.$$

In particolare

$$E(s)^* = E^*(-s) = \operatorname{Hom}\big(E, S(-s)\big)\,.$$

Ricordiamo che un S-modulo graduato di tipo finito E si dice di Cohen-Macaulay se la sua dimensione eguaglia la sua profondità, in simboli $\dim(E) = \operatorname{prof}(E)$ (cfr. [S 3]).

Nel seguito considereremo S-moduli graduati della forma

$$\gamma(\mathcal{F}) = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} H^0\big(\mathcal{F}(mD)\big)$$

dove $\mathcal{F}$ è un fascio invertibile; in particolare studieremo in dettaglio

$$\gamma(\mathcal{O}_C) = \bigoplus_{m \geqslant 0} H^0(mD)\,, \quad \gamma\big(\mathcal{O}(K)\big) = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} H^0(K + mD)\,.$$

In questo paragrafo, fissato il fascio invertibile $\mathcal{F}$ su C, daremo per completezza le dimostrazioni di alcune proprietà ben conosciute del modulo $\gamma(\mathcal{F})$.

(1.1) LEMMA. *$\gamma(\mathcal{F})$ è un S-modulo graduato di tipo finito, di Cohen-Macaulay di dimensione 2.*

DIMOSTRAZIONE. La finitezza di $\gamma(\mathcal{F})$ è un risultato ben noto (cfr. ad esempio [H]).

Scegliamo una base $x_0, \ldots, x_r$ di V; possiamo supporre che $x_0, \ldots, x_r$ non abbiano a due a due punti di annullamento in comune. Sia

$$\Lambda.: S \underset{\mathbf{K}}{\otimes} \overset{r+1}{\bigwedge} V \xrightarrow{\partial_{r+1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} S \underset{\mathbf{K}}{\otimes} V \xrightarrow{\partial_1} S$$

il complesso di Koszul di $x_0, \ldots, x_r$. Poichè la moltiplicazione

$$x\colon H^0(\mathcal{F}(mD)) \to H^0\big(\mathcal{F}((m+1)D)\big)$$

è iniettiva per ogni $x \in V$ non nullo ed $m \in \mathbf{Z}$, si ha

$$H_{r+1}(\Lambda. \underset{S}{\otimes} \gamma(\mathcal{F})) = 0 . \tag{1.2}$$

Consideriamo un elemento di $H^0(\mathcal{F}(mD)) \underset{\mathbf{K}}{\otimes} \overset{r}{\bigwedge} V$:

$$z = a_0 \otimes x_1 \wedge \ldots \wedge x_r + \ldots a_r \otimes x_0 \wedge \ldots \wedge x_{r-1}, \qquad a_0, \ldots, a_r \in H^0(\mathcal{F}(mD)) .$$

Abbiamo

$$\partial_r(z) = -(a_0 x_1 + a_1 x_0) \otimes x_2 \wedge \ldots \wedge x_r + (a_0 x_2 - a_2 x_0) \otimes x_1 \wedge x_3 \wedge \ldots \wedge x_r + \ldots$$
$$\ldots - (a_{r-1} x_r + a_r x_{r-1}) \otimes x_0 \wedge \ldots \wedge x_{r-2} .$$

Se $\partial_r(z) = 0$ allora per il «base point free pencil trick» ([S D] pag. 162) esiste

$$a \in H^0\big(\mathcal{F}((m-1)D)\big)$$

tale che

$$a_0 = -x_0 a , \qquad a_1 = x_1 a, \ldots, a_r = (-1)^{r+1} x_r a$$

e quindi

$$H_r(\Lambda. \underset{S}{\otimes} \gamma(\mathcal{F})) = 0 . \tag{1.3}$$

Per le note proprietà del complesso di Koszul [A-B] (1.2) ed (1.3) implicano che

$$2 \leqslant \operatorname{prof}\big(\gamma(\mathcal{F})\big) .$$

D'altra parte si ha pure [S 3]

$$\operatorname{prof}\big(\gamma(\mathcal{F})\big) \leqslant \dim\big(\gamma(\mathcal{F})\big)$$

e dal teorema di Riemann-Roch segue che

$$\dim\big(\gamma(\mathcal{F})\big) = 2 . \qquad \text{c.v.d.}$$

La principale conseguenza del lemma (1.1) è che $\gamma(\mathcal{F})$ possiede una risoluzione libera minimale su S di lunghezza $r-1$

$$(1.4) \qquad 0 \longrightarrow F_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} \dots \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow \gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

costituita da S-moduli graduati liberi di tipo finito e da omomorfismi omogenei di grado zero (che chiameremo semplicemente una *risoluzione minimale*).

In termini di funtori Ext la proprietà di $\gamma(\mathcal{F})$ di essere di Cohen-Macaulay di dimensione 2 è espressa dalla condizione

$$(1.5) \qquad \operatorname{Ext}^i_S\big(\gamma(\mathcal{F}), S(-r-1)\big) = 0 \qquad i \neq r-1 .$$

L'S-modulo graduato

$$\operatorname{Ext}^{r-1}_S\big(\gamma(\mathcal{F}), S(-r-1)\big)$$

è non nullo e si può descrivere facilmente usando i teoremi di dualità di [S 1]. Sia infatti $\gamma(\mathcal{F})^{\sim}$ il fascio coerente su $\mathbf{P}^r$ associato a $\gamma(\mathcal{F})$ nel modo ben noto [H]; poichè

$$\gamma(\mathcal{F})_m = H^0\big(\mathbf{P}^r, (\pi_{V*}\mathcal{F})(m)\big)$$

si ha $\gamma(\mathcal{F})^{\sim} = \pi_{V*}\mathcal{F}$. Da [S 1] segue che esiste un isomorfismo naturale

$$\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}} \operatorname{Ext}^{r-1}_S\big(\gamma(\mathcal{F}), S(-r-1)\big)_m \cong \bigoplus_{m\in\mathbf{Z}} H^1\big(\mathbf{P}^r, (\pi_{V*}\mathcal{F})(-m)\big)^*$$

dove * denota dualità di $\mathbf{K}$-spazi vettoriali.

La successione spettrale di Leray e la dualità di Serre su C danno infine un isomorfismo naturale

$$(1.6) \qquad \bigoplus_{m\in\mathbf{Z}} \operatorname{Ext}^{r-1}_S\big(\gamma(\mathcal{F}), S(-r-1)\big)_m \cong \bigoplus_{m\in\mathbf{Z}} H^0\big(\mathcal{F}^{-1}(K+mD)\big) .$$

Da (1.5) ed (1.6) si deduce immediatamente la seguente:

(1.7) PROPOSIZIONE. *Sia* (1.4) *una risoluzione minimale di* $\gamma(\mathcal{F})$. *Allora*

$$0 \longrightarrow F_0^*(-r-1) \xrightarrow{f_1^*(-r-1)} \ldots \xrightarrow{f_{r-1}^*(-r-1)} F_{r-1}^*(-r-1) \longrightarrow \gamma(\mathcal{F}^{-1}(K)) \longrightarrow 0$$

dove l'ultima applicazione sulla destra è indotta da (1.6), *è una risoluzione minimale di* $\gamma(\mathcal{F}^{-1}(K))$.

Prendendo $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C$ la proposizione (1.7) ci dice che, a meno di traslazione dei gradi, $\gamma(\mathcal{O}_C)$ e $\gamma(\mathcal{O}(K))$ hanno risoluzioni minimali duali.

2. – Le risoluzioni di $\gamma(\mathcal{O}_C)$ e $\gamma(\mathcal{O}(K))$.

D'ora innanzi supporremo che π_V sia un morfismo *birazionale* di C sulla sua immagine Γ, che è una curva in $\mathbf{P}^r$ ridotta ed irriducibile di grado n. Il nostro scopo principale è di ottenere informazioni su Γ attraverso lo studio di $\gamma(\mathcal{O}_C)$ e di $\gamma(\mathcal{O}(K))$.

Denoteremo con I l'ideale di Γ, cioè il nucleo dell'omomorfismo

$$q\colon S \to \gamma(\mathcal{O}_C)$$

indotto dall'inclusione $V \subseteq H^0(D)$; $q(S) = S/I$ è l'anello delle coordinate omogenee di Γ e q è suriettivo se e solo se Γ è nonsingolare e proiettivamente normale.

Definiamo *il livello di* D come

$$d = \max\{m \in \mathbf{Z}\colon H^0(K - mD) \neq 0\}\,.$$

È sempre $d \geqslant -1$ e $d = -1$ se e solo se C ha genere zero. Un caso interessante è quello in cui

$$|dD| = |K|\,;$$

chiameremo allora Γ *sottocanonica di livello* d. In questo caso si ha

$$\gamma(\mathcal{O}(K)) = \gamma(\mathcal{O}_C)(d)\,.$$

Ad esempio sono sottocanoniche di livello zero le curve ridotte ed irriducibili di $\mathbf{P}^r$ di genere uno; le curve canoniche, di genere p in $\mathbf{P}^{p-1}$, e le loro proiezioni birazionali da punti esterni sono sottocanoniche di livello uno; le curve nonsingolari intersezioni complete di multigrado $(n_1, \ldots, n_{r-1})$ in $\mathbf{P}^r$ sono sottocanoniche di livello $d = n_1 + \ldots + n_{r-1} - r - 1$.

Consideriamo una risoluzione minimale di $\gamma(\mathcal{O}_C)$

$$0 \longrightarrow F_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} \dots \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow \gamma(\mathcal{O}_C) \longrightarrow 0 . \tag{2.1}$$

Se Γ è sottocanonica di livello d allora

$$0 \longrightarrow F_{r-1}(d) \xrightarrow{f_{r-1}(d)} \dots \xrightarrow{f_1(d)} F_0(d) \longrightarrow \gamma\big(\mathcal{O}(K)\big) \longrightarrow 0 \tag{2.2}$$

è una risoluzione minimale di $\gamma\big(\mathcal{O}(K)\big)$. Segue dalla proposizione (1.7) che esistono isomorfismi

$$F_i^*(-r-1-d) \cong F_{r-1-i} \qquad i = 0, \dots, r-1 \tag{2.3}$$

e che quindi anche

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow F_0^*(-r-1-d) &\xrightarrow{f_1^*(-r-1-d)} \dots \\ \dots &\xrightarrow{f_{r-1}^*(-r-1-d)} F_{r-1}^*(-r-1-d) \longrightarrow \gamma(\mathcal{O}_C) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

è una risoluzione minimale di $\gamma(\mathcal{O}_C)$.

Se d'altra parte esistono isomorfismi (2.3) allora Γ è sottocanonica di livello d. Infatti la proposizione (1.7) implica che

$$h_0(mD) = h^0\big(K + (m-d)D\big) \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{Z}.$$

Prendendo in particolare $m = d + 1$ si deduce

$$2p - 2 = \text{grado di } dD .$$

Prendendo $m = d$ si trova che $|dD| = |K|$.

Riassumendo abbiamo la seguente

(2.5) PROPOSIZIONE. *Sia* (2.1) *una risoluzione minimale di* $\gamma(\mathcal{O}_C)$.

(i) Γ *è nonsingolare e proiettivamente normale se e solo se* $F_0 \cong S$.

(ii) Γ *è sottocanonica di livello* d *se e solo se esistono isomorfismi* (2.3). *In tal caso* (2.2) *e* (2.4) *sono risoluzioni minimali di* $\gamma\big(\mathcal{O}(K)\big)$ *e* $\gamma(\mathcal{O}_C)$ *rispettivamente.*

OSSERVAZIONE. È immediata conseguenza della (2.5) che in $\mathbb{P}^3$ le curve intersezioni complete nonsingolari sono caratterizzate dall'essere sottocanoniche e proiettivamente normali. Per altre dimostrazioni di questo risultato classico si veda [P 2], [Gh], [S 2].

Stabiliamo ora alcune proprietà dei sistemi minimali di generatori di $\gamma(\mathcal{O}_C)$ e di $\gamma(\mathcal{O}(K))$. A tale scopo consideriamo le applicazioni naturali

$$\alpha_j\colon V\otimes H^0((j-1)D)\to H^0(jD)\,, \qquad j\geqslant 0$$

$$\mu_m\colon V\otimes H^0(K+(m-1)D)\to H^0(K+mD)\,, \qquad m\geqslant -d$$

e poniamo

$$a_j=\dim(\operatorname{coker}(\alpha_j)) \qquad t_m=\dim(\operatorname{coker}(\mu_m))\,.$$

Chiaramente ogni sistema minimale di generatori di $\gamma(\mathcal{O}_C)$ consiste di a_0 elementi di $\gamma(\mathcal{O}_C)_0$, a_1 elementi di $\gamma(\mathcal{O}_C)_1$, ecc., e definisce un omomorfismo suriettivo minimale omogeneo di grado zero

$$\bigoplus_{j\geqslant 0} S(-j)^{a_j}\to\gamma(\mathcal{O}_C)\,.$$

Si noti che $a_0=1$ e $a_1=h^0(D)-(r+1)$.

Analogamente ogni sistema minimale di generatori di $\gamma(\mathcal{O}(K))$ è costituito da t_{-d} elementi di $\gamma(\mathcal{O}(K))_{-d}$, ecc., e definisce un omomorfismo suriettivo minimale omogeneo di grado zero

$$\bigoplus_{m\geqslant -d} S(-m)^{t_m}\to\gamma(\mathcal{O}(K))\,.$$

Da quanto si è visto finora segue che in una risoluzione minimale (2.1) di $\gamma(\mathcal{O}_C)$ si ha

$$F_0\cong\bigoplus_{j\geqslant 0} S(-j)^{a_j} \qquad F_{r-1}\cong\bigoplus_{m\geqslant -d} S(m-r-1)^{t_m}\,.$$

La proposizione seguente ci dà informazioni utili per calcolare gli a_j ed i t_m. La parte (i) si trova già in [P 2], pag. 194, sotto l'ipotesi ulteriore $V=H_0(D)$; con la stessa ipotesi in più la parte (ii) della (2.6) è dimostrata in [A S 1], teorema (1.6).

(2.6) PROPOSIZIONE. (i) $a_j=0$ *per ogni* $j\geqslant d+3$. *Se* Γ *è sottocanonica si ha pure* $a_{d+2}=0$.

(ii) $t_m=0$ *per ogni* $m\geqslant 2$. *Se* $p\geqslant 1$, $t_1\leqslant h_0(D)-(r+1)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{a}$ un divisore di grado $r-1$ su C, costituito da punti distinti in posizione generale e sia $V(-\mathfrak{a})$ l'intersezione di V e $H^0(D-\mathfrak{a})$ in $H_0(D)$. È ben noto, e può dimostrarsi facilmente usando ad esempio il lemma (1.5) di [A S 1], che

$$\dim\big(V(-\mathfrak{a})\big) = 2$$

e che la g^1_{n-r+1} definita da $V(-\mathfrak{a})$ non ha punti fissi su C.

Poniamo

$$D^* = \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{a}} .$$

La successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{O}(D-\mathfrak{a}) \to \mathcal{O}(D) \to D^* \to 0$$

induce una successione esatta

$$0 \to V(-\mathfrak{a}) \to V \to H^0(D^*) \to 0 .$$

Dimostriamo (i). Per ogni $j \geqslant 1$ si ha un diagramma commutativo a righe e colonne esatte:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V(-\mathfrak{a}) \otimes H^0\big((j-1)D\big) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_j'"] & V \otimes H^0\big((j-1)D\big) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_j"] & H^0(D^*) \otimes H^0\big((j-1)D\big) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_j''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(jD-\mathfrak{a}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(jD) \arrow[r] \arrow[d] & H^0\big(D^* \otimes \mathcal{O}((j-1)D)\big) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{coker}(\alpha_j') \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\alpha_j) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\alpha_j'') \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

La seconda riga è esatta perchè

$$h^1(jD-\mathfrak{a}) = h^1(jD)$$

per la genericità di $\mathfrak{a}$. Usando il lemma di Castelnuovo [M 2] si trova

$$\operatorname{coker}(\alpha_j'') = 0 ;$$

quindi

$$\dim\big(\operatorname{coker}(\alpha_j)\big) \leqslant \dim\big(\operatorname{coker}(\alpha_j')\big) .$$

Applicando il « base point free pencil trick » [SD] troviamo

$$\dim\left(\ker(\alpha_j')\right) = h^0\left((j-2)D + \mathfrak{a}\right);$$

un facile calcolo basato sul teorema di Riemann-Roch ci dà

$$\dim\left(\operatorname{coker}(\alpha_j')\right) = h^1(jD) - 2h^1\left((j-1)D\right) + h^1\left((j-2)D + \mathfrak{a}\right)$$

che è zero se $j \geqslant d+3$ oppure se $j = d+2$ e $|dD| = |K|$.

La dimostrazione di (ii) si dà in modo simile usando il seguente diagramma commutativo a righe e colonne esatte $(m \geqslant -d+1)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & V(-\mathfrak{a}) \otimes H^0(K+(m-1)D) & \to & V \otimes H^0(K+(m-1)D) & \to & H(D^*) \otimes H^0(K+(m-1)D) & \to 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle \mu_m'} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_m} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_m''} & \\
0 \to & H^0(K+mD-\mathfrak{a}) & \to & H^0(K+mD) & \to & H^0\left(D^* \otimes \mathcal{O}(K+(m-1)D)\right) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \operatorname{coker}(\mu_m') & \to & \operatorname{coker}(\mu_m) & \to & \operatorname{coker}(\mu_m'') & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

c.v.d.

Osservazione. Se Γ è sottocanonica di livello d si ha

$$\gamma\left(\mathcal{O}(K)\right) = \gamma(\mathcal{O}_C)(d)$$

e quindi

$$t_{-d} = a_0 = 1\,, \quad t_{-d+1} = a_1, \ldots, t_0 = a_d\,, \quad t_1 = a_{d+1}\,.$$

Si osservi che il lemma (2.6) fornisce in particolare una dimostrazione diretta del fatto che $\gamma(\mathcal{O}_C)$ e $\gamma\left(\mathcal{O}(K)\right)$ sono S-moduli di tipo finito.

3. – Gli ideali di Fitting.

Denotiamo con $I\left(\gamma(\mathcal{O}_C)\right)$ e con $I\left(\operatorname{coker}(q)\right)$ gli o-esimi ideali di Fitting [M R] di $\gamma(\mathcal{O}_C)$ e del conucleo dell'omomorfismo

$$q\colon S \to \gamma(\mathcal{O}_C)\,,$$

convenendo di porre

$$I(\operatorname{coker}(q)) = \mathfrak{m} = \text{l'ideale omogeneo massimale di } S,$$

nel caso in cui q sia suriettivo (cioè Γ nonsingolare e proiettivamente normale). Più esplicitamente consideriamo una risoluzione minimale (2.1) di $\gamma(\mathcal{O}_C)$ e scegliamo basi in F_0 ed F_1. Rispetto ad esse l'omomorfismo f_1 è rappresentato da una matrice A costituita da $a \cdot b$ elementi omogenei di S, dove

$$a = \text{rango di } F_0 = a_0 + \ldots + a_{d+2}$$

e

$$b = \text{rango di } F_1 .$$

La base $e_1, \ldots, e_a$ di F_0 consiste di un elemento di grado zero, e supponiamo che sia e_1, e di $a-1$ elementi di grado positivo. Scriviamo $\bar{F}_0 = F_0/e_1 S$ ed

$$A = \begin{pmatrix} P \\ \hline \bar{A} \end{pmatrix}$$

dove P è la prima riga di A ed $\bar{A}$ è una matrice $(a-1)\times b$ che rappresenta l'omomorfismo

$$\bar{f}_1 \colon F_1 \to F_0 \to \bar{F}_0$$

rispetto alla base $\bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_a$ di $\bar{F}_0$ ($\bar{e}_i = e_i \bmod e_1 S$); $\bar{A}$ non è definita se $a = 1$. Denotiamo con $I(A)$ ed $I(\bar{A})$ gli ideali omogenei di S generati dai determinanti dei minori di ordine massimo di A ed $\bar{A}$ rispettivamente. Allora

$$I(\gamma(\mathcal{O}_C)) = I(A)$$

e, se $a \geqslant 2$

$$I(\operatorname{coker}(q)) = I(\bar{A}) .$$

Si mostra facilmente [MR] che lo 0-esimo ideale di Fitting di un S-modulo di tipo finito M ed il suo ideale annullatore $\operatorname{Ann}(M)$ hanno lo stesso radicale. Da ciò segue che ($\operatorname{Supp}(-)$ denotando il supporto di $-$)

$$\text{(3.1)} \quad \operatorname{Supp}\Big(\operatorname{Proj}\big(S/I(\gamma(\mathcal{O}_C))\big)\Big) = \operatorname{Supp}\big(\gamma(\mathcal{O}_C)^{\sim}\big) = \operatorname{Supp}(\pi_{V*}\mathcal{O}_C) = \Gamma$$

e che

$$\text{(3.2)} \quad \operatorname{Supp}\Big(\operatorname{Proj}\big(S/I(\operatorname{coker}(q))\big)\Big) = \operatorname{Supp}\big(\operatorname{coker}(q)^{\sim}\big) =$$

$$= \operatorname{Supp}(\pi_{V*}\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_\Gamma) = \{\text{punti singolari di } \Gamma\} .$$

È evidente che $I(\gamma(\mathcal{O}_C)) = I$ se Γ è nonsingolare e proiettivamente normale. È pure vero, anche se non così evidente, che $I(\gamma(\mathcal{O}_C)) = I$ se Γ è una curva piana; in questo caso $I(\operatorname{coker}(q))$ è l'ideale delle curve aggiunte a Γ (Cfr. [A S 2] nel caso in cui la g_n^2 è completa).

In generale poichè

$$\operatorname{Ann}(\gamma(\mathcal{O}_C)) = I = \sqrt{I}$$

si ha

$$I(\gamma(\mathcal{O}_C)) \subseteq I$$

e l'inclusione può essere stretta anche quando Γ è nonsingolare (si veda l'osservazione (5.7)). Si ha tuttavia la seguente

(3.3) PROPOSIZIONE. *Se Γ è nonsingolare*

$$\operatorname{Proj}\big(S/I(\gamma(\mathcal{O}_C))\big) = \Gamma\,.$$

DIMOSTRAZIONE. L'ipotesi di nonsingolarità di Γ significa che

$$I(\operatorname{coker}(q)) \supseteq \mathfrak{m}^h \quad \text{per qualche } h > 0, \tag{3.4}$$

mentre dal lemma (2.6) di [M R] applicato alla successione esatta

$$0 \to S/I \to \gamma(\mathcal{O}_C) \to \operatorname{coker}(q) \to 0$$

segue che

$$I(\gamma(\mathcal{O}_C)) \supseteq I \cdot I(\operatorname{coker}(q)) \tag{3.5}$$

in quanto I è lo 0-esimo ideale di Fitting di S/I. La (3.4) e la (3.5) danno insieme

$$I(\gamma(\mathcal{O}_C)) \supseteq \mathfrak{m}^h \cdot I \quad \text{per qualche } h > 0$$

che equivale all'asserto. c.v.d.

4. – Il caso delle curve di $\mathbf{P}^3$.

In questo paragrafo supporremo che Γ sia una curva di $\mathbf{P}^3(\dim(V) = 4)$. Considereremo, oltre all'ideale $I(\gamma(\mathcal{O}_C))$, anche $I\big(\gamma(\mathcal{O}(K))\big)$, lo 0-esimo ideale di Fitting di $\gamma(\mathcal{O}(K))$. Sia

$$0 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow \gamma(\mathcal{O}_C) \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

una risoluzione minimale di $\gamma(\mathcal{O}_C)$ e scegliamo delle basi per gli S-moduli liberi F_0, F_1, F_2; rispetto ad esse gli omomorfismi f_1 ed f_2 sono rappresentati da matrici A e B rispettivamente, ad elementi omogenei in S, di dimensioni $a \times b$ e $b \times t$ dove

$$a = \text{rango di } F_0$$

$$b = \text{rango di } F_1$$

$$t = \text{rango di } F_2 .$$

Per definizione

$$I(\gamma(\mathcal{O}_C)) = I(A) .$$

D'altro canto la (4.1) definisce per dualità una risoluzione minimale di $\gamma(\mathcal{O}(K))$ (prop. (1.7)):

$$0 \longrightarrow F_0^*(-4) \xrightarrow{f_1^*(-4)} F_1^*(-4) \xrightarrow{f_2^*(-4)} F_2^*(-4) \longrightarrow \gamma(\mathcal{O}(K)) \longrightarrow 0$$

e quindi

$$I\big(\gamma(\mathcal{O}(K))\big) = I(B)$$

l'ideale generato dai determinanti dei minori di ordine massimo di B.

(4.2) PROPOSIZIONE. $I(\gamma(\mathcal{O}_C)) = I\big(\gamma(\mathcal{O}(K))\big)$.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema (3.1) di [B E 1] applicato alla (4.1) implica l'esistenza di un elemento omogeneo non nullo $c \in S$ tale che, per ogni sottoinsieme $J \subset \{1, \ldots, b\}$ di a elementi, si abbia

$$\det(A_J) = \pm c \cdot \det(B^{cmJ})$$

(A_J denota il minore di A costituito dalle colonne corrispondenti a J, mentre B^{cmJ} è il minore formato dalle righe di B corrispondenti al complementare di J in $\{1, \ldots, b\}$). Poichè $I(A)$ è un ideale di altezza due c deve essere un elemento invertibile; quindi

$$I(A) = I(B) \qquad \text{c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE. Quando Γ è non singolare e proiettivamente normale ($a = 1$) B è una matrice $(t+1) \times t$ e la (4.2) ci dà

$$I = I(B) .$$

Questo è un ben noto caso particolare della (4.2) (cfr. [A], [G] e [P-S]).

Sarebbe interessante sapere se la (4.2) è valida anche per curve $\Gamma \subset \mathbf{P}^r$ quando $r > 3$.

Faremo vedere ora come è possibile determinare una risoluzione di S/I a partire da risoluzioni di $\gamma(\mathcal{O}_C)$ e di coker (q). Trattiamo l'argomento per inciso: il seguito del lavoro è indipendente dalle osservazioni che stiamo per fare.

Possiamo supporre come nel paragrafo 3 che nella base $\{e_1, \ldots, e_a\}$ scelta in F_0 il primo elemento abbia grado zero. Scriviamo la matrice A nella forma

$$A = \begin{pmatrix} P \\ \bar{A} \end{pmatrix}$$

dove P è $1 \times b$ ed $\bar{A}$ è $(a-1) \times b$. Si ha una successione esatta

$$F_1 \xrightarrow{\bar{f}_1} \bar{F}_0 \longrightarrow \operatorname{coker}(q) \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

dove $\bar{F}_0 = F_0/e_1 S$ ed $\bar{f}_1$ è rappresentato dalla matrice $\bar{A}$. Prolunghiamo la (4.3) ad una risoluzione libera di coker (q):

$$0 \longrightarrow G_4 \xrightarrow{g_4} G_3 \xrightarrow{g_3} G_2 \xrightarrow{g_2} F_1 \xrightarrow{\bar{f}_1} \bar{F}_0 \longrightarrow \operatorname{coker}(q) \longrightarrow 0 \tag{4.4}$$

in cui i g_j siano omogenei di grado zero e minimali. Consideriamo poi il diagramma commutativo seguente:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, dashed, "\hat{f}_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, equal] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & \gamma(\mathcal{O}_C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G_4 \arrow[r, "g_4"] & G_3 \arrow[r, "g_3"] & G_2 \arrow[r, "g_2"] & F_1 \arrow[r, "\bar{f}_1"] & \bar{F}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(q) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

Poichè F_2 è libero e tutti gli omomorfismi sono omogenei di grado zero esiste un omomorfismo $\hat{f}_2$ omogeneo di grado zero che mantiene commutativo il diagramma (4.5).

Denotiamo infine con

$$f: F_1 \to S$$

l'omomorfismo definito dalla matrice P, cioè tale che

$$f_1 = \begin{pmatrix} f \\ \bar{f}_1 \end{pmatrix} : F_1 \to S \oplus \bar{F}_0 = F_0 .$$

Ora possiamo enunciare la

(4.6) PROPOSIZIONE. *Con le notazioni introdotte qui sopra, la successione di omomorfismi omogenei di grado zero*

$$(4.7) \qquad 0 \longrightarrow G_4 \xrightarrow{\binom{g_4}{0}} G_3 \oplus F_2 \xrightarrow{(g_3 \hat{f}_2)} G_2 \xrightarrow{f \cdot g_2} S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0$$

è una risoluzione libera (non necessariamente minimale) di S/I.

DIMOSTRAZIONE. L'esattezza della (4.7) in G_4 è evidente. Facciamo vedere che se $(x_1, x_2) \in G_3 \oplus F_2$ e

$$g_3(x_1) + \hat{f}_2(x_2) = 0$$

allora deve essere $g_3(x_1) = 0$. Quest'asserzione è equivalente all'esattezza della (4.7) in $G_3 \oplus F_2$ a causa dell'iniettività di $\hat{f}_2$ e si verifica subito: se

$$g_3(x_1) = \hat{f}_2(-x_2) \neq 0$$

allora

$$(g_2 \circ \hat{f}_2)(-x_2) = f_2(-x_2) \neq 0$$

ed anche

$$(g_2 \circ \hat{f}_2)(-x_2) = (g_2 \circ g_3)(x_1) = 0 \,,$$

una contraddizione.

L'esattezza in G_2 si verifica con un « diagram chasing » in (4.5). Facciamo infine vedere che la (4.7) è esatta in S.

Denotiamo con ε la suriezione

$$F_0 \to \gamma(\mathcal{O}_C)$$

in (4.1). Per ogni $z \in G_2$

$$(f_1 \circ g_2)(z) = \begin{pmatrix} (f \circ g_2)(z) \\ 0 \end{pmatrix} \in S \oplus \bar{F}_0 = F_0$$

sta in $\ker(\varepsilon)$. Quindi $(f \circ g_2)(z) \in I$.

Se viceversa $w \in I$ allora

$$\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \in S \oplus \bar{F}_0 = F_0$$

sta in $\ker(\varepsilon)$, quindi esiste $y \in F_1$ tale che

$$f_1(y) = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix};$$

poichè $\bar{f}_1(y) = 0 \in \bar{F}_0$ l'esattezza della (4.4) implica l'esistenza di $z \in G_2$ tale che $g_2(z) = y$; si ha quindi $(f \circ g_2)(z) = w$. c.v.d.

OSSERVAZIONE. Un risultato molto simile a questo si trova già in [R], theorem (2.5).

5. – Curve speciali a moduli generali in $\mathbf{P}^3$.

Alla luce della discussione precedente vogliamo descrivere la struttura numerica delle risoluzioni minimali dei moduli $\gamma(\mathcal{O}_C)$ per una particolare classe di curve $\Gamma \subset \mathbf{P}^3$.

In questo paragrafo supporremo che D sia un divisore speciale di livello $d = 1$, cioè $h^0(K - D) \neq 0$ ed $h^0(K - 2D) = 0$, e che si abbia $h^0(D) = 4$, cioè che la g_n^3 segata dai piani di $\mathbf{P}^3$ sia completa. Supporremo inoltre che la condizione seguente sia verificata:

(5.1) l'applicazione $\mu_0\colon H^0(D) \otimes H^0(K - D) \to H^0(K)$ è iniettiva.

Non è difficile mostrare che la (5.1) implica $h^0(K - 2D) = 0$ e che essa è una condizione sufficiente affinchè Γ sia a moduli generali cioè affinchè sia possibile estendere

$$\pi_V\colon C \to \mathbf{P}^3$$

ad ogni piccola deformazione di C (cfr. [A-C] ed il lemma (6.4)).

Dalle ipotesi fatte su D segue che

$$\begin{aligned}
t_{-1} &= h^0(K - D) = \text{indice di specialità di } D,\\
t_0 &= p - 4t_{-1}, \qquad \text{per l'ipotesi (5.1)},\\
t_1 &= 0 \qquad\qquad\quad\ \text{per la prop. (2.6) (ii)},\\
a_0 &= 1\\
a_1 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Una risoluzione minimale di $\gamma(\mathcal{O}(K))$ ha quindi la forma

$$0 \to E_2 \to E_1 \to E_0 \xrightarrow{\eta} \gamma(\mathcal{O}(K)) \to 0 \tag{5.2}$$

dove

$$E_0 = S(1)^{t_{-1}} \oplus S^{t_0} \qquad E_2 = S(-4) \oplus S(-2)^{a_2} \oplus S(-1)^{a_3}$$

con a_2, a_3 da determinare ed

$$E_1 = \bigoplus_{j\in Z} S(j-4)^{b_j}$$

con i b_j vincolati dalla condizione

$$\sum_j b_j = t_{-1} + t_0 + a_0 + a_1 + a_2 + a_3\,. \tag{5.3}$$

Per la minimalità della (5.2) deve essere poi

$$b_j = 0 \qquad \text{se } j \geqslant 5.$$

Grazie alla (4.1) di [A-S 1] sappiamo inoltre che $\ker(\eta)$ è generato da elementi di grado $\leqslant 2$ e quindi che

$$b_j = 0 \qquad \text{se } j \leqslant 1$$

mentre

$$b_4 = 0$$

è conseguenza della condizione (5.1). E allora deve anche essere

$$a_3 = 0$$

per la minimalità della (5.2). La successione esatta delle componenti di grado uno della (5.2) porge, dopo un semplice calcolo,

$$b_3 = 3p - 6t_{-1} - n + 1 \tag{5.4}$$

e la condizione (5.3) dà

$$a_2 = 2p - 3t_{-1} - n + b_2\,. \tag{5.5}$$

Per dualità deduciamo dalla (5.2) la seguente risoluzione minimale di $\gamma(\mathcal{O}_C)$:

$$0 \to S(-5)^{t_{-1}} \oplus S(-4)^{t_0} \xrightarrow{B} S(-2)^{b_2} \oplus S(-3)^{b_3} \xrightarrow{A} S \oplus S(-2)^{a_2} \to \\ \to \gamma(\mathcal{O}_C) \to 0 \tag{5.6}$$

dove b_3 ed a_2 sono dati dalle espressioni (5.4) e (5.5) in termini di p, t_{-1}, n e b_2, e B ed A denotano le matrici che definiscono gli omomorfismi. Dalla minimalità della (5.6) segue che b_2 eguaglia il numero di quadriche linearmente indipendenti che contengono Γ, e poichè Γ ha genere maggiore di uno b_2

è non superiore ad uno. La conclusione è che

$$b_2 \begin{cases} = 0 & \text{se } \Gamma \text{ non è contenuta in alcuna quadrica} \\ = 1 & \text{se } \Gamma \text{ sta su una quadrica.} \end{cases}$$

Usando una notazione a blocchi le matrici A e B hanno la forma seguente:
Se $b_2 = 0$

$$B = (\underbrace{[2]}_{t_{-1}}\ \underbrace{[1]}_{t_0})\,b_3\,, \qquad A = \underbrace{\begin{pmatrix}[3]\\ \\ [1]\end{pmatrix}}_{b_3}\begin{matrix}\}1\\ \\ \}a_2\end{matrix}$$

se $b_2 = 1$

$$B = \begin{pmatrix}[3] & [2]\\ \underbrace{[2]}_{t_{-1}} & \underbrace{[1]}_{t_0}\end{pmatrix}\begin{matrix}\}1\\ \}b_3\end{matrix}\,, \qquad A = \begin{pmatrix}[2] & [3]\\ \underbrace{0}_{1} & \underbrace{[1]}_{b_3}\end{pmatrix}\begin{matrix}\}1\\ \}a_2\end{matrix}$$

dove $[h]$ denota un blocco di forme di grado h di dimensioni indicate di lato e sotto la matrice.

(5.7) OSSERVAZIONE. Se $a_2 > 0$ e $b_2 = 1$ certamente $I(\gamma(\mathcal{O}_C))$ è diverso da I. Infatti in questo caso Γ è contenuta in una quadrica la cui equazione non sta in $I(\gamma(\mathcal{O}_C))$.

Nella tabella seguente il lettore troverà riportati a titolo di esempio, per i valori del genere compresi tra 5 e 16, i caratteri t_{-1}, t_0, b_3, a_2 nel caso $b_2 = 0$ relativi alle serie lineari $|D|$ il cui grado n è il minimo compabile con la condizione (5.1) cioè, come si calcola subito, il minimo intero n tale che

$$n \geqslant (3/4)p + 3\,.$$

p	n	t_{-1}	t_0	a_2	b_3
5	7	1	1	0	3
6	8	1	2	1	5
7	9	1	3	2	7
8	9	2	0	1	4
9	10	2	1	2	6
10	11	2	2	3	8
11	12	2	3	4	10
12	12	3	0	3	7
13	13	3	1	4	9
14	14	3	2	5	11
15	15	3	3	6	13
16	15	4	0	5	10

Parte II

Supporremo d'ora in poi, ad eccezione che nel paragrafo 7, che il campo $\mathbf{K}$ abbia caratteristica zero.

6. – Esistenza di curve di genere 12 e ordine 12 in $\mathbf{P}^3$.

In questa seconda parte studieremo le curve di $\mathbf{P}^3$ di genere 12 e ordine 12. Un risultato generale dovuto indipendentemente a Kleiman-Laksov [K-L] e a Kempf [K 1] implica che una curva generale (nel senso dei moduli) di genere 12 può essere realizzata come una curva di $\mathbf{P}^3$ di ordine 12. Questo teorema non verrà tuttavia usato qui essendo per certi versi insufficiente agli scopi che abbiamo in vista; dimostreremo invece, usando argomenti geometrici, un risultato più preciso riguardante beninteso solo le curve che ci interessano.

Nel seguito faremo uso delle tecniche e dei risultati principali di teoria delle deformazioni rimandando alle fonti originali per le dimostrazioni. Per ogni intero positivo p denoteremo con $\mathcal{M}_p$ la varietà dei moduli delle curve di genere p (« coarse moduli scheme » cfr. [M 1]); $\mathcal{M}_p$ è uno schema quasi-proiettivo, ridotto ed irriducibile ([M 1]; per la irriducibilità si veda [E-Ch]).

Sia C una curva irriducibile nonsingolare di genere p e ordine n in $\mathbf{P}^3$; denotiamo con D il divisore di una sezione piana di C e con T_C la restrizione a C del fascio tangente T su $\mathbf{P}^3$. Supponiamo $h^0(D) = 4$.

Sia poi $\mathcal{J}_C \subset \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}$ il fascio di ideali di C ed

$$N_C = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{J}_C/\mathcal{J}_C^2, \mathcal{O}_C)$$

il fascio normale di C in $\mathbf{P}^3$. Abbiamo due ben note successioni esatte di fasci localmente liberi su C:

$$(6.1)_C \qquad 0 \to \mathcal{O}_C(-K) \to T_C \to N_C \to 0$$

dove K denota un divisore canonico su C e

$$(6.2) \qquad 0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}(D) \underset{\mathbf{K}}{\otimes} H^0(D)^* \to T_C \to 0$$

dalle quali con un facile calcolo si deduce che

$$(6.3) \qquad h^0(N_C) - h^1(N_C) = 4n .$$

(6.4) LEMMA. *Supponiamo che l'applicazione naturale*

$$\mu_0(C)\colon H^0(D)\otimes H^0(K-D)\to H^0(K)$$

sia iniettiva. Allora C appartiene ad un'unica componente irriducibile dello schema di Hilbert di $\mathbf{P}^3$ [Gr] *la quale possiede un aperto $\mathcal{U}$ con le seguenti proprietà*:

(i) *$\mathcal{U}$ è liscio di dimensione $4n$ e contiene C.*

(ii) *tutti i punti chiusi di $\mathcal{U}$ sono curve liscie irriducibili di genere p e ordine n.*

(iii) *per ogni curva $C'\in\mathcal{U}$ $\mu_0(C')$ è iniettiva.*

(iv) *il morfismo naturale*

$$\mathcal{U}\to\mathcal{M}_p$$

indotto dalla famiglia universale parametrizzata da $\mathcal{U}$ è dominante (cioè ha immagine densa in $\mathcal{M}_p$).

DIMOSTRAZIONE. Dalla (6.2) otteniamo una successione esatta

$$H^1(\mathcal{O}_C)\to H^1(D)\otimes H^0(D)^*\to H^1(T_C)\to 0$$

in cui la prima applicazione è duale di $\mu_0(C)$ per dualità di Serre. Ne deduciamo che

$$h^1(T_C)=\dim\left[\ker\left(\mu_0(C)\right)\right]=0\,.$$

Dalla $(6.1)_C$ segue allora che

$$H^1(N_C)=0\,. \tag{6.5}$$

Per le proprietà locali dello schema di Hilbert discende dalla (6.5) che C sta su una sua unica componente irriducibile H_C di cui è un punto chiuso liscio; la dimensione di H_C in C è

$$h^0(N_C)=4n$$

per la (6.3). Poichè $h^1(T_C)$ e $h^0(D)$ sono semicontinue superiormente al variare di $C'\in H_C$ esiste un aperto $\mathcal{U}$ di H_C i cui punti chiusi sono curve liscie irriducibili C' di ordine n e genere p e tali che $\mu_0(C')$ sia iniettiva; $\mathcal{U}$ è liscio perchè per ogni $C'\in\mathcal{U}$ si ha, analogamente alla (6.5),

$$H^1(N_{C'})=0\,. \tag{6.6}$$

La (iv) segue dal fatto che per ogni $C' \in \mathcal{U}$ l'applicazione tangente al morfismo

$$\mathcal{U} \to \mathcal{M}_p$$

nel punto C' è l'applicazione

$$H^0(N_{C'}) \to H^1(\mathcal{O}_{C'}(-K))$$

dedotta dalla $(6.1)_{C'}$, [K-S] e, per la (6.6), questa è suriettiva. c.v.d.

Consideriamo ora una superficie quartica F di $\mathbf{P}^3$ avente come unica singolarità un punto doppio conico O e contenente una curva irriducibile nonsingolare E di genere 1 e ordine 4, passante per O.

L'esistenza di F si può dimostrare nel modo seguente.

Siano $A_1, \dots, A_8$ punti generali in $\mathbf{P}^2$, $\mathcal{E}$ una cubica nonsingolare che li contiene e $P \in \mathcal{E}$ il nono punto base del fascio di cubiche per $A_1, \dots, A_8$.

Sia inoltre Q una conica generale passante per P, e $Q \cap \mathcal{E} = P \cup B_1 \cup \cup \dots \cup B_5$.

Denotando con h il divisore definito su $\mathcal{E}$ da una retta qualsiasi

$$|h + P| = |3h - B_1 \dots - B_5| = |4h - A_1 \dots - A_8|$$

è una g_4^3 completa che definisce un isomorfismo di $\mathcal{E}$ su una quartica non singolare di genere 1 $E \subset \mathbf{P}^3$; sia $O \in E$ l'immagine di P.

Fissato un punto $B_6 \in Q$ distinto da $P, B_1, \dots, B_5$, sia X la superficie cubica irriducibile di $\mathbf{P}^3$ immagine di $\mathbf{P}^2$ attraverso il sistema lineare delle cubiche piane per $B_1, \dots, B_6$. X contiene E e la sua sola singolarità è un punto doppio conico in O, immagine della conica Q.

Sia poi A_9 un punto generale di $\mathbf{P}^2$ ed Y la superficie quartica di $\mathbf{P}^3$ che è l'immagine di $\mathbf{P}^2$ attraverso il sistema lineare delle quartiche piane passanti semplicemente per $A_1, \dots, A_8$ e doppiamente per A_9. Il luogo singolare di Y è una retta doppia $\mathfrak{r}$, immagine della cubica piana per $A_1, \dots, A_8, A_9$. La superficie Y contiene la curva E e questa interseca $\mathfrak{r}$ nel solo punto O, e trasversalmente.

Consideriamo ora il sistema lineare $\boldsymbol{\Sigma}$ delle superfici quartiche contenenti E e singolari in O. Poichè $\boldsymbol{\Sigma}$ contiene le quartiche spezzate in due quadriche contenenti E, il luogo base di $\boldsymbol{\Sigma}$ è precisamente E. Al sistema lineare $\boldsymbol{\Sigma}$ appartengono anche le quartiche della forma $X \cup \pi$, dove π è un piano qualsiasi; quindi per il teorema di Bertini la superficie generale di $\boldsymbol{\Sigma}$ è irriducibile, ha un punto doppio conico in O e possiede al più un numero finito di punti multipli variabili su E. Ma l'esistenza di questi punti multipli variabili è esclusa dal fatto che $\boldsymbol{\Sigma}$ contiene anche la quartica Y la cui unica singolarità su E è il punto doppio biplanare O; si osservi infatti che O non possiede punti doppi infinitamente vicini lungo E, essendo la retta doppia $\mathfrak{r}$ non tangente ad E. Si conclude quindi che la più generale superficie $F \in \boldsymbol{\Sigma}$ è una quartica irriducibile contenente E, dotata di un punto doppio conico in O e di nessun'altra singolarità.

Sia $\sigma\colon S \to F$ la desingolarizzazione minimale di F, $\Gamma = \sigma^{-1}(O)$ ed H l'immagine inversa su S di una sezione piana generale di F. Sulla superficie K-3 S si ha

$$(\Gamma^2) = -2\,, \quad (H^2) = 4\,, \quad (E^2) = 0\,,$$

$$(E\cdot\Gamma) = 1, \quad (H\cdot\Gamma) = 0\,, \quad (E\cdot H) = 4\,.$$

Consideriamo il sistema lineare $|2E + \Gamma + H|$. Poichè $|2E + H|$ è privo di componenti fisse (quindi irriducibile) e

$$(\Gamma\cdot 2E + H) = 2$$

anche $|2E + \Gamma + H|$ è privo di componenti fisse, e quindi irriducibile e privo di punti base [Ma]. Sia C una curva generale di $|2E + \Gamma + H|$. Si ha:

$$(C^2) = 22\,, \quad (C\cdot H) = 12\,, \quad (C\cdot\Gamma) = 0\,;$$

ne segue che l'immagine di C in F è una *curva di* $\mathbf{P}^3$ *irriducibile nonsingolare, di genere* 12 *e ordine* 12, che denotiamo ancora C.

Inoltre si ha

$$h^1\big(S, \mathcal{O}_S(H - C)\big) = h^1\big(S, \mathcal{O}_S(-2E - \Gamma)\big) = h^1\big(S, \mathcal{O}_S(2E + \Gamma)\big) = 0$$

e quindi *la serie segata su C dai piani è completa.*

Verifichiamo ora che *le superfici quintiche segano su C una serie lineare completa,* cioè che

$$h^1\big(S, \mathcal{O}_S(5H - C)\big) = 0\,.$$

Osserviamo che

$$5H - C \sim (2H - E - \Gamma) + (2H - E)\,;$$

inoltre, poichè $(2H - E\cdot\Gamma) = -1$ e $h^0\big(S, \mathcal{O}_S(2H - E)\big) = 2$, il divisore fisso di $|2H - E|$ è della forma $h\Gamma$, $h \geqslant 1$, e $|2H - E - h\Gamma|$ è un fascio di curve ellittiche. D'altra parte

$$\big(2H - E - (h-1)\Gamma\cdot\Gamma\big) = 2h - 3\,;$$

quindi, poichè

$$\dim|2H - E - (h-1)\Gamma| = \dim|2H - E - h\Gamma|$$

dev'essere $h = 1$. Si ha perciò

$$h^1(S, \mathcal{O}_S(2H - E - \Gamma)) = 0$$

e di conseguenza

$$h^1(S, \mathcal{O}_S(2H - E)) = 0\,.$$

Sia A una curva generale di $|2H - E - \Gamma|$. Dalla successione esatta

$$0 \to \mathcal{O}_S(2H - E) \to \mathcal{O}_S(5H - C) \to \mathcal{O}_A(5H - C) \to 0$$

deduciamo che

$$h^1(S, \mathcal{O}_S(5H - C)) = 0\,.$$

In modo simile si verifica che *le superfici di tutti gli ordini maggiori di* 5 *segano su C serie lineari complete.*

Dalla successione esatta

$$0 \to \mathcal{O}_S(H - E) \to \mathcal{O}_S(4H - C) \to \mathcal{O}_A(4H - C) \to 0$$

segue inoltre che

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(4H - C)) = 0$$

e quindi che *C non è contenuta in superfici di grado minore di* 4 *ed F è l'unica quartica contenente C.*

Denotiamo con D il divisore di una sezione piana di C e con K un divisore canonico su C.

L'applicazione naturale

$$\mu_0(C)\colon H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \otimes H^0(C, \mathcal{O}_C(K - D)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(K))$$

è biettiva.

Per dimostrarlo consideriamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
H^0(S, \mathcal{O}_S(H)) \otimes H^0(S, \mathcal{O}_S(2E)) \arrow[dr, "i_1"] \arrow[dd, "\mu"'] & & H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \otimes H^0(C, \mathcal{O}_C(K - D)) \arrow[dd, "\mu_0(C)"] \\
& H^0(S, \mathcal{O}_S(H)) \otimes H^0(S, \mathcal{O}_S(2E + \Gamma)) \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[d, "\mu'"] & \\
H^0(S, \mathcal{O}_S(2E + H)) \arrow[r, "i_2"] & H^0(S, \mathcal{O}_S(2E + \Gamma + H)) \arrow[r, "p_2"] & H^0(C, \mathcal{O}_C(K))
\end{tikzcd}$$

Le applicazioni p_1 e p_2 sono definite per restrizione a C mentre i_1 è definita dall'inclusione naturale

$$j_1\colon H^0(S,\, \mathcal{O}_S(2E)) \to H^0(S,\, \mathcal{O}_S(2E+\Gamma))$$

e i_2, μ, μ' sono le applicazioni naturali. Poichè

$$h^0(S,\, \mathcal{O}_S(2E)) = 3 = h^0(S,\, \mathcal{O}_S(2E+\Gamma))$$

j_1 ed i_1 sono biettive. Anche p_1 è biettiva come segue subito dalla successione esatta

$$0 \to \mathcal{O}_S(-H) \to \mathcal{O}_S(2E+\Gamma) \to \mathcal{O}_C(K-D) \to 0\,.$$

Notiamo anche che la composizione $p_2 \circ i_2$ è biettiva perchè proviene dalla successione esatta

$$0 \to \mathcal{O}_S(-\Gamma) \to \mathcal{O}_S(2E+H) \to \mathcal{O}_C(K) \to 0$$

definita dall'isomorfismo $\mathcal{O}_C(-\Gamma) \cong \mathcal{O}_C$. Quindi $\mu_0(C)$ è biettiva se e solo se lo è μ.

Sia E' una curva del fascio $|E|$ diversa da E. Si ha il seguente diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(S,\mathcal{O}_S(H)) \otimes H^0(S,\mathcal{O}_S) \arrow[dr] \arrow[dd] & & H^0(S,\mathcal{O}_S(H)) \otimes [H^0(E,\mathcal{O}_E) \oplus H^0(E',\mathcal{O}_{E'})] \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
& & H^0(S,\, \mathcal{O}_S(H)) \otimes H^0(S,\, \mathcal{O}_S(2E)) \arrow[ur] \arrow[dd, "\mu"] & & \\
0 \arrow[r] & H^0(S,\, \mathcal{O}_S(H)) \arrow[dr] & & H^0(E,\, \mathcal{O}_E(H)) \oplus H^0(E',\, \mathcal{O}_{E'}(H)) \arrow[r] & 0 \\
& & H^0(S,\, \mathcal{O}_S(2E+H)) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Le due frecce verticali alle estremità sono biettive e quindi μ è biettiva. Riassumendo possiamo enunciare la seguente

(6.7) PROPOSIZIONE. *Esiste una curva irriducibile non singolare C in $\mathbf{P}^3$, di ordine* 12 *e genere* 12, *che ha le seguenti proprietà:*

(i) *C è contenuta in una superficie quartica la cui unica singolarità è un punto doppio conico, ed in nessuna altra superficie di grado $\leqslant 4$;*

(ii) *le superfici di grado m segano su C una serie lineare completa se $m = 1$ oppure $m \geqslant 5$;*

(iii) *l'applicazione*

$$\mu_0(C)\colon H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \otimes H^0(C, \mathcal{O}_C(K - D)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(K))$$

è biettiva.

Il corollario seguente è una facile conseguenza della proposizione (6.7) e verrà applicato nel paragrafo 8.

(6.8) COROLLARIO. *Esiste un aperto $\mathcal{V}$ di una componente irriducibile dello schema di Hilbert di $\mathbf{P}^3$ con le seguenti proprietà:*

(i) *$\mathcal{V}$ è liscio di dimensione* 48;

(ii) *ogni punto chiuso $C' \in \mathcal{V}$ è una curva irriducibile non singolare di ordine* 12 *e genere* 12, *non contenuta in superfici di grado minore di* 5, *e le superfici di grado m segano su C' una serie lineare completa se $m = 1$ oppure $m \geqslant 5$;*

(iii) *per ogni curva $C' \in \mathcal{V}$ l'applicazione $\mu_0(C')$ è iniettiva;*

(iv) *il morfismo*

$$\mathcal{V} \to \mathcal{M}_{12}$$

indotto dalla famiglia universale parametrizzata da $\mathcal{V}$ è dominante.

DIMOSTRAZIONE DEL COROLLARIO. Sia C la curva descritta dalla proposizione (6.7) ed $\mathcal{U}$ l'aperto dello schema di Hilbert contenente C la cui esistenza è data dal lemma (6.4). Denotato con W l'aperto dello spazio proiettivo $\mathbf{P}\big(H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}(4))\big)$ che corrisponde alle quartiche con al più un punto doppio conico come singolarità, sia $J \subset \mathcal{U} \times W$ la corrispondenza di incidenza i cui punti chiusi sono le coppie (C', F) tali che $C' \subset F$; siano

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathcal{U} & & W \end{tikzcd}$$

le proiezioni. Poichè la quartica generale in W contiene solo curve intersezioni complete [N] [F] e poichè nessuna $C' \in \mathcal{U}$ lo è, si ha

$$\dim\big(p_2(J)\big) \leqslant \dim W - 1 = 33\ .$$

D'altro canto le fibre non vuote di p_2 hanno dimensione 12 e perciò

$$\dim\big(p_1(J)\big) \leqslant 45 \, .$$

Quindi, poichè $\dim \mathcal{U} = 48$, la curva generale C' in $\mathcal{U}$ non sta in superfici di grado 4; tenuto poi conto della semicontinuità superiore di $h^0(\mathbf{P}^3, \mathfrak{J}_{C'}(m))$, C' non sta neppure in superfici di grado minore di 4. Si osservi infine che per ogni $m \geqslant 1$ la deficienza $\delta_m(C')$ della serie lineare segata sulla curva C' dalle superfici di grado m è semicontinua superiormente al variare di C' in $\mathcal{U}$, essendo

$$\delta_m(C') = h_0(\mathbf{P}^3, \mathfrak{J}_{C'}(m)) + h^0(C', \mathcal{O}_{C'}(m)) - \binom{m+3}{3} .$$

Ne deduciamo che se C' è generale

$$\delta_m(C') = 0 \qquad \text{se } m = 1 \text{ oppure } m \geqslant 5,$$

essendo ciò vero per C. Quindi le (i), ..., (iv) sono soddisfatte su un aperto $\mathcal{V}$ di $\mathcal{U}$. c.v.d.

7. – Le varietà dei complessi di lunghezza due.

In questo paragrafo prenderemo in esame una classe di varietà di cui dimostreremo alcune semplici proprietà; queste sono le varietà dei complessi di lunghezza due, già considerate più in generale in [K 3] e in [D-S] e studiate in casi particolari in [He] e [B-E 2]. La proposizione (7.2) verrà applicata nel paragrafo 8.

Siano m, n, l interi positivi tali che $n \geqslant m + l$; consideriamo lo spazio affine

$$\mathbf{A}^{mn+nl} = \operatorname{Spec}\big(\mathbf{K}[W_{ij}, X_{js}]\big)$$

dove W_{ij}, X_{js}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant l$, sono indeterminate distinte. Sia

$$\Omega = \Omega(m, n, l) \subset \mathbf{A}^{mn+nl}$$

lo schema affine il cui ideale è generato dagli ml polinomi

$$\sum_{j=1}^{n} W_{ij} X_{js} , \qquad i = 1, \dots, m, \; s = 1, \dots, l. \tag{7.1}$$

Sia inoltre $P \in \mathbf{A}^{mn} = \operatorname{Spec}\left(\mathbf{K}[W_{ij}]\right)$ e $W_{ij}(P) \in k(P)$ le sue coordinate $\left(k(P) = \right.$ $\left.= \mathcal{O}_{A,P}/\mathfrak{m}_{A,P}\right)$. Se la matrice $\left(W_{ij}(P)\right)$ ha rango massimo e si denota con

$$p_W\colon \Omega \to \mathbf{A}^{mn}$$

la proiezione, $p_W^{-1}(P)$ è uno spazio affine di dimensione $l(n-m)$ (in particolare non vuoto). Quindi c'è una componente irriducibile Ω' di Ω ed una sola tale che

$$p_W(\Omega') = \mathbf{A}^{mn}$$

e si ha

$$\dim(\Omega') = mn + l(n-m)$$

cioè

$$\operatorname{codim}(\Omega', \mathbf{A}^{mn+nl}) = ml$$

che è il numero delle equazioni che definiscono Ω. Se la matrice $\left(W_{ij}(P)\right)$ ha rango $m-\mu$ allora

$$\dim[p_W^{-1}(P)] = l(n-m+\mu)\,.$$

I punti $P \in \mathbf{A}^{mn}$ tali che $\left(W_{ij}(P)\right)$ abbia rango $m-\mu$ costituiscono un sottoinsieme localmente chiuso irriducibile K_μ di dimensione [K 2]

$$mn - (n-m+\mu)\mu\,.$$

Si ha quindi

$$\dim[p_W^{-1}(K_\mu)] = mn + l(n-m) + \mu(m+l-n-\mu) < \dim \Omega' \qquad \text{se } \mu \geqslant 1.$$

Da un classico teorema di Macaulay [M C] discende che

$$p_W^{-1}(K_\mu) \subset \Omega'$$

cioè Ω è irriducibile ed è un'intersezione completa di codimensione lm in $\mathbf{A}^{mn+nl}$. Ne segue pure che $p_W^{-1}(\bar{K}_\mu)$ è irriducibile e si ha

$$\operatorname{codim}\left(p_W^{-1}(\bar{K}_\mu), \Omega\right) = \mu(n-m+\mu-l)\,;$$

in particolare per $\mu = 1$

$$\operatorname{codim}\left(p_W^{-1}(\bar{K}_1), \Omega\right) = n-m+1-l\,.$$

Introduciamo nuove indeterminate $\dot{W}_{ij}$, $\dot{X}_{js}$. Identificando a

$$\operatorname{Spec}\left(k(P)[\dot{W}_{ij}, \dot{X}_{js}]\right)$$

lo spazio tangente di Zariski ad $\mathbb{A}^{mn+nl}$ in un punto $P \in \Omega$, le equazioni dello spazio tangente ad Ω in P sono

$$\sum_{j=1}^{n}\left(X_{js}(P)\dot{W}_{ij} + W_{ij}(P)\dot{X}_{js}\right) = 0 .$$

È facile verificare che la matrice dei coefficienti di queste equazioni ha rango massimo se una almeno delle due matrici $\left(W_{ij}(P)\right)$ $\left(X_{js}(P)\right)$ ha rango massimo. In tal caso quindi il punto $P \in \Omega$ è liscio.

Poichè i polinomi (7.1) sono omogenei nelle W_{ij} e nelle X_{js} separatamente, l'ideale da essi generato definisce un sottoschema chiuso $\mathbb{P}\left(\Omega(m, n, l)\right)$ di $\mathbb{P}^{mn-1} \times \mathbb{P}^{nl-1}$ e le considerazioni precedenti possono riassumersi nella seguente proposizione:

(7.2) Proposizione. $\mathbb{P}\left(\Omega(m, n, l)\right)$ *è uno schema ridotto ed irriducibile. Denotati con*

$$D_{m-\mu}(W) \subset \mathbb{P}^{mn-1}$$

e con

$$D_{l-\lambda}(X) \subset \mathbb{P}^{nl-1}$$

gli schemi definiti dall'annullarsi dei determinanti dei minori di ordine $m - \mu + 1$, $l - \lambda + 1$ *rispettivamente* $(1 \leqslant \mu \leqslant m,\ 1 \leqslant \lambda \leqslant l)$ *delle matrici* (W_{ij}) *e* (X_{js}), *e con*

$$p_W\colon \mathbb{P}\left(\Omega(m, n, l)\right) \to \mathbb{P}^{mn-1}, \quad p_X\colon \mathbb{P}\left(\Omega(m, n, l)\right) \to \mathbb{P}^{nl-1}$$

le proiezioni, si ha:

(i) $\mathbb{P}\left(\Omega(m, n, l)\right)$ *è liscio al di fuori di*

$$p_W^{-1}\left(D_{m-1}(W)\right) \cap p_X^{-1}\left(D_{l-1}(X)\right).$$

(ii) $p_W^{-1}\left(D_{m-\mu}(W)\right)$ *è un chiuso irriducibile di* $\mathbb{P}\left(\Omega(m, n, l)\right)$ *e*

$$\operatorname{codim}\left[p_W^{-1}\left(D_{m-\mu}(W)\right), \mathbb{P}\left(\Omega(m, n, l)\right)\right] = \mu(n - m + \mu - l)$$

(iii) $p_X^{-1}\left(D_{l-\lambda}(X)\right)$ *è un chiuso irriducibile di* $\mathbb{P}\left(\Omega(m, n, l)\right)$ *e*

$$\operatorname{codim}\left[p_X^{-1}\left(D_{l-\lambda}(X)\right), \mathbb{P}\left(\Omega(m, n, l)\right)\right] = \lambda(n - l + \lambda - m) .$$

8. – Il teorema di unirazionalità.

In questo paragrafo applicheremo i risultati della parte I alle curve di genere 12 e ordine 12 di $\mathbf{P}^3$ che appartengono all'aperto $\mathcal{U}$ dello schema di Hilbert la cui esistenza è dimostrata nel corollario (6.8).

Una curva C appartenente a $\mathcal{U}$ rientra evidentemente nella classe considerata nel paragrafo 5. I caratteri della risoluzione minimale (5.6) sono

$$t_{-1} = 3 \,, \qquad t_0 = 0 \,, \qquad a_2 = 3 \,, \qquad b_3 = 7 \,.$$

Quindi la (5.6) è in questo caso

$$0 \to S(-5)^3 \xrightarrow{B} S(-3)^7 \xrightarrow{A} S \oplus S(-2)^3 \to \gamma(\mathcal{O}_C) \to 0 \tag{8.1}$$

e le matrici sono

$$B = (B_{js})_{j=1,\dots,7;\; s=1,2,3} \,, \qquad A = \begin{pmatrix} P_j \\ A_{ij} \end{pmatrix}_{i=1,2,3;\; j=1,\dots,7}$$

dove gli A_{ij}, B_{js}, $P_j \in S$ sono omogenei di gradi rispettivamente 1, 2, 3.

Dimostreremo il seguente

(8.2) TEOREMA. *L'aperto $\mathcal{U}$ dello schema di Hilbert di $\mathbf{P}^3$ considerato nel corollario* (6.8) *è una varietà unirazionale.*

Dal teorema (8.2), grazie alla (iv) del corollario (6.8), discende il seguente

(8.3) COROLLARIO. *La varietà dei moduli delle curve di genere* 12 *è unirazionale.*

DIMOSTRAZIONE DI (8.2). Introduciamo le seguenti indeterminate:

$$X_1 \,, \quad X_2 \,, \quad X_3 \,, \quad X_4$$

$$a_{ij}^h \quad h = 1, \dots, 4;\; i = 1, 2, 3;\; j = 1, \dots, 7$$

$$b_{js}^{kl} \quad 1 \leqslant k \leqslant l \leqslant 4;\; j = 1, \dots, 7;\; s = 1, 2, 3$$

e consideriamo l'anello

$$\mathbf{K}[a, b, X] = \mathbf{K}[a_{ij}^h, b_{js}^{kl}, X_1, X_2, X_3, X_4]$$

come un'algebra graduata di polinomi nelle X_1, X_2, X_3, X_4 a coefficienti in

$$\mathbf{K}[a, b] = \mathbf{K}[a_{ij}^h, b_{js}^{kl}] \,.$$

Siano $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})_{i=1,2,3;\ j=1,\dots,7}$ e $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{js})_{j=1,\dots,7;\ s=1,2,3}$ le matrici ad elementi in $\mathbf{K}[a, b, X]$ così definite:

$$\mathcal{A}_{ij} = \sum_{h=1}^{4} a_{ij}^{h} X_h \qquad \mathcal{B}_{js} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant 4} b_{js}^{kl} X_k X_l \, .$$

Se $\zeta \in \operatorname{Spec}\big(\mathbf{K}[a, b]\big)$ denoteremo con

$$\mathcal{A}(\zeta) = \big(\mathcal{A}_{ij}(\zeta)\big)\, , \qquad \mathcal{B}(\zeta) = \big(\mathcal{B}_{js}(\zeta)\big)$$

le corrispondenti matrici a elementi in $k(\zeta)[X]$; analogamente se $\alpha \in \operatorname{Spec}\big(\mathbf{K}[a]\big)$

$$\mathcal{A}(\alpha) = \big(\mathcal{A}_{ij}(\alpha)\big)$$

denoterà la matrice ad elementi in $k(\alpha)[X]$ associata ad $\mathcal{A}$. Sia $\mathfrak{J} \subset \mathbf{K}[a, b]$ l'ideale generato dai coefficienti dei 9 elementi omogenei di grado 3 di $\mathbf{K}[a, b, X]$

$$\sum_{j=1}^{7} \mathcal{A}_{ij} \mathcal{B}_{js} \qquad i, s = 1, 2, 3.$$

Posto $R = \mathbf{K}[a, b]/\mathfrak{J}$, sia

$$\theta \colon \operatorname{Spec}(R) \to \operatorname{Spec}\big(\mathbf{K}[a]\big)$$

il morfismo di proiezione. Poichè i generatori di $\mathfrak{J}$ sono polinomi lineari omogenei nelle a e nelle b separatamente, θ è suriettivo e le sue fibre sono spazi affini. Precisamente se $\alpha \in \operatorname{Spec}\big(\mathbf{K}[a]\big)$ le equazioni della fibra $\theta^{-1}(\alpha)$ sono ottenute eguagliando a zero i coefficienti dei 9 elementi omogenei di grado 3 nelle X di $k(\alpha)[b, X]$

$$\sum_{j=1}^{7} \mathcal{A}_{ij}(\alpha)\, \mathcal{B}_{js} \qquad i, s = 1, 2, 3. \tag{8.4}$$

Si ottengono così 180 equazioni lineari omogenee nelle b a coefficienti in $k(\alpha)$; essendo

$$\dim \Big(\operatorname{Spec}\big(k(\alpha)[b]\big)\Big) = 210$$

si ha

$$\dim\big(\theta^{-1}(\alpha)\big) \geqslant 30\ . \tag{8.5}$$

Consideriamo una curva $C \in \mathfrak{V}$ e la risoluzione (8.1) di $\gamma(\mathcal{O}_C)$; identifichiamo S a $\mathbf{K}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ scegliendo una base di S_1. Ci proponiamo di calcolare $\dim[\theta^{-1}(\alpha(A))]$, dove $\alpha(A)$ è il punto chiuso di $\operatorname{Spec}(\mathbf{K}[a])$ individuato dai coefficienti delle forme lineari A_{ij} che compaiono nella matrice A; faremo vedere che

$$\dim\left(\theta^{-1}(\alpha(A))\right) = 30 . \tag{8.6}$$

Osserviamo che $\theta^{-1}(\alpha(A))$ può identificarsi con lo spazio affine delle matrici $\bar{B} = (\bar{B}_{js})_{j=1,\dots,7;\ s=1,2,3}$ a elementi forme di grado 2 nelle X a coefficienti in $\mathbf{K}$, tali che $\bar{A}\bar{B} = 0$, dove abbiamo posto

$$\bar{A} = (A_{ij})_{i=1,2,3;\ j=1,\dots,7} .$$

Con le notazioni del paragrafo 3 si ha nel nostro caso

$$F_1 = S(-3)^7 , \qquad \bar{F}_0 = S(-2)^3$$

ed $\bar{f}_1\colon F_1 \to \bar{F}_0$ è l'applicazione definita dalla matrice $\bar{A}$; quindi $\bar{B} \in \theta^{-1}(\alpha(A))$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} \bar{B}_{1s} \\ \vdots \\ \bar{B}_{7s} \end{pmatrix} \in \ker(\bar{f}_1)_5 , \qquad s = 1, 2, 3.$$

Perciò abbiamo

$$\dim\left[\theta^{-1}(\alpha(A))\right] = 3 \dim_{\mathbf{K}}[\ker(\bar{f}_1)_5] ;$$

ma

$$\dim_{\mathbf{K}}[\ker(\bar{f}_1)_5] = 10 + \dim_{\mathbf{K}}[\operatorname{coker}(\bar{f}_1)_5] = 10$$

essendo $\operatorname{coker}(\bar{f}_1)_5 = \operatorname{coker}(q)_5$ (cfr. (4.3)) e

$$\operatorname{coker}(q)_5 = 0$$

perchè le superfici quintiche segano su C una serie lineare completa.

La (8.6) resta così provata.

Denotiamo con $\zeta(A, B)$ il punto chiuso di $\operatorname{Spec}(R)$ individuato dai coefficienti delle forme A_{ij}, B_{js} che appaiono nelle matrici A e B della risoluzione (8.1).

Sia Z lo schema affine ridotto ed irriducibile il cui supporto è l'unica componente irriducibile di $\operatorname{Spec}(R)$ tale che

$$\theta(\operatorname{Supp}(Z)) = \operatorname{Spec}(\mathbf{K}[a]) .$$

Chiaramente *Z è una varietà razionale.*

La (8.5) e la (8.6) implicano che, per ogni curva $C \in \mathcal{V}$, $\zeta(A, B) \in Z$.

Sia Z' l'aperto di Z costituito dai punti ζ tali che

a) le forme $\mathcal{B}_{js}(\zeta)$ non abbiano punti di annullamento comune in $\mathbf{P}^3_{k(\zeta)}$;

b) i determinanti dei minori di ordine tre di $\mathcal{A}(\zeta)$ non abbiano punti di annullamento comune in $\mathbf{P}^3_{k(\zeta)}$.

Sia $\zeta(A, B) \in Z$ un punto corrispondente ad una curva $C \in \mathcal{V}$; poichè C è nonsingolare segue dalla (3.2) che in $\zeta(A, B)$ è soddisfatta la *b*); la *a*) è verificata perchè un punto di annullamento delle B_{js} sarebbe singolare per C, a causa della (3.3). Quindi $\zeta(A, B) \in Z'$.

Denotando con $I(\mathcal{B})$ l'ideale di $\mathbf{K}[a, b, X]$ generato dai determinanti dei minori di ordine tre della matrice $\mathcal{B}$, e con

$$\mathcal{C} = \operatorname{Proj}\big(\mathbf{K}[a, b, X]/I(\mathcal{B})\big)$$

dove, come si è già detto, $\mathbf{K}[a, b, X]$ si considera come algebra graduata nelle X a coefficienti in $\mathbf{K}[a, b]$, si ottiene un morfismo proiettivo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{Z'} \arrow[dr, "\varrho_{Z'}"'] & \subset & \mathbf{P}^3 \times Z' \arrow[dl] \\
& Z' &
\end{tikzcd}$$

per restrizione a Z' del morfismo proiettivo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "\varrho"'] & \subset & \mathbf{P}^3 \times \operatorname{Spec}\big(\mathbf{K}[a, b]\big) \arrow[dll] \\
\operatorname{Spec}\big(\mathbf{K}[a, b]\big). & &
\end{tikzcd}$$

Consideriamo un punto chiuso $\zeta \in Z'$ e lo schema $\mathbf{P}\big(\Omega(3, 7, 3)\big)$ introdotto nel paragrafo 7. Resta definito un morfismo

$$\omega_\zeta \colon \mathbf{P}^3 \to \mathbf{P}\big(\Omega(3, 7, 3)\big)$$

ponendo

$$\omega_\zeta(P) = \big(\mathcal{A}_{ij}(\zeta, P), \mathcal{B}_{js}(\zeta, P)\big) \in \mathbf{P}^{20} \times \mathbf{P}^{20}.$$

Osserviamo che a causa della condizione *b*) si ha

$$p_W\big(\omega_\zeta(\mathbf{P}^3)\big) \cap D_2(W) = \emptyset$$

e quindi, tenuto conto della (i) della proposizione (7.2), $\omega_\zeta(\mathbf{P}^3)$ non interseca il luogo singolare di $\mathbf{P}(\Omega(3,7,3))$. Ma allora, poichè

$$\varrho_{Z'}^{-1}(\zeta) \simeq \mathbf{P}^3 \underset{\mathbf{P}(\Omega(3,7,3))}{\times} p_X^{-1}(D_2(X))$$

si ha $\varrho_{Z'}^{-1}(\zeta) = \emptyset$ oppure

(8.7) $$\operatorname{codim}\left(\varrho_{Z'}^{-1}(\zeta), \mathbf{P}^3\right) \leqslant 2 ;$$

infatti, per la (iii) della proposizione (7.2),

$$\operatorname{codim}\Big(p_X^{-1}(D_2(X)), \mathbf{P}(\Omega(3,7,3))\Big) = 2 .$$

Se $\zeta = \zeta(A, B)$ per qualche curva $C \in \mathfrak{V}$, nella (8.7) vale l'uguaglianza perchè si ha $\varrho_{Z'}^{-1}(\zeta) = C$ per la proposizione (3.3). C'è quindi un aperto $Z'' \subset Z'$ contenente tutti i punti del tipo $\zeta(A, B)$ e tale che per ogni $\zeta \in Z''$ valga l'uguaglianza in (8.7). Sia

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{Z''} \subset \mathbf{P}^3 \times Z'' \arrow[d, "\varrho_{Z''}"'] \arrow[d, dashed] \\ Z'' \end{tikzcd}$$

la restrizione di $\varrho_{Z'}$ a Z''. Si osservi che Spec (R) è liscio in tutti i punti ζ tali che

$$\dim\Big(\theta^{-1}(\theta(\zeta))\Big) = 30$$

perchè costituiscono un aperto che è uno spazio affine su Spec $(\mathbf{K}[a])$; in particolare Z'' è liscio nei punti $\zeta(A, B)$. Dalla proposizione (2.3), pag. 32, di [SGA 1] segue allora che $\varrho_{Z''}$ è un morfismo liscio in tutti i punti di $\varrho_{Z''}^{-1}(\zeta(A, B))$ per ogni curva $C \in \mathfrak{V}$. Dunque c'è un aperto $Z''' \subset Z''$ tale che la restrizione

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{Z'''} \subset \mathbf{P}^3 \times Z''' \arrow[d, "\varrho_{Z'''}"'] \\ Z''' \end{tikzcd}$$

sia un morfismo liscio le cui fibre sui punti chiusi sono tutte e sole le curve di $\mathfrak{V}$. Per la proprietà universale dello schema di Hilbert esiste un morfismo suriettivo $Z''' \to \mathfrak{V}$. Ciò prova che $\mathfrak{V}$ è una varietà unirazionale perchè Z''' è razionale. c.v.d.

Osservazioni. La dimostrazione del teorema (8.2) si può estendere senza difficoltà al caso delle curve di $\mathbf{P}^3$ di ordine minimo di genere $p \leqslant 10$ (cfr. la tabella del paragrafo 5); per $p = 8$ una traccia della dimostrazione è data in [P 1] paragrafo 1.

Osservando la tabella del paragrafo 5 ci si può convincere facilmente del perchè non sia possibile l'estensione ad altri valori di p: un calcolo di costanti mostra infatti che, per $p = 11$ o $p \geqslant 13$, la matrice $\bar{A}$ non può a priori essere scelta genericamente, come nei casi $p = 12$ e $p \leqslant 10$, ma deve soddisfare a delle condizioni. Lo studio di queste condizioni potrebbe presentare notevoli difficoltà. Lo stesso ostacolo si incontra nello studio di altre famiglie di curve a moduli generali (non di ordine minimo).

Questa situazione presenta molte analogie con quella che si ha nello studio delle famiglie di curve piane dotate di soli punti doppi ordinari, dove il ruolo della matrice $\bar{A}$ è svolto dalla configurazione dei nodi (cfr. [Se] e [A S 2]).

BIBLIOGRAFIA

[A] R. Apèry, *Sur les courbes de première espèce de l'espace à trois dimensions*, C. R. Acad. Sci., **220** (1945), pp. 271-272.

[A-C] E. Arbarello - M. Cornalba, *Su una congettura di Petri*, Comment. Math. Helv., **56** (1981), pp. 1-38.

[A-S 1] E. Arbarello - E. Sernesi, *Petri's approach to the study of the ideal associated to a special divisor*, Invent. Math., **49** (1978), pp. 99-119.

[A-S 2] E. Arbarello - E. Sernesi, *The equation of a plane curve*, Duke Math. J., **46** (1979), pp. 469-485.

[A-B] M. Auslander - D. A. Buchsbaum, *Codimension and multiplicity*, Ann. of Math., **68** (1958), pp. 625-657.

[B-E 1] D. A. Buchsbaum - D. Eisenbud, *Some structure theorems for finite free resolutions*, Advances in Math., **12** (1974), pp. 84-139.

[B-E 2] D. A. Buchsbaum - D. Eisenbud, *Generic free resolutions and a family of generically perfect ideals*, Advances in Math., **18** (1975), pp. 245-301.

[D-S] C. De Concini - E. Strickland, *On the variety of complexes*, Advances in Math., **41** (1981), pp. 57-77.

[E-Ch] F. Enriques - O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. III, Bologna, Zanichelli, 1924.

[F] A. Franchetta, *Sulle curve appartenenti a una superficie generale d'ordine $n \geqslant 4$ dell'S_3*, Rend. Acc. Naz. Lincei (8), **3** (1947), pp. 71-78.

[G] F. Gaeta, *Sulle curve sghembe algebriche di residuale finito*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **27** (1948), pp. 177-241.

[Gh] G. Gherardelli, *Sulle curve sghembe algebriche intersezioni complete di due superfici*, Atti Accad. d'Italia, **4** (1943), pp. 128-132.

[Gr] A. Grothendieck, *Les schemas de Hilbert*, Sem. Bourbaki, **221** (1960-61).

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, New York, Heidelberg, Berlin: Springer (1977).

[He] J. HERZOG, *Certain complexes associated with a sequence and a matrix*, Manuscripta Math., **12** (1974), pp. 217-248.

[I] J. IGUSA, *Arithmetic varieties of moduli of genus two*, Ann. of Math., **72** (1960), pp. 612-649.

[K 1] G. KEMPF, *Schubert methods with an application to algebraic curves*, Publications of Mathematisch Centrum: Amsterdam (1971).

[K 2] G. KEMPF, *On the geometry of a theorem of Riemann*, Ann. of Math., **98** (1973), pp. 178-185.

[K 3] G. KEMPF, *Images of homogeneous vector bundles and varieties of complexes*, Bull. Amer. Math. Soc., **81** (1975), pp. 900-901.

[K-L] S. L. KLEIMAN - D. LAKSOV, *On the existence of special divisors*, Amer. J. Math., **94** (1972), pp. 431-436.

[K-S] K. KODAIRA - D. C. SPENCER, *On deformations of complex analytic structures I, II*, Ann. of Math., **67** (1958), pp. 328-466.

[MC] F. S. MACAULAY, *The algebraic theory of modular systems*, Cambridge Tracts, vol. 19 (1916).

[MR] R. E. MAC RAE, *On an application of the Fitting invariants*, J. Algebra, **2** (1965), pp. 153-169.

[Ma] A. L. MAYER, *Families of K-3 surfaces*, Nagoya Math. J., **48** (1972), pp. 1-17.

[M 1] D. MUMFORD, *Geometric Invariant Theory*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1965).

[M 2] D. MUMFORD, *Varieties defined by quadratic equations*, Corso C.I.M.E., 1969 (Questions on algebraic varieties), Roma, Cremonese (1970).

[N] M. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven*, J. Reine Angew. Math., **93** (1882), pp. 271-310.

[P-S] C. PESKINE - L. SZPIRO, *Liaison des variétés algebriques I*, Invent. Math., **26** (1974), pp. 271-302.

[P 1] K. PETRI, *Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veranderlichen*, Math. Ann., **88** (1922), pp. 242-289.

[P 2] K. PETRI, *Über Spezialkurven I*, Math. Ann., **93** (1924), pp. 182-209.

[R] A. P. RAO, *Liaison among curves in* $\mathbf{P}^3$, Invent. Math., **50** (1979), pp. 205-217.

[SD] B. SAINT DONAT, *On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve*, Math. Ann., **206** (1973), pp. 157-175.

[Se] B. SEGRE, *Sui moduli delle curve algebriche*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **7** (1930), pp. 71-102.

[S 1] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques coherents*, Ann. of Math., **61** (1955), pp. 197-278.

[S 2] J. P. SERRE, *Sur les modules projectifs*, Seminaire Dubreil (1960).

[S 3] J. P. SERRE, *Algebre locale. Multiplicites*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1965).

[Sev] F. SEVERI, *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema di esistenza di Riemann*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, (5), **24** (1915), pp. 877-888.

[SGA 1] *Revetements Etales et Groupe Fondamental* (*SGA* 1, 1960-61), Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1971).

Istituto Matematico « Guido Castelnuovo »
Università
00100 Roma