ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

HASSAN BOUALEM
ROBERT BROUZET
JOSEPH RAKOTONDRALAMBO
FRANCISCO-JAVIER TURIEL

Fibrations en tores isotropes et lagrangiens

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 29, nº 2 (2000), p. 483-501

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_2000_4_29_2_483_0>

Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)
Vol. XXIX (2000), pp. 483-501

Fibrations en tores isotropes et lagrangiens

HASSAN BOUALEM - ROBERT BROUZET -
JOSEPH RAKOTONDRALAMBO - FRANCISCO-JAVIER TURIEL

Abstract. We study Lagrangian fibrations whose total space is endowed with a compatible pseudometric. Under suitable geometric conditions we solve the classification problem. We end with some examples of such structures.

Mathematics Subject Classification (1991): 53C15 (primary), 58F05, 58F07 (secondary).

Sur une variété réelle M, de dimension $2n$, une pseudo-métrique g non dégénérée et une forme symplectique ω sont dites compatibles, si le champ d'endomorphismes $\mathcal{J}$ défini par

$$\forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \qquad g(X, Y) = \omega(\mathcal{J}X, Y)$$

(où $\mathcal{X}(M)$ désigne l'ensemble des champs de vecteurs sur M) est à torsion de Nijenhuis nulle. Cette notion très naturelle de compatibilité est équivalente au fait que $\mathcal{J}$ est parallèle pour la connexion de Levi-Civita ∇^g associée à g [2].

Deux cas particuliers de cette situation ont été assez bien étudiés, d'une part les variétés kählériennes et pseudo-kählériennes ($\mathcal{J}^2 = -I$), d'autre part les bifeuilletages lagrangiens qui correspondent au cas $\mathcal{J}^2 = I$ (feuilletages associés à $\mathrm{Ker}(\mathcal{J} \pm I)$). Dans l'un et l'autre cas, il est bien connu que la production d'exemples sur des variétés compactes est difficile. Nous adoptons ici un point de vue valable pour ces deux types de géométries à la fois, qui nous permet de construire et de classifier une large classe de telles structures (M, ω, g), même lorsque $\mathcal{J}^2 \neq \pm I$. Nous parvenons à ce but en utilisant un résultat déjà classique dans le domaine des systèmes intégrables : le théorème d'Arnold-Liouville [1].

Plus précisément, nous considérons une fibration $\pi : M \longrightarrow B$ dont les fibres sont compactes, connexes, ω-lagrangiennes (donc des tores $\mathbb{T}^n$), g-isotropes

Pervenuto alla Redazione il 30 novembre 1999 e in forma definitiva il 27 marzo 2000.

et supposons ∇^g projetable. Ces conditions font apparaître sur la base B un certain nombre d'invariants qui permettent de reconstruire les couples (ω, g) et de les classifier. Pour finir, nous donnons quelques exemples avec $\dim B = 2$ (voir [3] pour des exemples avec $\dim B \geq 3$), et parmi eux, comme curiosité, un exemple explicite de variété compacte pseudo-kählérienne dont le premier nombre de Betti est impair.

Ce travail est donc situé à mi-chemin entre la théorie des systèmes intégrables et le monde des structures "proches" du pseudo-kählérien. Ceci laisse espérer de pouvoir jeter un pont entre ces deux sujets.

1. – Fibrations de type I-L

On appellera *fibration lagrangienne* (suivant Duistermaat [4]) la donnée d'une fibration $\pi : M \longrightarrow B$, où B est de dimension n, dont les fibres sont des sous-variétés compactes, connexes et ω-lagrangiennes (c'est à dire la restriction de ω à chaque fibre est nulle).

Grâce au théorème d'Arnold-Liouville [1], on sait que les fibres sont alors des tores $\mathbb{T}^n$ (que l'on regardera ici comme le quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$), que chacune d'elles possède un voisinage Ω symplectomorphe à une variété de type $D \times \mathbb{T}^n$ où D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, munie de la forme symplectique standard $dq_1 \wedge d\theta_1 + \cdots + dq_n \wedge d\theta_n$ et que la base hérite d'une structure affine entière. Un tel symplectomorphisme fournit une carte sur Ω à valeurs dans $D \times \mathbb{T}^n$. Les coordonnées $(q_1, \cdots, q_n, \theta_1, \cdots, \theta_n) \in D \times \mathbb{T}^n$ associées à cette carte sont appelées *coordonnées action-angle* (CAA en abrégé). Ce sont les projections des coordonnées action $(q_1, \ldots, q_n)$ qui fournissent la structure affine sur B.

On dira qu'une fibration est de type I-L (pour Isotrope et Lagrangienne), si en outre les fibres sont g−isotropes et si la connexion de Levi-Civita ∇^g de g est projetable.

On rappelle que la condition de projetabilité portant sur ∇^g signifie qu'il existe sur la base B une connexion $\overline{\nabla}$ telle que si X et Y sont des relevés de champs $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sur B alors $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \pi_*(\nabla_X Y)$. Cette condition équivaut à dire que pour tout couple (X, Y) de champs feuilletés, $\nabla^g{}_X Y$ est feuilleté, le feuilletage étant celui défini par les fibres (N.B. un champ X est dit feuilleté si pour tout champ Y tangent au feuilletage, on a $[X, Y]$ tangent au feuilletage). En particulier, pour tout système de coordonnées action-angle $(q_1, \cdots, q_n, \theta_1, \cdots, \theta_n)$, on a $\nabla^g_{\frac{\partial}{\partial\theta_i}} \frac{\partial}{\partial\theta_j}$ et $\nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \frac{\partial}{\partial\theta_j}$ qui sont tangents aux fibres. Le fibré vertical est donc parallèle relativement à ∇^g.

PROPOSITION 1. *Soit $\pi : (M, \omega, g) \longrightarrow B$ une fibration de type I-L. Alors dans un système de coordonnées action-angle $(q_1, \cdots, q_n, \theta_1, \cdots, \theta_n)$ (et donc dans tous) $\mathcal{J}$, g et ∇^g s'écrivent sous la forme :*

a)

$$\mathcal{J} = \sum_{i,j} \left(a_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_j - a_{ji}(q) \frac{\partial}{\partial \theta_i} \otimes d\theta_j \right) + \sum_{i,j} b_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial \theta_i} \otimes dq_j \text{ avec } b_{ij} = b_{ji} \tag{1}$$

En particulier $\mathcal{J}$ se projette sur un $(1,1)$-tenseur qu'on note J dont la matrice est $A = (a_{ij})$ dans les coordonnées $(q_1, \dots, q_n)$; cette matrice est clairement inversible.

b)

$$g = \sum_{i,j} a_{ji}(q)(dq_i \otimes d\theta_j + d\theta_j \otimes dq_i) - \sum_{i,j} b_{ij}(q) dq_i \otimes dq_j \text{ avec } b_{ij} = b_{ji}. \tag{2}$$

c)

$$\begin{cases} \nabla^g_{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} \dfrac{\partial}{\partial \theta_j} = 0 \\ \nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \dfrac{\partial}{\partial \theta_j} = -\sum_k \overline{\Gamma}^j_{ik}(q) \dfrac{\partial}{\partial \theta_k} \\ \nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \dfrac{\partial}{\partial q_j} = \sum_k \overline{\Gamma}^k_{ij}(q) \dfrac{\partial}{\partial q_k} + \sum_k \Gamma^k_{ij}(q) \dfrac{\partial}{\partial \theta_k}. \end{cases} \tag{3}$$

En particulier, la connexion projetée $\overline{\nabla}$ s'écrit dans les coordonnées action $(q_1, \dots, q_n)$:

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \frac{\partial}{\partial q_j} = \sum_k \overline{\Gamma}^k_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial q_k}. \tag{4}$$

PREUVE. Le fait pour ω d'être ∇^g-parallèle donne la première des conditions de (3).

D'autre part, écrivons a priori avec des coefficients indéterminés γ^k_{ij}, Γ^k_{ij}, $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ la connexion ∇^g :

$$\begin{cases} \nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \dfrac{\partial}{\partial \theta_j} = \sum_k \gamma^k_{ij}(q, \theta) \dfrac{\partial}{\partial \theta_k} \\ \nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \dfrac{\partial}{\partial q_j} = \sum_k \overline{\Gamma}^k_{ij}(q) \dfrac{\partial}{\partial q_k} + \sum_k \Gamma^k_{ij}(q, \theta) \dfrac{\partial}{\partial \theta_k} \end{cases}$$

Comme les fibres sont supposées g-isotropes, $\mathcal{J}$ les respecte et donc puisqu'en outre il est ω-antisymétrique, il s'écrit en coordonnées sous la forme donnée par (1) ; cependant, on ne sait pas a priori que les coefficients ne dépendent que des actions.

Puisque $\mathcal{J}$ est ∇^g-parallèle, on a compte tenu de la première relation de (3) :

$$\nabla^g{}_{\frac{\partial}{\partial\theta_i}}\left(\mathcal{J}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right) = \mathcal{J}\nabla^g{}_{\frac{\partial}{\partial\theta_i}}\frac{\partial}{\partial\theta_j} = 0$$

d'où l'on déduit que pour tous i, j, k, on a : $\dfrac{\partial a_{jk}}{\partial\theta_i} = 0$. Ainsi les a_{ij} ne dépendent que des actions.

Puisque ω est ∇^g-parallèle, on a :

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\omega\left(\frac{\partial}{\partial q_j}, \frac{\partial}{\partial\theta_k}\right) = \omega\left(\nabla^g{}_{\frac{\partial}{\partial q_i}}\frac{\partial}{\partial q_j}, \frac{\partial}{\partial\theta_k}\right) + \omega\left(\frac{\partial}{\partial q_j}, \nabla^g{}_{\frac{\partial}{\partial q_i}}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\right)$$

d'où l'on déduit que $\overline{\Gamma}_{ij}^k + \gamma_{ik}^j = 0$. Comme les $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ ne dépendent que des actions, les γ_{ij}^k aussi.

Pour terminer la preuve, il reste à voir que les Γ_{ij}^k et les b_{ij} ne dépendent que des actions. Or, à nouveau le parallélisme de $\mathcal{J}$ donne :

$$\nabla^g{}_{\frac{\partial}{\partial\theta_i}}\left(\mathcal{J}\frac{\partial}{\partial q_j}\right) = \mathcal{J}\nabla^g{}_{\frac{\partial}{\partial\theta_i}}\frac{\partial}{\partial q_j}$$

d'où l'on déduit compte tenu des renseignements déjà obtenus que pour tous i, j, k, $\dfrac{\partial b_{kj}}{\partial\theta_i}$ est fonction seulement des actions. Par suite, les coefficients b_{ij} sont des fonctions affines des angles à coefficients fonctions des q_i. Mais, à q fixé, les b_{ij} sont des fonctions sur le tore $\mathbb{T}^n$ et donc sont constantes si elles sont affines. Ainsi les b_{ij} ne dépendent que des actions. En particulier la métrique a tous ses coefficients qui ne dépendent que des actions et donc les symboles de Christoffel aussi. □

Il est intéressant d'étudier le rapport entre la connexion affine ∇ sur la variété affine B et la connexion projetée $\overline{\nabla}$.

Pour cela posons $D = \overline{\nabla} - \nabla$. Puisque $\overline{\nabla}$ et ∇ sont sans torsion, D est un 2-tenseur symétrique.

On a la proposition fondamentale suivante :

PROPOSITION 2.

a) *J est $\overline{\nabla}$-parallèle, donc à torsion de Nijenhuis nulle.*

b) *J est D-antisymétrique* :

$$D(JX, Y) + D(X, JY) = 0 \; pour\ tous \;\; X,\ Y \in \mathcal{X}(B).$$

c) *J est ∇J-antisymétrique* :

$$\nabla J(JX, Y) + \nabla J(X, JY) = 0 \textit{ pour tous } X,\ Y \in \mathcal{X}(B).$$

d) $\overline{\nabla} = \nabla + J^{-1}$ (partie symétrique de ∇J).

e) *Les symboles de Christoffel Γ^k_{ij} définis par* (3) *sont invariants par permutation des trois indices.*

PREUVE.

a) En effet, il suffit de remarquer que $\overline{\nabla} J$ est la projection de $\nabla^g \mathcal{J}$ et que la torsion de $\overline{\nabla}$ est nulle.

b) Les coefficients de g et les symboles de Christoffel de ∇^g sont ceux des formules (2) et (3) de la proposition 1 ; $J = \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dfrac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_j$ et les symboles de Christoffel de $\overline{\nabla}$ sont les $\overline{\Gamma}^l_{ik}$ donnés par (4). Un calcul élémentaire montre que

$$D\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, J\frac{\partial}{\partial q_j}\right) + D\left(J\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} (a_{kj}\overline{\Gamma}^l_{ik} + a_{ki}\overline{\Gamma}^l_{kj})\frac{\partial}{\partial q_l}\,.$$

Il s'agit donc de voir que pour tout $l \in \{1, \cdots, n\}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\overline{\Gamma}^l_{ik} + a_{ki}\overline{\Gamma}^l_{kj} = 0\,. \tag{5}$$

Or,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial \theta_l} g\left(\frac{\partial}{\partial q_j}, \frac{\partial}{\partial q_i}\right) &= g\left(\nabla^g_{\frac{\partial}{\partial \theta_l}} \frac{\partial}{\partial q_j}, \frac{\partial}{\partial q_i}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial q_j}, \nabla^g_{\frac{\partial}{\partial \theta_l}} \frac{\partial}{\partial q_i}\right) \\ &= -\sum_k (\overline{\Gamma}^l_{jk} a_{ki} + \overline{\Gamma}^l_{ik} a_{kj})\,. \end{aligned}$$

Enfin $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{kj}$ car $\overline{\nabla}$ est sans torsion, d'où (5), ce qui démontre b).

c) et d) Comme J est D-antisymétrique et $\overline{\nabla}$-parallèle, on a

$$\nabla J = JD + D(J\ ,\ )\,. \tag{6}$$

Or, il est clair que J est antisymétrique par rapport aux deux termes de droite, donc il est aussi ∇J-antisymétrique. En outre JD est symétrique tandis que $D(J\ ,\ )$ est antisymétrique, par conséquent $D = J^{-1}$ (partie symétrique de∇J).

e) La forme ω est ∇^g-parallèle donc

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_k}} \omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) = -\omega\left(\nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_k}} \frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) - \omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_k}} \frac{\partial}{\partial q_j}\right) \\ &= \Gamma^j_{ki} - \Gamma^i_{kj}\,. \end{aligned}$$

Donc $\Gamma^j_{ki} = \Gamma^i_{kj}$ et il suffit pour conclure, de remarquer que la torsion de ∇^g est nulle. □

REMARQUE. en coordonnées action-angle (q_i, θ_i), le c) de la proposition 2 équivaut au système d'équations aux dérivées partielles suivant (chaque membre de gauche des équations est la k-ième composante de $\nabla J(J\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}) + \nabla J(\frac{\partial}{\partial q_i}, J\frac{\partial}{\partial q_j})$) :

$$(7) \qquad \forall i, j, k = 1, \cdots, n \ , \quad \sum_l \left(a_{li} \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_l} + a_{lj} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_i} \right) = 0 \, .$$

COMMENTAIRE. ainsi, la base d'une fibration de type I-L est naturellement munie d'une structure affine entière et d'un champ d'endomorphismes J à torsion de Nijenhuis nulle, déterminés par la fibration. On notera $\mathcal{R}$ le réseau affine (i.e. le réseau de T^*B défini par les différentielles des coordonnées actions). On obtient aussi sur la base une connexion $\overline{\nabla}$ sans torsion mais d'après d) celle-ci se déduit des seuls ∇ et J.

2. – Théorème de réalisation

Soit B une variété munie d'une structure affine entière de réseau $\mathcal{R}$ et d'un champ de tenseurs $(1, 1)$ J. On dira que le triplet $(B, \mathcal{R}, J)$ est réalisable s'il existe une fibration de type I-L $(M, \omega, g) \xrightarrow{\pi} B$ telle que les éléments qu'elle définit sur la base B selon la partie précédente (structure affine entière et tenseur de Nijenhuis) soient précisément ceux du triplet.

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel triplet soit réalisable :

THÉORÈME. *Le triplet $(B, \mathcal{R}, J)$ est réalisable si, et seulement si, $N_J = 0$ et J est ∇J-antisymétrique.*

PREUVE. La condition est nécessaire d'après *a*) et *d*) de la proposition 2 de la partie 1.

Montrons qu'elle est suffisante. Soit M la variété quotient de T^*B par le réseau $\mathcal{R}$; alors $\pi : M \longrightarrow B$ est un fibré en tores où π désigne la projection induite par celle de T^*B sur B. La forme symplectique $d\lambda$, où λ désigne la 1-forme de Liouville, passe au quotient et détermine sur M, une forme symplectique ω. En outre, la projection de la section nulle de T^*B fournit une section lagrangienne globale $s : B \longrightarrow M$.

Sur M, il existe une et une seule pseudométrique g telle que le tenseur $\mathcal{J}$ qui relie ω et g se projette sur J et telle que $s^*g = 0$. En effet, considérons des coordonnées affines $(q_1, \cdots, q_n)$ définies sur un ouvert A de B, telles que $\{dq_1, \cdots, dq_n\}$ soit une base de $\mathcal{R}$ sur cet ouvert. Alors $\pi^{-1}(A)$ s'identifie à $A \times \mathbb{T}^n$, muni des coordonnées (q, θ), de façon que $\omega = dq_1 \wedge d\theta_1 + \cdots + dq_n \wedge d\theta_n$ et que $s(q) = (q, 0)$.

Dans ces conditions, si $J = \sum_{i,j} a_{ij}(q)\frac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_j$, la seule possibilité est de prendre pour $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J} = \sum_{i,j}\left(a_{ij}(q)\frac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_j - a_{ji}(q)\frac{\partial}{\partial \theta_i} \otimes d\theta_j\right) \text{ et } g = \omega(\mathcal{J}\ ,\ ).$$

Reste à voir que (ω, g) est compatible, c'est à dire que $N_{\mathcal{J}} = 0$.
$N_{\mathcal{J}}(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}) = 0$ car $N_J = 0$ par hypothèse.
$N_{\mathcal{J}}(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j}) = 0$ car les coefficients a_{ij} ne dépendent que des actions.

D'autre part, un calcul direct montre que

$$N_{\mathcal{J}}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_k}\right) = -\sum_{l,j}\left(a_{li}\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_i}a_{lj}\right)\frac{\partial}{\partial \theta_j}$$

d'où $N_{\mathcal{J}} = 0$ d'après le c) de la proposition 2 de la partie 1 (cf (7)). □

Une reformulation du théorème de réalisation est la suivante :

Proposition 1. *Soit B une variété munie d'une connexion affine ∇ et d'un champ de tenseurs de type $(1, 1)$ J. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $N_J = 0$ *et J est ∇J-antisymétrique.*

b) $d(dq_i \circ J^2) = 0$, *pour $i = 1, \ldots, n$, les q_i étant des coordonnées affines sur B et J est ∇J-antisymétrique.*

Pour prouver ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant dont la démonstration est élémentaire et laissée au lecteur :

Lemme. *Soient α une 1-forme et H un tenseur de type $(1, 1)$ sur B. Alors on a :*

$$d(\alpha \circ H)(H.,\ .) + d(\alpha \circ H)(.,\ H.) = d\alpha(H.,\ H.) + d(\alpha \circ H^2)(.,\ .) + \alpha(N_H(.,.)).$$

Preuve de la proposition 1. En coordonnées affines $q_1, \cdots, q_n$, la partie antisymétrique de ∇J est $\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \otimes d(dq_i \circ J)$. Or si J est ∇J-antisymétrique, il l'est encore par rapport à la partie symétrique et la partie antisymétrique de ∇J, donc en particulier J est antisymétrique par rapport à $d(dq_i \circ J)$.

En appliquant le lemme précédent, il vient alors que $d(dq_i \circ J^2) = -dq_i(N_J) = 0$ d'où le résultat. □

Une fibration $(M, g) \xrightarrow{\pi} B$ de type I-L et une fonction $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ étant données, Hess(f) désignera la Hessienne de f par rapport à la connexion affine i.e. Hess$(f) = \nabla(df)$ et X_f désignera le champ hamiltonien d'hamiltonien $f \circ \pi$ i.e. $d(f \circ \pi) = -\omega(X_f,\ )$.

PROPOSITION 2. *Le champ hamiltonien X_f est un automorphisme infinitésimal de g si et seulement si J est* Hess(f)*- antisymétrique.*

PREUVE. Un calcul direct dans les coordonnées de la proposition 1 de la partie 1 I., montre que

$$L_{X_f} g = \pi^*\Big(\mathrm{Hess}(f)(J\ ,\ ) + \mathrm{Hess}(f)(\ ,J\ )\Big). \qquad \square$$

3. – Relèvement dans un domaine de coordonnées Action-Angle

On vient de voir que si dans des coordonnées affines $(q_1, \dots, q_n)$ sur B, J est du type : $J = \sum_{i,j} a_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_j$, le relevé $\mathcal{J}_0 = \sum_{i,j} (a_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_j - a_{ji}(q) \frac{\partial}{\partial \theta_i} \otimes d\theta_j)$ est à torsion de Nijenhuis nulle si, et seulement si, J est à torsion de Nijenhuis nulle et ∇J-antisymétrique.

Cependant dans un ouvert U muni de coordonnées action-angle le relèvement le plus général de J est du type :

$$\mathcal{J} = \sum_{i,j} \left(a_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_j - a_{ji}(q) \frac{\partial}{\partial \theta_i} \otimes d\theta_j \right) + \sum_{i,j} b_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial \theta_i} \otimes dq_j \quad \text{avec } b_{ij} = b_{ji}$$

ce qui est équivalent à $g = g_0 + g_1$
avec

$$g_0 = \sum_{i,j} a_{ji}(q)(dq_i \otimes d\theta_j + d\theta_j \otimes dq_i) \quad \text{et} \quad g_1 = -\sum_{i,j} b_{ij}(q) dq_i \otimes dq_j.$$

Il est à remarquer que $\mathcal{J}_0$ relie ω et g_0 et que le couple (ω, g_0) est compatible. Le prochain résultat nous dit à quelle condition ce relèvement $\mathcal{J}$ définit une (ω, g)-structure sur U.

PROPOSITION 1. *Les propositions suivantes sont équivalentes* :

a) *La torsion de Nijenhuis de $\mathcal{J}$ est nulle* : $N_{\mathcal{J}} = 0$.

b) $N_J = 0$, *J est ∇J-antisymétrique et il existe une forme trilinéaire symétrique ϕ telle que pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur $\pi(U)$ on ait* :

$$\big(\overline{\nabla}_X g_1\big)(Y, Z) = \phi(X, JY, Z) + \phi(X, Y, JZ)$$

où $\overline{\nabla} = \nabla + J^{-1}$(partie symétrique$(\nabla J)$).

c) $N_J = 0$, *J est ∇J-antisymétrique et la forme trilinéaire définie par*

$$\psi(X, Y, Z) = (\overline{\nabla}_Y g_1)(J^{-1}X, Z) + (\overline{\nabla}_Z g_1)(J^{-1}X, Y) - (\overline{\nabla}_{J^{-1}X} g_1)(Y, Z)$$

est symétrique.

Pour démontrer cette proposition nous aurons besoin des préliminaires algébriques suivants.

Soit V un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. On désigne par $\mathcal{L}^k(V,\mathbb{R})$ l'ensemble des formes $k-$linéaires sur V, et par $\mathcal{S}^k(V,\mathbb{R})$ l'ensemble des formes $k-$linéaires symétriques sur V.

Pour $H \in Gl(V)$, on définit les endomorphismes F_H et G_H de $\mathcal{L}^3(V,\mathbb{R})$ par :

$$F_H(\phi)(v_1, v_2, v_3) = \phi(v_1, Hv_2, v_3) + \phi(v_1, v_2, Hv_3)$$

et

$$G_H(\psi)(v_1, v_2, v_3) = \frac{3}{2}\ \mathrm{Sym}(\psi)(H^{-1}v_1, v_2, v_3) - \psi(H^{-1}v_1, v_2, v_3)$$

où $\mathrm{Sym}(\psi)$ désigne le symétrisé de ψ.

Nous avons alors le lemme algèbrique suivant dont nous laissons à nouveau la preuve au lecteur :

LEMME. *L'application G_H est un isomorphisme et $G_H \circ F_H = \mathrm{I}$ sur $\mathcal{S}^3(V,\mathbb{R})$. En outre, $\phi \in F_H(\mathcal{S}^3(V,\mathbb{R}))$ si, et seulement si, $G_H(\phi) \in \mathcal{S}^3(V,\mathbb{R})$.*

PREUVE DE LA PROPOSITION 1. Pour établir l'équivalence entre b) et c), il suffit de remarquer que

$$G_J(\overline{\nabla} g_1)(X,Y,Z) = \frac{1}{2}[(\overline{\nabla}_Y g_1)(J^{-1}X,Z)+(\overline{\nabla}_Z g_1)(Y,J^{-1}X)-(\overline{\nabla}_{J^{-1}X} g_1)(Y,Z)]$$

et de tenir compte du lemme précédent.

Montrons a)$\Rightarrow$b).

Puisque $g = g_0 + g_1$ et $\nabla^g g = 0$, on a

$$(\nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_r}} g_1)\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) = -\left(\nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_r}} g_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right).$$

En outre, il est clair que $(\nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_r}} g_1)(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j})$ est basique et que sa projection est égale à $(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial q_r}} g_1)\ (\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j})$.

Un calcul direct montre que

$$(\nabla^g_{\frac{\partial}{\partial q_r}} g_0)\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) = -\sum_k(\Gamma^k_{ri}a_{kj} + \Gamma^k_{rj}a_{ki})$$

et donc par suite,

$$(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial q_r}} g_1)\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) = \sum_k(\Gamma^k_{ri}a_{kj} + \Gamma^k_{rj}a_{ki}).$$

Posons maintenant $\phi = \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k dq_i \otimes dq_j \otimes dq_k$, qui est symétrique d'après le e) de la proposition 2 de la section 1. Alors $\overline{\nabla} g_1 = F_J(\phi)$, d'où a) implique b).

Montrons maintenant b)$\Rightarrow$a).

On a vu dans la démonstration du théorème de réalisation que si $N_J = 0$ et J est ∇-antisymétrique alors $N_{\mathcal{J}_0} = 0$ et donc que le couple (ω, g_0) est compatible.

Soit ∇^0 la connexion de Levi-Civita de g_0. Ses symboles de Christoffel ont la forme de la partie c) de la proposition 1 de la partie 1. Or dans l'expression de $\nabla^0_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \frac{\partial}{\partial q_j}$, les symboles de Christoffel qui sont les coefficients de $\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \theta_n}$, sont nuls car il suffit de refaire le calcul de a)$\Rightarrow$b) pour le cas où $g_1 = 0$ et de remarquer que ces symboles sont déterminés par $(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial q_r}} g_1)(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j})$. Ainsi, en résumé,

$$\nabla^0_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \frac{\partial}{\partial q_j} = \sum_k \gamma_{ij}^k(q) \frac{\partial}{\partial q_k}, \qquad \nabla^0_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \frac{\partial}{\partial \theta_j} = \nabla^0_{\frac{\partial}{\partial \theta_j}} \frac{\partial}{\partial q_i} = -\sum_k \gamma_{ik}^j(q) \frac{\partial}{\partial \theta_k}.$$

Supposons que $\overline{\nabla} g_1 = F_J(\phi)$ où $\phi = \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k dq_i \otimes dq_j \otimes dq_k$ soit symétrique. D'après le lemme précédent, cette forme ϕ est unique ce qui assure la différentiabilité. Posons

$$\Phi = \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial \theta_k} \otimes dq_i \otimes dq_j \quad \text{et} \quad \nabla^1 = \nabla^0 + \Phi.$$

On obtient ainsi une connexion ∇^1 à torsion nulle. Il n'est pas difficile de voir que $\nabla^1 \omega = 0$ car $\nabla^0 \omega = 0$ (le couple (ω, g_0) étant compatible) et que les Γ_{ij}^k sont symétriques en leurs trois indices.

D'autre part, si on refait en sens inverse le raisonnement de la partie a)$\Rightarrow$b), on obtient cette fois-ci, que $\left(\nabla^1_{\frac{\partial}{\partial q_r}} g\right)\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) = 0$. Ainsi $\nabla^1 g = 0$ car les cas qui restent sont une conséquence assez directe du fait que g_0 est ∇^0-parallèle. Par suite, $\nabla^1 \mathcal{J} = 0$ et $N_{\mathcal{J}} = 0$. □

REMARQUE. D'après les calculs précédents, les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k sont les coefficients de la forme trilinéaire symétrique ϕ de la partie b). En outre, $\phi = \frac{1}{2}\psi$.

4. – Classification des fibrations de type I-L

Après avoir donné dans le paragraphe 2. une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une réalisation d'un triplet $(B, \mathcal{R}, J)$, que nous supposerons désormais satisfaite, nous allons mettre en évidence des invariants caractéristiques permettant de donner une classification de ces réalisations à isomorphisme près.

On dira que deux fibrations de type I-L, $\pi\ :\ (M,\omega,g) \longrightarrow (B,\mathcal{R},J)$ et $\pi'\ :\ (M',\omega',g') \longrightarrow (B,\mathcal{R},J)$ sont isomorphes s'il existe un difféomorphisme $\Phi\ :\ M \longrightarrow M'$ vérifiant $\Phi^*\omega' = \omega$, $\Phi^*g' = g$ et $\pi' \circ \Phi = \pi$.

On notera $F(B,\mathcal{R},J)$ l'ensemble des classes d'isomorphie des fibrations de type I-L au-dessus de $(B,\mathcal{R},J)$. Nous verrons que cet ensemble a une structure naturelle de groupe abélien et que ce groupe peut se décrire à l'aide d'une certaine suite exacte.

Soit $(M,\omega,g) \xrightarrow{\pi} B$ une fibration de type I-L au-dessus de $(B,\mathcal{R},J)$. Une 1-forme fermée α, sur un ouvert $A \subset B$, étant donnée, on considère le champ de vecteurs X_α défini par $\omega(X_\alpha,\ ) = -\pi^*\alpha$. Soit $F_\alpha\ :\ \pi^{-1}(A) \longrightarrow \pi^{-1}(A)$ la valeur du flot de X_α pour $t = 1$. Notons $\mathcal{F}^1$ le faisceau des germes de 1-formes fermées sur B et $\mathcal{H}$ le faisceau associé au réseau $\mathcal{R}$. Il est clair que $F_\alpha \circ F_{\alpha'} = F_{\alpha'} \circ F_\alpha$ et que $F_\alpha = I$ lorsque α est une section de $\mathcal{H}$. Ceci permet d'associer à chaque section τ, sur A, du faisceau quotient $\mathcal{F}^1/\mathcal{H}$, un symplectomorphisme $F_\tau\ :\ \pi^{-1}(A) \longrightarrow \pi^{-1}(A)$. En outre, si s_1 et s_2 sont deux sections lagrangiennes de $(M,\omega,g) \xrightarrow{\pi} (B,\mathcal{R},J)$ au-dessus de A, alors il existe une et une seule section τ de $\mathcal{F}^1/\mathcal{H}$ telle que $F_\tau \circ s_1 = s_2$. Désormais, on écrira $s_1 + \tau = s_2$ ou bien $s_1 - s_2 = \tau$, ce qui permet de regarder la "différence" de deux sections lagrangiennes comme une section de $\mathcal{F}^1/\mathcal{H}$ (voir [4] pour les détails).

Pour étudier le comportement des sections lagrangiennes de telles fibrations, il est utile d'introduire les faisceaux de base B suivants :

S, le faisceau des germes de formes bilinéaires symétriques h telles qu'il existe une forme trilinéaire symétrique ϕ vérifiant

$$\big(\nabla_X h\big)(Y,Z) = \phi(X,JY,Z) + \phi(X,Y,JZ)\,.$$

S_0, le faisceau des germes de formes bilinéaires symétriques qui s'écrivent localement

$$\mathrm{Hess}(f)(J\ \ ,\ \ ) + \mathrm{Hess}(f)(\ \ ,J\ \ ).$$

D'autre part, si τ est une section de $\mathcal{F}^1/\mathcal{H}$, on définit $\psi(\tau)$ comme la section de S_0 qui, au voisinage de chaque point du domaine de τ, est donnée par $\psi(\tau) = (\nabla\alpha)(J\ \ ,\ \ ) + (\nabla\alpha)(\ \ ,J\ \ )$ où α est un représentant de τ autour de ce point. Cette définition ne dépend que de τ car les sections de $\mathcal{H}$ sont ∇-parallèles. On obtient ainsi un morphisme surjectif de faisceaux $\mathcal{F}^1/\mathcal{H} \longrightarrow S_0$, dont le noyau $\mathcal{L}$ est le faisceau des classes modulo $\mathcal{H}$ des germes de 1-formes fermées α telles que J soit $\nabla\alpha$-antisymétrique.

A l'aide de la proposition 2 de la section 3. on montre que τ est une section de $\mathcal{L}$ si, et seulement si, le symplectomorphisme F_τ préserve g.

LEMME 1. *On a les propriétés suivantes* :

a) *Si s est une section lagrangienne de $(M,\omega,g) \xrightarrow{\pi} (B,\mathcal{R},J)$ alors s^*g est une section de S.*

b) *Si s' est une autre section lagrangienne de cette fibration avec le même domaine que s, alors $s'^*g - s^*g$ est une section de S_0. Plus précisément, on a $s'^*g - s^*g = \psi(s' - s)$.*

c) *Le faisceau S_0 est un sous-faisceau de S.*

PREUVE.

a) D'après le lemme qui suit la proposition 1 du paragraphe 3., s'il existe une forme trilinéaire symétrique ϕ associée à s^*g, celle-ci est unique ; il suffit donc de la construire localement. Cela réduit le problème au cas d'un ouvert U de coordonnées action-angle (q, θ) et de la section $s \,:\, q \in \pi(U) \mapsto (q, 0) \in U$ (localement toute section lagrangienne est la section nulle d'un certain domaine de coordonnées action-angle). Or, dans ce cas, et avec la notation du début du paragraphe 3., $s^*g = g_1$ et il suffit d'appliquer le b) de la proposition 1 de cette section 3.

b) La question étant locale, on peut supposer l'existence d'une fonction $f \;:\; \pi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $s'(q) = \left(q, \overline{\frac{\partial f}{\partial q_1}}, \cdots, \overline{\frac{\partial f}{\partial q_n}}\right)$ où $\overline{\frac{\partial f}{\partial q_i}}$ désigne la classe modulo $\mathbb{Z}$ de $\frac{\partial f}{\partial q_i}$ $(\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$.

Bien sûr, s est toujours la section nulle. Dans ces conditions, $s' - s$ est représentée par la classe de df dans $\mathcal{F}^1/\mathcal{H}$ et un calcul montre que

$$s'^*g - s^*g = \mathrm{Hess}(f)(J\ ,\ ) + \mathrm{Hess}(f)(\ ,J\ ).$$

c) Supposons f définie sur un ouvert A muni de coordonnées $(q_1, \cdots, q_n)$ telles que $\{dq_1, \cdots, dq_n\}$ soit une base de $\mathcal{R}$. Soit $J = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_j$.

Posons sur $A \times \mathbb{T}^n$,

$$\omega = dq_1 \wedge d\theta_1 + \cdots + dq_n \wedge d\theta_n \text{ et } g = \omega(\mathcal{J}\ ,\ )$$

où $\mathcal{J} = \sum_{i,j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_j - a_{ji} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \otimes d\theta_j\right)$.

Alors, $(q, \theta) \in A \times \mathbb{T}^n \mapsto q \in A$ est une fibration de type I-L (cela correspond à faire $g_1 = 0$ dans la proposition 1 de la partie 3.).

D'autre part, $s(q) = \left(q, \overline{\frac{\partial f}{\partial q_1}}, \cdots, \overline{\frac{\partial f}{\partial q_n}}\right)$ est une section lagrangienne et on a

$$s^*g = \mathrm{Hess}(f)(J\ ,\ ) + \mathrm{Hess}(f)(\ ,J\ ).$$

Pour finir, on applique la partie a). $\square$

Compte tenu du b) du lemme précédent, l'image réciproque de g par les sections lagrangiennes, définit une section globale c de S/S_0. Celle-ci ne dépend que de la classe d'isomorphie de la fibration. On construit ainsi, une application $\mathcal{T} : F(B, \mathcal{R}, J) \longrightarrow H^0(S/S_0)$, qui est en fait un morphisme de groupes comme nous le verrons plus tard. Il est facile de voir, à l'aide du b) du lemme précédent, que $c = 0$ si, et seulement si, l'on peut construire au-dessus de chaque point de B une section locale à la fois lagrangienne et g-isotrope.

On va maintenant caractériser l'image de $\mathcal{T}$. Considérons les suites exactes courtes de faisceaux

$$0 \longrightarrow S_0 \longrightarrow S \longrightarrow S/S_0 \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F}^1/\mathcal{H} \longrightarrow S_0 \longrightarrow 0$$

et les suites exactes longues associées en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^k(S_0) \longrightarrow H^k(S) \longrightarrow H^k(S/S_0) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(S_0)$$
$$\cdots \longrightarrow H^k(\mathcal{L}) \longrightarrow H^k(\mathcal{F}^1/\mathcal{H}) \longrightarrow H^k(S_0) \xrightarrow{\bar{\partial}} H^{k+1}(\mathcal{L}).$$

Notons alors δ le morphisme $H^k(S/S_0) \xrightarrow{\delta} H^{k+2}(\mathcal{L})$ défini par $\delta = \bar{\partial} \circ \partial$.

PROPOSITION 1. *Une section globale c de S/S_0 provient d'une fibration de type I-L si, et seulement si, $\delta(c) = 0$.*

PREUVE. Montrons que la condition est nécessaire. Soit c une section globale de S/S_0 associée à une fibration de type I-L $(M, \omega, g) \xrightarrow{\pi} (B, \mathcal{R}, J)$. Considérons une famille de sections lagrangiennes de cette fibration, soit $\{s_i : A_i \longrightarrow M\}_{i \in I}$, où $\{A_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de B. Posons $\tau_{ij} = s_i - s_j$ sur $A_i \cap A_j$. Alors $\{A_i \cap A_j, s_i^* g - s_j^* g\}_{i,j \in I}$ est un représentant de ∂c.

D'après le b) du lemme 1 ci-dessus, $s_i^* g - s_j^* g = \psi(\tau_{ij})$ donc ∂c est l'image de l'élément de $H^1(\mathcal{F}^1/\mathcal{H})$ représenté par $\{A_i \cap A_j, \tau_{ij}\}_{i,j \in I}$ et par suite $\bar{\partial}(\partial c) = 0$.

Supposons maintenant que $\bar{\partial}(\partial c) = 0$. En raffinant les recouvrements ouverts considérés, on peut trouver un recouvrement ouvert $\{A_i\}_{i \in I}$ de B, des sections $h_i, i \in I$ de S définies sur A_i et telles que $h_i - h_j$ soit sur $A_i \cap A_j$, une section de S_0 et un 1-cocycle $\{A_i \cap A_j, \tau_{ij}\}_{i,j \in I}$ de $\mathcal{F}^1/\mathcal{H}$ de façon que :

1) la section de S/S_0 définie par $\{A_i, h_i\}_{i \in I}$ soit c,
2) $h_i - h_j = \psi(\tau_{ij})$.

Soit $(\tilde{M}, \tilde{\omega}, \tilde{g}) \xrightarrow{\tilde{\pi}} (B, \mathcal{R}, J)$ la fibration de type I-L construite dans la démonstration du théorème de réalisation. Notons $\tilde{s} : B \longrightarrow \tilde{M}$ la section lagrangienne globale obtenue en projetant la section nulle de T^*B. Sur $\tilde{\pi}^{-1}(A_i)$, posons $\omega_i = \tilde{\omega}$ et $g_i = \tilde{g} + \tilde{\pi}^* h_i$. Le couple (ω_i, g_i) est compatible car h_i est une section de S. Pour le voir, il suffit de prendre des coordonnées action-angle pour $\omega_i = \tilde{\omega}$ dans lesquelles $\tilde{s}$ s'identifie à la section nulle et d'appliquer à h_i la partie b) de la proposition 1 du paragraphe 3. En outre, $\tilde{s}^* g_i = h_i$.

Comme variété M, on prend le quotient de l'union disjointe $\coprod_{i\in I} \tilde{\pi}^{-1}(A_i)$ par la relation d'équivalence définie par le fait que deux éléments $x \in \tilde{\pi}^{-1}(A_i)$ et $y \in \tilde{\pi}^{-1}(A_j)$ sont équivalents si, et seulement si, $y = \tilde{F}_{\tau_{ij}}(x)$ (en particulier $\tilde{\pi}(x) = \tilde{\pi}(y)$), et comme application $\pi : M \longrightarrow B$, celle qui est égale à $\tilde{\pi}$ sur chaque $\tilde{\pi}^{-1}(A_i)$.

Puisque chaque $\tilde{F}_{\tau_{ij}}$ préserve $\tilde{\omega}$, les ω_i se recollent pour donner une forme symplectique ω sur M.

Un calcul en coordonnées action-angle montre que $\tilde{F}^*_{\tau_{ij}}(\tilde{g}) = \tilde{g} + \tilde{\pi}^*\psi(\tau_{ij})$ tandis que $\tilde{F}^*_{\tau_{ij}}(\tilde{\pi}^* h_j) = \tilde{\pi}^* h_j$. Maintenant, la condition 2) entraine que les g_i se recollent aussi pour donner une pseudométrique g.

Par construction, $s_i^* g = h_i$ où $s_i : A_i \longrightarrow M$ est l'application obtenue par le passage au quotient de $\tilde{s} : A_i \longrightarrow \tilde{\pi}^{-1}(A_i)$. Donc c est bien la section de S/S_0 associée à la fibration ainsi construite. □

Maintenant, on va introduire la structure de groupe de $F(B, \mathcal{R}, J)$. Considérons deux fibrations de type I-L $(M, \omega, g) \xrightarrow{\pi} (B, \mathcal{R}, J)$ et $(M', \omega', g') \xrightarrow{\pi} (B, \mathcal{R}, J)$. Sur $M \times M'$, on a une forme symplectique produit et une pseudométrique produit qui seront notées respectivement $\omega + \omega'$ et $g + g'$.

Soit $\Delta = \{(x, y) \in M \times M' \ / \ \pi(x) = \pi'(y)\}$. Les restrictions de $\omega + \omega'$ et $g + g'$ à Δ donnent un couple (Ω, G) tel que Ker Ω =Ker G. Soit $\hat{M}$ la variété quotient de Δ par le feuilletage associé à Ker Ω ; alors (Ω, G) se projette en un couple compatible $(\hat{\omega}, \hat{g})$ sur$\hat{M}$. En outre, il existe une submersion, d'ailleurs unique, $\hat{\pi} : \hat{M} \longrightarrow B$ telle que $\hat{\pi} \circ \lambda = \pi \circ \lambda_1$ où $\lambda : \Delta \longrightarrow \hat{M}$ est la projection canonique et où $\lambda_1(x, y) = x$.

Admettons pour l'instant que $(\hat{M}, \hat{\omega}, \hat{g}) \xrightarrow{\pi} (B, \mathcal{R}, J)$ est une fibration de type I-L. Il est alors clair que sa classe d'isomorphie ne dépend que des classes d'isomorphie des fibrations de départ. Ceci définit donc une opération binaire sur $F(B, \mathcal{R}, J)$.

La vérification de ce que nous venons de dire peut se faire de façon locale par rapport à B. Prenons donc un ouvert A de B tel que $\pi^{-1}(A)$ et $\pi'^{-1}(A)$ sont des domaines de coordonnées action-angle (q, θ) et (q, θ') respectivement (on peut prendre les mêmes coordonnées action car le réseau est le même pour les deux fibrations).

Si $J = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_j$, on a alors :

$$\omega = \sum_i dq_i \wedge d\theta_i \text{ et } g = \sum_{i,j} a_{ji}(dq_i \otimes d\theta_j + d\theta_j \otimes dq_i) + g_1$$

$$\omega' = \sum_i dq_i \wedge d\theta'_i \text{ et } g' = \sum_{i,j} a_{ji}(dq_i \otimes d\theta'_j + d\theta'_j \otimes dq_i) + g'_1$$

où g_1 et g'_1 sont basiques avec $G_J(\overline{\nabla} g_1)$ et $G_J(\overline{\nabla} g'_1)$ sont symétriques.

Le sous-fibré Ker Ω est engendré par les $\frac{\partial}{\partial\theta_j} - \frac{\partial}{\partial\theta'_j}$, $j = 1, \cdots, n$. Maintenant, il est clair que $\hat{M}$ est une variété différentiable et qu'il existe bien $\hat{\pi} : \hat{M} \longrightarrow B$. En outre, les $(q, \hat{\theta})$, où $\hat{\theta}_i = \theta_i + \theta'_i$, peuvent être regardés comme des coordonnées sur $\lambda\big(\Delta \cap (\pi^{-1}(A) \times \pi'^{-1}(A))\big)$, qui est difféomorphe à $A \times \mathbb{T}^n$. Dans ces coordonnées,

$$\hat{\omega} = \sum_i dq_i \wedge d\hat{\theta}_i \quad \text{et} \quad \hat{g} = \sum_{i,j} a_{ji}(dq_i \otimes d\hat{\theta}_j + d\hat{\theta}_j \otimes dq_i) + g_1 + g'_1,$$

donc les $(q, \hat{\theta})$ sont des coordonnées action-angle.

D'après la proposition 1 de la section 3., le couple $(\hat{\omega}, \hat{g})$ est compatible. Par conséquent, $(\hat{M}, \hat{\omega}, \hat{g}) \xrightarrow{\hat{\pi}} (B, \mathcal{R}, J)$ est une fibration de type I-L.

Deux sections lagrangiennes $s_1 : A_1 \longrightarrow M$ et $s'_1 : A_1 \longrightarrow M'$ étant données, on définit la section $s_1 + s'_1 : A_1 \longrightarrow \hat{M}$ par $(s_1 + s'_1)(z) = \lambda(s_1(z), s'_1(z))$. Bien entendu, $s_1 + s'_1$ est une section lagrangienne et $(s_1 + s'_1)^*(\hat{g}) = s_1{}^*g + s'_1{}^*g'$. D'autre part, si $s_2 : A_2 \longrightarrow M$ et $s'_2 : A_2 \longrightarrow M'$ est un autre couple de sections lagrangiennes, alors

$$(s_1 + s'_1) - (s_2 + s'_2) = (s_1 - s_2) + (s'_1 - s'_2)$$

sur $A_1 \cap A_2$ (on rappelle que la différence de deux sections lagrangiennes d'une même fibration est une section de $\mathcal{F}^1/\mathcal{H}$).

Pour le voir, on prend A, (q, θ), (q, θ') de manière à ce que

$$s_1(q) = (q, 0), \qquad s'_1(q) = (q, 0),$$

$$s_2(q) = \left(q, \overline{\frac{\partial f}{\partial q_1}}, \cdots, \overline{\frac{\partial f}{\partial q_n}}\right), \quad \text{et} \quad s'_2(q) = \left(q, \overline{\frac{\partial f'}{\partial q_1}}, \cdots, \overline{\frac{\partial f'}{\partial q_n}}\right).$$

Dans ce cas, en coordonnées $(q, \hat{\theta})$, on a $(s_1 + s'_1)(q) = (q, 0)$ tandis que

$$(s_2 + s'_2)(q) = \left(q, \overline{\frac{\partial(f + f')}{\partial q_1}}, \cdots, \overline{\frac{\partial(f + f')}{\partial q_n}}\right).$$

D'autre part, toute classe de $F(B, \mathcal{R}, J)$ contient un représentant construit comme dans la deuxième partie de la proposition précédente.

En effet, soit $(M, \omega, g) \xrightarrow{\pi} (B, \mathcal{R}, J)$ une fibration de type I-L. Considérons une famille de sections lagrangiennes $\{s_i : A_i \longrightarrow M\}_{i \in I}$ où $\{A_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de B. Posons $h_i = s_i^* g$ et $\tau_{ij} = s_i - s_j$; en particulier $h_i - h_j = \psi(\tau_{ij})$ d'après le b) du lemme 1 de ce paragraphe, ce qui permet de construire une fibration de type I-L à partir de $\coprod_{i \in I} \tilde{\pi}^{-1}(A_i)$ comme précédemment.

On vérifie facilement l'existence d'un symplectomorphisme $H_i : \pi^{-1}(A_i) \to \tilde{\pi}^{-1}(A_i)$ tel que $\tilde{\pi} \circ H_i = \pi$ et $H_i \circ s_i = \tilde{s}$; ce symplectomorphisme est unique (il suffit d'utiliser des coordonnées action-angle dans lesquelles s_i et $\tilde{s}$ s'identifient aux sections nulles respectives). En outre, H_i envoie g sur $\tilde{g}+\tilde{\pi}^*h_i$ car $s_i^*g = h_i$. Par conséquent, les symplectomorphismes H_i, $i \in I$, se recollent pour donner un isomorphisme de fibrations de type I-L.

Si $(M', \omega', g') \xrightarrow{\pi'} (B, \mathcal{R}, J)$ est une autre fibration de type I-L alors, quitte à raffiner le recouvrement ouvert $\{A_i\}_{i\in I}$, on peut trouver une famille de sections lagrangiennes $\{s'_i : A_i \longrightarrow M'\}_{i\in I}$. En outre, si l'on pose $h'_i = s'^*_i g'$, on a $(s_i + s'_i) - (s_j + s'_j) = \tau_{ij} + \tau'_{ij}$, où $\tau'_{ij} = s'_i - s'_j$ et $(s_i + s'_i)^*\hat{g} = s_i^*g + s'^*_i g' = h_i + h'_i$. Donc $(h_i + h'_i) - (h_j + h'_j) = \psi(\tau_{ij} + \tau'_{ij})$. Autrement dit, la classe de $(\hat{M}, \hat{\omega}, \hat{g}) \xrightarrow{\hat{\pi}} (B, \mathcal{R}, J)$ se construit à l'aide du cocycle somme $\{A_i \cap A_j, \tau_{ij} + \tau'_{ij}\}_{i,j\in I}$ et de $h_i + h'_i$, $i \in I$.

Ceci montre que $F(B, \mathcal{R}, J)$ a une structure naturelle de groupe abélien, dont l'élément neutre est représenté par la fibration construite dans la démonstration du théorème de réalisation et que $\mathcal{T} : F(B, \mathcal{R}, J) \longrightarrow H^0(S/S_0)$ est un morphisme de groupes.

Finalement, une construction analogue à celle de Duistermaat [4], mais à l'aide de sections qui sont à la fois g-isotropes et lagrangiennes, montre que le noyau de $\mathcal{T}$ est isomorphe à $H^1(\mathcal{L})$. Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant :

THÉORÈME. *Soit B une variété munie d'un réseau $\mathcal{R}$ affine entier et d'un champ d'endomorphismes J, ∇J-antisymétrique et vérifiant $N_J = 0$. Alors $F(B, \mathcal{R}, J)$ a une structure naturelle de groupe abélien et il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{L}) \longrightarrow F(B, \mathcal{R}, J) \xrightarrow{\mathcal{T}} H^0(S/S_0) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathcal{L}).$$

5. – Exemples de bases $(B, \mathcal{R}, J)$

Dans ce qui suit on supposera dim$B$=2 (voir [3] pour d'autres dimensions). Supposons d'abord $J^2 \neq aI$ ou bien $J = aI$, $a \in \mathbb{R}^*$. Si Φ est une forme bilinéaire symétrique telle que J est Φ-antisymétrique, alors $\Phi = 0$ et par conséquent, $D = 0$ i.e. $\nabla = \overline{\nabla}$. Un calcul non élémentaire (qui ne sera pas détaillé ici) montre alors que la courbure de ∇^g s'annule et que par tout point d'une fibration de type I-L au-dessus de $(B, \mathcal{R}, J)$ passe une section isotrope-lagrangienne. Par suite, $F(B, \mathcal{R}, J)$ est isomorphe à $H^1(\mathcal{L})$ où, cette fois-ci, $\mathcal{L}$ est le faisceau des classes modulo $\mathcal{H}$ des germes de 1-formes ∇-parallèles.

Ainsi, après normalisation, seuls les cas $J^2 = I$ (avec $J \neq \pm I$) et $J^2 = -I$ présentent un intérêt.

5.1. – Cas où $J^2 = I$ et $J \neq \pm I$

Se donner un tel J à torsion nulle équivaut à se donner deux feuilletages supplémentaires $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_{-1}$ (i.e. $J = kI$ sur $T\mathcal{F}_k$, $k \in \{-1, 1\}$). On constate aisément que J est ∇J-antisymétrique si, et seulement si, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_{-1}$ sont totalement géodésiques pour ∇.

a) Si B est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (muni de la structure affine standard), le feuilletage $\mathcal{F}_1$ (et de façon analogue le feuilletage $\mathcal{F}_{-1}$) est un faisceau de droites tel que deux droites quelconques ne se coupent pas dans B. Par exemple, on peut prendre pour B le demi-plan ouvert supérieur et pour $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_{-1}$) l'ensemble des droites passant par $(0,0)$ (resp. $(1,0)$). Nous appellerons la structure correspondante, *structure en double éventail*. Dans ce cas, on vérifie que la courbure de $\overline{\nabla}$ n'est pas nulle. A fortiori donc, la courbure de ∇^g est non nulle pour toute fibration de type I-L au-dessus du double éventail.

A noter que si $B = \mathbb{R}^2$ tout entier, chaque feuilletage $\mathcal{F}_k$, $k \in \{-1, 1\}$, est nécessairement un faisceau de droites parallèles et donc $\nabla J = 0$.

b) Si maintenant $B = \mathbb{T}^2$, il est bien connu [5] que les structures affines entières sur $\mathbb{T}^2$ sont des quotients de la structure affine standard de $\mathbb{R}^2$. Par suite, tout bifeuilletage totalement géodésique sur $\mathbb{T}^2$ se relève en un bifeuilletage totalement géodésique sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, on a $\nabla J = 0$, ce qui ne peut arriver que si ∇ est la connexion affine standard sur $\mathbb{T}^2$; en particulier, $\overline{\nabla} = \nabla$.

Cependant, la courbure de ∇^g n'est pas nulle en général. Par exemple, on peut considérer la fibration de type I-L donnée par $\pi : (q, \theta) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \mapsto q \in \mathbb{T}^2$ avec

$$\omega = (\pi^*\alpha_1) \wedge d\theta_1 + (\pi^*\alpha_2) \wedge d\theta_2$$

et

$$g = (\pi^*\alpha_1) \otimes d\theta_1 + d\theta_1 \otimes (\pi^*\alpha_1) - (\pi^*\alpha_2) \otimes d\theta_2 - d\theta_2 \otimes (\pi^*\alpha_2) + \pi^* g_1$$

où $g_1 = h_1\alpha_1 \otimes \alpha_1 + h_2\alpha_2 \otimes \alpha_2 + a(\alpha_1 \otimes \alpha_2 + \alpha_2 \otimes \alpha_1)$ et où h_1, h_2 sont des fonctions sur $\mathbb{T}^2$, $a \in \mathbb{R}$, et α_1, α_2 des 1-formes parallèles sur $\mathbb{T}^2$ vérifiant $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \neq 0$.

5.2. – Cas où $J^2 = -I$

a) Soit $B = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 + c(q_1^2 + q_2^2) > 0\}$ où $c \in \mathbb{R}$. Posons

$$X = q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial q_2}, \quad Y = -q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Sur B, on définit la structure complexe J par $JX = fY$ et $JY = -f^{-1}X$ où $f(q_1, q_2) = \left(1 + c(q_1^2 + q_2^2)\right)^{-1/2}$ (cette structure se prolonge à l'origine !). Un calcul direct montre que J est ∇J-antisymétrique et que la courbure de $\overline{\nabla}$ est non nulle lorsque $c \neq 0$.

b) Supposons maintenant que $B = \mathbb{T}^2$ muni de l'une de ses structures affines entières. Il existe alors un champ de vecteurs Z non nul et une forme volume

γ qui sont parallèles. Soient $\phi_1 = \gamma(Z, JZ)$ et $d(d\phi_1 \circ J) = \phi_2\gamma$. Considérons des coordonnées affines (x_1, x_2) telles que $Z = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ et $\gamma = dx_1 \wedge dx_2$. Ecrivons $JZ = f_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + f_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}$. Alors J est ∇J-antisymétrique si, et seulement si,

$$\left\{\begin{aligned} f_2^2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -(f_1^2+1)\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ 2f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= f_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \end{aligned}\right. \tag{8}$$

D'autre part, $d(df_2 \circ J) = -2\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)dx_1 \wedge dx_2$. Or le terme entre parenthèses est égal au déterminant de l'application linéaire $X \mapsto \nabla J\left(X, \dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)$, et celle-ci est aussi linéaire par rapport à J grâce aux faits que $J^2 = -I$ et que J est ∇J-antisymétrique. Par suite, son déterminant est positif ou nul. Ceci montre que $\phi_2 \leq 0$.

Par construction, $\phi_2\gamma$ est exacte donc $\phi_2 = 0$ i.e. $(d\phi_1 \circ J) = 0$. En d'autres termes, ϕ_1 est une fonction harmonique sur le tore $\mathbb{T}^2$ donc est constante. Par conséquent, en coordonnées (x_1, x_2) la fonction f_2 est constante, et donc compte tenu de (8), la fonction f_1 le sera aussi. Autrement dit, J est ∇-parallèle, ce qui ne peut arriver que si ∇ est la connexion usuelle sur $\mathbb{T}^2$ [5]. En outre, on a $\overline{\nabla} = \nabla$.

Le théorème de classification de la section 4 permet alors de construire des fibrations de type I-L telles que la courbure de ∇^g est non nulle et en particulier une large famille de structures pseudo-kählériennes (cf [3]).

c) Avec ces méthodes en tête, on peut fabriquer facilement des exemples de variétés compactes, pseudo-kählériennes, dont le premier nombre de Betti est impair.

En effet, considérons la fibration triviale

$$\pi : (x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) \in \tilde{B} \times \mathbb{T}^2 \mapsto (x_1, x_2) \in \tilde{B}$$

où $\tilde{B} = \mathbb{R} \times S^1$.

Soient alors

$$\tilde{\omega} = dx_1 \wedge d\theta_1 + dx_2 \wedge d\theta_2$$

et

$$\tilde{g} = -(dx_2 \otimes d\theta_1 + d\theta_1 \otimes dx_2) + (dx_1 \otimes d\theta_2 + d\theta_2 \otimes dx_1) + h(x_1)(dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1).$$

Il n'est pas difficile de vérifier, soit à l'aide de notre méthode, soit directement, que le couple $(\tilde{\omega}, \tilde{g})$ munit $\tilde{M}$ d'une structure de variété pseudo-kählérienne de signature $(2, 2)$.

Considérons maintenant le difféomorphisme $\tilde{F}$ de $\tilde{M}$ défini par

$$\tilde{F}(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) = (x_1 + 1, x_2, \theta_1, \theta_2 - x_2).$$

On voit que $\tilde{F}^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ et $\tilde{F}^*\tilde{g} = \tilde{g}$ lorsque $h(x_1 + 1) = h(x_1) + 1$ (par exemple $h(x_1) = x_1$ convient). Notons alors M le quotient de $\tilde{M}$ par le groupe engendré par $\tilde{F}$ et ω, g les structures induites sur M par $\tilde{\omega}$ et $\tilde{g}$. (M, ω, g) est alors une 4-variété compacte pseudo-kählérienne de signature $(2, 2)$ qui est une fibration Isotrope et Lagrangienne dont la base $B = \mathbb{T}^2$ est le quotient de $\tilde{B}$ par le groupe engendré par le difféomorphisme $F : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$. Puisque $\tilde{F}^*\rho = \rho$, où $\rho = d\theta_2 + x_1 dx_2$ et que $\tilde{F}^* d\theta_1 = d\theta_1$, on obtient que M est le produit de S^1 par un fibré non trivial de base $\mathbb{T}^2$ et de fibre S^1. Ainsi, $b_1(M) = 3$.

RÉFÉRENCES

[1] V. Arnold, "Méthodes mathématiques de la mécanique classique", Editions Mir 1976.

[2] H. Boualem – R. Brouzet – J. Rakotondralambo – F. J. Turiel, *Fibration lagrangienne munie d'une pseudo-métrique compatible*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **326**, (1998) 1201-1204.

[3] H. Boualem – R. Brouzet – J. Rakotondralambo – F. J. Turiel, *Exemples de pseudo-métriques compatibles avec une forme symplectique ; cas particulier des structures pseudo-kählériennes*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **328**, (1999) 317-320.

[4] J. J. Duistermaat, *On Global Action-Angle Coordinates*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 687-706.

[5] D. Fried – W. Goldman – M. W. Hirsch, *Affine manifolds with nilpotent holonomy*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), 487-523.

Département de Mathématiques
Géométrie, Topologie, Algèbre
ESA 5030
Université Montpellier II
Place E. Bataillon
34095 Montpellier cedex 5, France
boualem@darboux.math.univ.-montp2.fr
brouzet@darboux.math.univ.montp2.fr

Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences
BP 906, Antananarivo-101, Madagascar
jrakoton@syfed.refer.mg

Geometría y Topología
Facultad de Ciencias AP. 59
29080 Málaga, Espagne
turiel@agt.cie.uma.es