Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)
Vol. I (2002), pp. 73-92

Sur la composition de séries formelles à croissance contrôlée

AUGUSTIN MOUZE

Abstract. Let F be a holomorphic map from $\mathbb{C}^s$ to $\mathbb{C}^s$ defined in a neighborhood of zero such that $F(0) = 0$. If the Jacobian determinant of F is not identically zero, P. M. Eakin and G. A. Harris proved the following result: any formal power series $\mathcal{A}$ such that $\mathcal{A} \circ F$ is analytic is itself analytic. If the Jacobian determinant of F is identically zero, they proved that the previous conclusion is no more true. J. Chaumat and A.-M. Chollet extended this result in the case of formal power series satisfying growth conditions, of Gevrey type for instance. The author gets similar results when the map F is no more holomorphic. The loss of regularity on $\mathcal{A}$ is optimal.

Mathematics Subject Classification (2000): 13F25, 13J05, 32A05.

1. – Introduction

Ce travail a pour but l'étude de problèmes de composition dans des sous-anneaux de séries formelles définis par des conditions de croissance sur les coefficients. Ces séries apparaissent, par exemple, lorsque l'on étudie les solutions formelles d'équations différentielles à coefficients polynômiaux [8]. Plus précisément, on désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Soit $X = (X_1, \dots, X_s)$ des indéterminées. On connaît bien $\mathbb{C}[[X]]$, l'anneau des séries formelles à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}\{X\}$, l'anneau des séries convergentes. On a l'inclusion triviale $\mathbb{C}\{X\} \subset \mathbb{C}[[X]]$. L'idée est d'introduire une classe d'anneaux intermédiaires. Pour cela, on considère $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que

$$(H_1) \qquad M_0 = 1 \text{ et } \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ est logarithmiquement convexe}.$$

Soit C_0 une constante strictement positive. Pour tout $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$, on écrit $\mathcal{A} = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} a_J X^J$, avec les notations habituelles $J = (j_1, \dots, j_s)$, $X^J = X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}$

Pervenuto alla Redazione il 18 giugno 2001 e in forma definitiva il 19 ottobre 2001.

et $|J| = j_1 + \ldots + j_s$. On pose

$$\|\mathcal{A}\|_{C_0,M} = \sup_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\ |J|=j}} \frac{|a_J|}{C_0^j M_j}.$$

Il est facile de vérifier que $\|.\|_{C_0,M}$ est une norme sur l'espace $\mathbb{C}[[X]](M, C_0)$ défini par

$$\mathbb{C}[[X]](M, C_0) = \left\{ \mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]],\ \mathcal{A} = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} a_J X^J;\ \|\mathcal{A}\|_{C_0,M} < \infty \right\}.$$

On note enfin

$$\mathbb{C}[[X]](M) = \bigcup_{C_0>0} \mathbb{C}[[X]](M, C_0).$$

La condition (H_1) sur la suite M assure la stabilité par produit de $\mathbb{C}[[X]](M)$. C'est donc un anneau. Pour rappeler qu'il est défini par des conditions de croissance sur les coefficients, on dit que $\mathbb{C}[[X]](M)$ est un anneau de séries formelles à croissance contrôlée. On a l'inclusion $\mathbb{C}\{X\} \subset \mathbb{C}[[X]](M) \subset \mathbb{C}[[X]]$. Des exemples de tels anneaux sont donnés par les séries formelles à croissance Gevrey ($M_n = n!^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$). Si l'on a $M_n = 1$ pour tout entier n, on note $M = \mathbf{1}$ et $\mathbb{C}[[X]](\mathbf{1})$ n'est autre que $\mathbb{C}\{X\}$, l'anneau des séries convergentes. La suite M mesure, en quelque sorte, le "défaut d'analyticité" des séries de $\mathbb{C}[[X]](M)$.

La condition (H_1) équivaut à la croissance de la suite $\{M_{n+1}/M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et entraîne

$$M_j M_k \leq M_{j+k},\ \text{ pour tous } j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}.$$

L'étude de $\mathbb{C}[[X]](M)$ amène, parfois, à faire des hypothèses supplémentaires sur la suite M. Ce sont les conditions classiques (H_2) et (H_3), que l'on imposera selon les cas envisagés.

(H_2) il existe $C \geq 1$ tel que $M_{n+1} \leq C^{n+1} M_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(H_3) il existe $C \geq 1$ tel que $M_n \leq C^n M_{n-j} M_j$, pour tout $0 \leq j \leq n$.

L'hypothèse (H_2) est la condition de stabilité par dérivation. L'hypothèse (H_3), qui implique (H_2), est une condition dite de croissance modérée.

Il est facile de vérifier, sous l'hypothèse (H_1), que, si $F = (F_1, \ldots, F_s)$ appartient à $(\mathbb{C}[[X]](M))^s$ et $\mathcal{A}$ appartient à $\mathbb{C}[[X]](M)$, alors $\mathcal{A} \circ F$ appartient encore à $\mathbb{C}[[X]](M)$. On obtient ainsi la stabilité par composition de l'anneau $\mathbb{C}[[X]](M)$. Ce résultat ne surprendra pas les familiers du sujet. On étudie une réciproque. Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), on se propose d'établir une réponse, par exemple, à la question suivante : si $\mathcal{A} \circ F$ appartient à $\mathbb{C}[[X]](M)$ et si F appartient à $(\mathbb{C}[[X]](M))^s$, que peut-on dire de $\mathcal{A}$? Pour cela, on est amené à supposer que le jacobien de F, noté Φ, est non nul dans $\mathbb{C}[[X]]$. En effet, P. M. Eakin et G. M. Harris (voir aussi [2]) ont obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME 1 [5]. *Soit F une application analytique de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$, définie au voisinage de 0, vérifiant $F(0) = 0$ et de jacobien Φ. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

$$(i) \qquad \Phi \text{ est non identiquement nul},$$

$$(ii) \quad \text{pour tout } \mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]], \text{ si } \mathcal{A} \circ F \text{ est analytique, alors } \mathcal{A} \text{ est analytique}.$$

Dans le cas où F est une application analytique de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^p$, avec $p < s$, des théorèmes comparables ont été donnés par R. Moussu et J. C. Tougeron dans [11]. Comme le signalent P. M. Eakin et G. A. Harris, le Théorème 1 peut être vu comme une conséquence d'un théorème très général de A. M. Gabrielov [6]. J. Chaumat et A-M. Chollet ont obtenu des résultats analogues [4] dans le cas où F est analytique et $\mathcal{A}$ une série formelle à croissance contrôlée. De plus, les preuves de [4] permettent, dans le cas où $\mathcal{A}$ et F sont analytiques, un contrôle du rayon de convergence de $\mathcal{A}$ par celui de $\mathcal{A}\circ F$. Pour tout entier k, on note $M^{(k)}$ la suite $\{M_{kn}\}_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2 [4]. *Soit F une application analytique de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$, définie au voisinage de 0, vérifiant $F(0) = 0$ et de jacobien Φ. Soit M une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1). Soit C_0 une constante strictement positive. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$(i) \qquad \Phi \text{ est non identiquement nul},$$

$$(ii) \quad \begin{array}{c} \text{il existe } D_0,\ D_0 > 0 \text{ et } d \text{ un entier, } d \geq 1, \text{ tels que} \\ \text{pour tout } \mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]], \text{ on ait } \|\mathcal{A}\|_{D_0, M^{(d)}} \leq \|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0, M}. \end{array}$$

Dans ce travail, on généralise ce résultat au cas où l'application F est une application formelle à croissance contrôlée. Pour établir "(i) implique (ii)", la méthode utilisée s'inspire des travaux de J. Chaumat et A.-M. Chollet [4] et de V. Thilliez [12]. Cependant, comme ici l'application F n'est plus analytique, on évite le recours aux formules de Cauchy, largement utilisées dans [4]. Pour établir la réciproque, on suit la démarche présentée dans [5]. On a alors le théorème suivant établi dans le Paragraphe 10.

THÉORÈME 3. *Soient M et N deux suites, M vérifiant (H_1) et N vérifiant (H_1) et (H_2). On suppose qu'il existe une constante $D \geq 1$ telle que, pour tout entier n, on ait $N_n \leq D^n M_n$. On suppose aussi que M et N vérifient l'une ou l'autre des conditions (a) ou (b) suivantes.*

$$(a) \qquad M \text{ vérifie } (H_3).$$

$$(b) \qquad \text{il existe } D' \text{ et } \epsilon > 0 \text{ tel que } N_h^{1+\epsilon} \leq D'^h M_h \text{ pour tout entier } h.$$

Soit $F = (F_1, \dots, F_s)$ une application de $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$ de jacobien Φ telle que $F(0) = 0$. Soit C_0 une constante strictement positive. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \qquad \Phi \text{ est non nul dans } \mathbb{C}[[X]]\,,$$

$$(ii) \qquad \begin{array}{c} \text{il existe } C', C' > 0 \text{ et } d \text{ entier, } d \geq 1, \text{ tels que} \\ \text{pour tout } \mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]], \text{ on ait } \|\mathcal{A}\|_{C', M^{(d)}} \leq \|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0, M}\,. \end{array}$$

On rappelle que la condition $N_n \leq D^n M_n$ revient à dire que l'on a $\mathbb{C}[[X]](N) \subset \mathbb{C}[[X]](M)$. On verra que les conditions (a) ou (b) n'interviennent que dans la preuve de "(ii) implique (i)".

Le Théorème 3 contient le Théorème 2. En effet, dans ce cas on a $N = \mathbf{1}$ et la condition (b) est satisfaite. Il contient aussi le Théorème 1 ; on pose $M = N = \mathbf{1}$ et (b) est vérifiée. La preuve donnée ici permet d'obtenir une estimation ponctuelle uniforme des coefficients de la série $\mathcal{A}$ en fonctions de ceux de $\mathcal{A} \circ F$. C'est l'inégalité (5.15). Enfin, comme dans [4], de la preuve de l'implication "$(i) \Rightarrow (ii)$" on tire une estimation du meilleur entier d vérifiant (ii). Ce point est développé dans le Paragraphe 11 et met en évidence le lien avec les inégalités de Chevalley linéaires [2], [6].

Notations 1. Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$, on écrit

$$\mathcal{A} = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} a_J X^J = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J| = j}} a_J X^J = \sum_{j \in \mathbb{N}} H_j \mathcal{A}(X)$$

où $|J|$ désigne la longueur du multi-indice J ; $H_j\mathcal{A}(X)$ n'est autre que le polynôme homogène de degré j dans le développement de $\mathcal{A}$. On note aussi $\mathrm{ord}(\mathcal{A}) = \inf(j \in \mathbb{N}; H_j\mathcal{A}(X) \not\equiv 0)$, l'ordre d'annulation de $\mathcal{A}$, avec la convention $\mathrm{ord}(\mathcal{A}) = \infty$ si $\mathcal{A}$ est nulle.

Soit N une suite de réels positifs vérifiant (H_1) et (H_2).

On dira que les suites M et N sont comparables s'il existe une constante D, $D \geq 1$ telle que l'on ait soit $M_n \leq D^n N_n$, pour tout entier n, soit $N_n \leq D^n M_n$, pour tout entier n. Si deux suites M et N sont comparables, on définit la suite $\max\{M, N\}$ par :

$$\max\{M, N\}_n = D^n N_n, \text{ pour tout entier } n, \text{ si } M_n \leq D^n N_n\,.$$
$$\max\{M, N\}_n = D^n M_n, \text{ pour tout entier } n, \text{ sinon}\,.$$

On considère F une application formelle notée

$$F : (X_1, \dots, X_s) \to (F_1(X_1, \dots, X_s), \dots, F_s(X_1, \dots, X_s))$$

avec, pour tout i, $1 \leq i \leq s$, $F_i(X) \in \mathbb{C}[[X]](N)$ et $F_i(0, \dots, 0) = 0$. Dans toute la suite, on note Φ le jacobien de l'application F. Dans un premier temps, on suppose que $\mu = \mathrm{ord}(\Phi)$ est fini, c'est à dire que le jacobien de l'application

F est non nul. On note $T_{p,l}(X)$, pour $1 \leq l, p \leq s$, les cofacteurs de la matrice jacobienne de F. On appelle $\nu = \inf_{l,p}(\operatorname{ord}(T_{p,l}(X)))$.

Pour $l \in \mathbb{N}^*$ et $(p_1, \dots, p_l) \in \{1, \dots, s\}^l$, on pose

$$D_{(p_1,\dots,p_l)} = \frac{\partial^l}{\partial X_{p_1} \dots \partial X_{p_l}} .$$

Enfin, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la sommation indexée par le k-uplet $(q_1, \dots, q_k)$ de $\{1, \dots, s\}^k$ est représentée par $\sum_{[[q,k]]}$. On a la formule de composition suivante.

LEMME 2 [12]. *Avec les notations précédentes, on a, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et tout $(p_1, \dots, p_l)$ de $\{1, \dots, s\}^l$,*

$$\Phi(X)^{2l-1} D_{(p_1,\dots,p_l)}(\mathcal{A}) \circ F = \sum_{k=1}^{l} \sum_{[[q,k]]} A_{(q_1,\dots,q_k)}^{(p_1,\dots,p_l)}(X) D_{(q_1,\dots,q_k)}(\mathcal{A} \circ F) , \tag{2.1}$$

où les coefficients $A_{(q_1,\dots,q_k)}^{(p_1,\dots,p_l)}$ sont déterminés par récurrence sur l à l'aide des relations

$$A_{(q_1)}^{(p_1)}(X) = T_{p_1,q_1}(X), \text{ pour } l = 1 , \tag{2.2}$$

puis, pour $l > 1$,

$$\begin{aligned} A_{(q_1)}^{(p_1,\dots,p_l)}(X) = {} & \sum_{t=1}^{s} \Phi(X) A_{(t)}^{(p_1)}(X) \frac{\partial A_{(q_1)}^{(p_2,\dots,p_l)}(X)}{\partial X_t} \\ & - (2l-3) \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_t} A_{(t)}^{(p_1)}(X) A_{(q_1)}^{(p_2,\dots,p_l)}(X) , \end{aligned} \tag{2.3}$$

puis, pour $2 \leq k \leq l-1$,

$$\begin{aligned} A_{(q_1,\dots,q_k)}^{(p_1,\dots,p_l)}(X) = {} & \sum_{t=1}^{s} \Phi(X) A_{(t)}^{(p_1)}(X) \frac{\partial A_{(q_1,\dots,q_k)}^{(p_2,\dots,p_l)}(X)}{\partial X_t} \\ & - (2l-3) \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_t} A_{(t)}^{(p_1)}(X) A_{(q_1,\dots,q_k)}^{(p_2,\dots,p_l)}(X) \\ & + \Phi(X) A_{(q_1)}^{(p_1)}(X) A_{(q_2,\dots,q_k)}^{(p_2,\dots,p_l)}(X) , \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$A_{(q_1,\dots,q_l)}^{(p_1,\dots,p_l)}(X) = \Phi(X) A_{(q_1)}^{(p_1)}(X) A_{(q_2,\dots,q_l)}^{(p_2,\dots,p_l)}(X) . \tag{2.5}$$

LEMME 3. *On a*

$$H_j\big(A_{(q_1,\dots,q_k)}^{(p_1,\dots,p_l)}(X)\big) = 0 \text{ si } j < k - \mu + l(\mu + \nu - 1) .$$

PREUVE. Ce résultat sur l'ordre des séries formelles $A_{(q_1,\dots,q_k)}^{(p_1,\dots,p_l)}(X)$ se démontre par une simple récurrence à partir des formules du Lemme 2. □

On note $A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)=\sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\|J|=j}}(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J X^J$. On a une estimation des coefficients $(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J$.

LEMME 4. *Pour tous l et k entiers avec $1\le k\le l$, tous $(p_1,\dots,p_l)$ de $\{1,\dots,s\}^l$ et $(q_1,\dots,q_k)$ de $\{1,\dots,s\}^k$ et tout multi-indice J, on a*

$$\big|(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J\big|\le (C_1C_3)^l(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}\,.$$

où C_3 et C_4 sont des constantes, avec $C_3\ge 1$, $C_4\ge 1$, ne dépendant que de s.

PREUVE. On remarque d'abord que l'expression $N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}$ a bien un sens car, d'après le Lemme 3, on a $\operatorname{ord}(A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X))\ge k-\mu+l(\mu+\nu-1)$. Il suffit donc d'estimer les termes pour tous les multi-indices J de longueur $j\ge k-\mu+l(\mu+\nu-1)$.

Pour obtenir l'estimation demandée, on raisonne là aussi par récurrence sur l. Pour $l=1$, on a $k=1$ et les hypothèses sur F et sur la suite N permettent d'affirmer que le jacobien Φ, $\Phi(X)=\sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\|J|=j}}(\phi)_J X^J$, vérifie

$$|(\phi)_J|\le C_1C_2^jN_{j-\mu}\,, \tag{4.1}$$

et que $T_{p_1,q_1}(X)=\sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\|J|=j}}(a^{p_1}_{q_1})_J X^J$ vérifie

$$|(a^{p_1}_{q_1})_J|\le C_1C_2^jN_{j-\nu}\,, \tag{4.2}$$

pour des constantes C_1 et C_2 bien choisies. On remarquera que l'hypothèse (H_2) intervient ici de manière essentielle. La récurrence est alors amorcée en tenant compte de la relation $A^{(p_1)}_{(q_1)}(X)=T_{p_1,q_1}(X)$. On suppose la propriété vérifiée au rang $l-1$, avec $l\ge 2$. On regarde alors ce qui se passe au rang l. On se convainc facilement, au vue des formules de récurrence du Lemme 2, qu'il suffit d'obtenir l'estimation pour les coefficients $(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J$ avec $2\le k\le l-1$. On a alors, en reprenant (2.4),

$$A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)=B_1(X)+B_2(X)+B_3(X)\,,$$

avec

$$B_1(X)=\sum_{t=1}^{s}\Phi(X)A^{(p_1)}_{(t)}(X)\frac{\partial A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)}{\partial X_t}$$
$$B_2(X)=-(2l-3)\sum_{t=1}^{s}\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_t}A^{(p_1)}_{(t)}(X)A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)$$
$$B_3(X)=\Phi(X)A^{(p_1)}_{(q_1)}(X)A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_2,\dots,q_k)}(X)\,.$$

On est conduit à estimer chacun des trois termes de cette somme.

Estimation du premier terme B_1 : On note

$$\frac{\partial A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)}{\partial X_t} = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} \big(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\big)_J X^J\,. \tag{4.3}$$

On obtient aisément

$$\big|\big(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\big)_J\big| \le (j+1)\big|\big(a^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\big)_{J^{(p_1)}}\big|\,. \tag{4.4}$$

avec $J^{(p_1)} = (j_1,\dots,j_{p_1-1}, j_{p_1}+1, j_{p_1+1},\dots,j_s)$. En appliquant alors l'hypothèse de récurrence au coefficient $(a^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_{J^{(p_1)}}$, on obtient l'estimation

$$\big|\big(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\big)_J\big| \le (C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu+\nu}\,. \tag{4.5}$$

Un terme $(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J$, provenant alors du produit $A^{(p_1)}_{(t)}(X)\frac{\partial A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)}{\partial X_t}$, s'écrit

$$\big(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\big)_J = \sum_{H+I=J}\big(a^{(p_1)}_{(t)}\big)_H\big(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\big)_I\,. \tag{4.6}$$

Et donc, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, de (4.2), (4.5) et (4.6), on a

$$\begin{aligned}&\big|\big(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\big)_J\big|\\ &\quad\le \sum_{H+I=J} C_1C_2^hN_{h-\nu}(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+i-k}\frac{(l+i-k)!}{i!}N_{l+i-k-l(\mu+\nu)+2\mu+\nu}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

En remarquant que, pour tout $i\le j$, $\frac{(l+i-k)!}{i!}\le\frac{(l+j-k)!}{j!}$, et en utilisant la convexité logarithmique de la suite N, on obtient l'estimation

$$\begin{aligned}&\big|\big(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\big)_J\big|\\ &\quad\le C_1(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu}\sum_{H+I=J}C_4^{-h}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

En remarquant alors que $\sum_{H+I=J}C_4^{-h}\le\sum_{h=0}^{+\infty}s^hC_4^{-h}$, on choisit C_4 suffisamment grand pour que la série $\sum_{h=0}^{+\infty}s^hC_4^{-h}$ converge. Il vient donc, si on appelle C_5 cette somme,

$$\big|\big(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\big)_J\big|\le C_5C_1(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu}\,. \tag{4.9}$$

Et donc en multipliant la série obtenue par $\Phi(X)$, en sommant sur s termes et en notant $B_1(X)=\sum_{J\in\mathbb{N}^s}(B_1)_J X^J$, on obtient, pour tout multi-indice J,

$$\begin{aligned}&|(B_1)_J|\\ &\le sC_1C_5\sum_{H+I=J}C_1C_2^h N_{h-\mu}(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+i-k}\frac{(l+i-k)!}{i!}N_{l+i-k-l(\mu+\nu)+2\mu}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Et ainsi, en tenant à nouveau compte de la convexité logarithmique de la suite N et de la convergence de la série $\sum_H C_4^{-h}$, on a

$$|(B_1)_J|\le sC_1^2C_5^2(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}\,.\tag{4.11}$$

Estimation du deuxième terme B_2 : On note

$$\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_t}A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)=\sum_{J\in\mathbb{N}^s}\left(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\right)_J X^J\,.\tag{4.12}$$

On obtient aisément, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, de (4.1) et (4.12),

$$\begin{aligned}\left|\left(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\right)_J\right|\le\sum_{H+I=J}\Bigg(&(h+1)C_1C_2^{h+1}N_{h-\mu+1}(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l-1+i-k}\\ &\times\frac{(l-1+i-k)!}{i!}N_{l-1+i-k-l(\mu+\nu)+2\mu+\nu}\Bigg)\,.\end{aligned}\tag{4.13}$$

En majorant $h+1$ par 2^h et en reprenant les idées utilisées lors de l'estimation de B_1, on obtient l'estimation

$$\begin{aligned}\left|\left(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\right)_J\right|&\le C_1(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\\ &\quad\times\frac{(l-1+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu+\nu}\sum_{H+I=J}\frac{2^h}{C_4^{h+1}}\,.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Ainsi, quitte à augmenter C_4 pour que la série $\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{2^h s^h}{C_4^{h+1}}$ converge et en notant C_6 sa somme, on a alors l'inégalité

$$\begin{aligned}\left|\left(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\right)_J\right|&\le C_6C_1(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\\ &\quad\times\frac{(l-1+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu+\nu}\,.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Et donc en multipliant par $A_{(t)}^{(p_1)}(X)$, on obtient après sommation sur s termes et multiplication par $(2l-3)$, une majoration du terme $(B_2)_J$, pour tout multi-indice J,

$$(4.16)\qquad \begin{aligned}|(B_2)_J| \leq sC_1^2C_5C_6(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}(2l-3)\\ \times \frac{(l-1+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}\,.\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer qu'il suffit d'estimer les termes pour $j \geq k-\mu+l(\mu+\nu-1)$, car, d'après le Lemme 3,

$$(4.17)\qquad \left(a_{(q_1,\dots,q_k)}^{(p_1,\dots,p_l)}\right)_J = 0 \text{ si } j < k-\mu+l(\mu+\nu-1)\,.$$

Dans ce cas, on a $j-k \geq \mu+2\nu-2 \geq 0$. On a donc l'inégalité triviale

$$(4.18)\qquad (2l-3)(l-1+j-k)! \leq 2(l+j-k)!\,.$$

Et ainsi, (4.16) devient

$$(4.19)\qquad |(B_2)_J| \leq 2sC_1^2C_5C_6(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}\,.$$

Estimation du troisième terme B_3 : On note

$$(4.20)\qquad A_{(q_1)}^{(p_1)}(X)A_{(q_2,\dots,q_k)}^{(p_2,\dots,p_l)}(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^s}\left(b_{(q_1,\dots,q_k)}^{(p_1,\dots,p_l)}\right)_J X^J\,.$$

On obtient aisément, de la même manière,

$$(4.21)\qquad \left|\left(b_{(q_1,\dots,q_k)}^{(p_1,\dots,p_l)}\right)_J\right| \leq C_5C_1(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu}.$$

Et donc, en remarquant qu'une multiplication par $\Phi(X)$ se traduit par une multiplication par C_1C_5 de l'estimation et une translation de $-\mu$ sur la suite N, on obtient une majoration du terme $(B_3)_J$, pour tout multi-indice J,

$$(4.22)\qquad |(B_3)_J| \leq C_1^2C_5^2(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}\,.$$

On obtient alors en sommant les trois estimations (4.11), (4.19) et (4.22) l'inégalité

$$(4.23)\qquad \begin{aligned}\left|\left(a_{(q_1,\dots,q_k)}^{(p_1,\dots,p_l)}\right)_J\right| \leq (C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu+1}\\ \times\left(sC_1^2C_5^2+2sC_1^2C_5C_6+C_1^2C_5^2\right)\end{aligned}$$

En choisissant alors la constante C_3 telle que $C_3 = C_1C_5((s+1)C_5+2sC_6)$, la propriété est bien vérifiée au rang l. □

On obtient alors le théorème suivant.

THÉORÈME 5. *Soit M une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1). Soit N une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1) et (H_2). On suppose que M et N sont comparables. Soit $F(X_1, \dots, X_s) = (F_1(X), \dots, F_s(X))$ dans $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$ vérifiant $F(0) = 0$ et de jacobien Φ non identiquement nul. Il existe une constante C', $C' > 0$, ne dépendant que de F, telle que pour tout $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}[[X]]$ et tout $C_0 > 1$, on ait*

$$\|\mathcal{A}\|_{C' C_0^{\mu-\nu+1}, \max\{N^{(\mu-\nu+1)}, M^{(\mu-\nu+1)}\}} \leq \|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0, M} .$$

PREUVE. D'après (2.1), on a

$$\Phi(X)^{2l-1} D_{(p_1, \dots, p_l)}(\mathcal{A}) \circ F = C_{(p_1, \dots, p_l)}(X), \tag{5.1}$$

avec

$$\begin{aligned} C_{(p_1, \dots, p_l)}(X) &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{[[q,k]]} A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X) D_{(q_1, \dots, q_k)}(\mathcal{A} \circ F) \\ &= \sum_{J \in \mathbb{N}^s} \left(c^{(p_1, \dots, p_l)}\right)_J X^J . \end{aligned} \tag{5.2}$$

On pose alors

$$A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X) D_{(q_1, \dots, q_k)}(\mathcal{A} \circ F)(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} \left(b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}\right)_J X^J . \tag{5.3}$$

On obtient aisément, compte tenu du Lemme 4 et de l'hypothèse $\|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0, M} < \infty$, l'existence d'une constante C_7 telle que

$$\begin{aligned} \left|\left(b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}\right)_J\right| &\leq \sum_{H+I=J} (C_1 C_3)^l (C_2 C_4)^{l+h-k} \frac{(l+h-k)!}{h!} \\ &\quad \times N_{l+h-k-l(\mu+\nu)+\mu} C_7 C_0^{i+k} \frac{(i+k)!}{i!} M_{i+k} . \end{aligned} \tag{5.4}$$

D'une part, d'après la convexité logarithmique des suites, on a

$$N_{l+h-k-l(\mu+\nu)+\mu} M_{i+k} \leq \max\{M, N\}_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} . \tag{5.5}$$

D'autre part, il faut remarquer que, dans la somme $\sum_{H+I=J}$, on a $h + i = j$. Or, d'après le Lemme 3, on a $h \geq k - \mu + l(\mu + \nu - 1)$. Ainsi, on a l'inégalité

$$C_0^{i+k} \leq C_0^{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} . \tag{5.6}$$

Et enfin, en utilisant, pour tout multi-indice $R = (r_1, \dots, r_s)$, avec $|R| = r$, $R! = r_1! \dots r_s!$, l'inégalité $r! \leq (2^{s-1})^r R!$ plusieurs fois, on obtient

$$\frac{(l+h-k)!}{h!}\frac{(i+k)!}{i!} \leq 2^{i+l+h} l! \,. \tag{5.7}$$

Ainsi, (5.4) devient

$$\begin{aligned} \left|\left(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}\right)_J\right| \leq\, & 2^{l+j} l!(C_1C_3)^l (C_2C_4)^{l+j-k} C_7 C_0^{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} \\ & \times \max\{M, N\}_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} \sum_{H+I=J} (C_2C_4)^{-i} \,. \end{aligned} \tag{5.8}$$

La série $\sum_{H+I=J}(C_2C_4)^{-i}$ converge ; on peut donc majorer ce terme par C_8. On majore alors après la double sommation le nombre de termes par $2^l s^l$ et on obtient l'estimation

$$\begin{aligned} \left|\left(c^{(p_1,\dots,p_l)}\right)_J\right| \leq\, & 2^{l+j}(2s)^l l!(C_1C_3)^l (C_2C_4)^{l+j-1} C_7 C_8 C_0^{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} \\ & \times \max\{M, N\}_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} \,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

On reprend la relation (5.1). On a donc

$$C_{(p_1,\dots,p_l)}(X) = \Phi(X)^{2l-1} D_{(p_1,\dots,p_l)}(\mathcal{A}) \circ F \,. \tag{5.10}$$

On en déduit ordre$(C_{(p_1,\dots,p_l)}(X)) \geq (2l-1)\mu$. En considérant les termes de degré $(2l-1)\mu$ dans (5.10), on a

$$H_{(2l-1)\mu}(\Phi(X)^{2l-1}) l_1! \dots l_s! a_{(l_1,\dots,l_s)} = \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\ |J|=(2l-1)\mu}} \left(c^{(p_1,\dots,p_l)}\right)_J X^J \,. \tag{5.11}$$

Ainsi, si on note $\Phi(X)^{2l-1} = \sum_{J\in\mathbb{N}^s}(\phi^{(2l-1)})_J X^J$, on obtient, pour tout multi-indice J, avec $|J| = (2l-1)\mu$,

$$\left(c^{(p_1,\dots,p_l)}\right)_J = l_1! \dots l_s! a_{(l_1,\dots,l_s)} \left(\phi^{(2l-1)}\right)_J \,. \tag{5.12}$$

On note alors

$$\Phi(X) = \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\ |J|\geq\mu}} (\phi)_J X^J \,.$$

On ordonne l'ensemble des multi-indices J de $\mathbb{N}^s$ suivant l'ordre habituel, défini, pour $I = (i_1, \dots, i_s)$ et $J = (j_1, \dots, j_s)$, par

$$\begin{gathered} I \leq J \text{ équivaut à } |I| < |J|, \text{ ou } I = J \,, \\ \text{ou } |I| = |J| \text{ et } \exists k \text{ tel que } i_l = j_l, \text{ pour } l = 1, \dots, k-1, \text{ et } i_k > j_k \,. \end{gathered}$$

Si on note $(p_1, \dots, p_s)$ le premier multi-indice tel que $(\phi)_{(p_1,\dots,p_s)} \neq 0$, alors on a $p_1 + \dots + p_s = \mu$ et

$$(\phi^{(2l-1)})_{((2l-1)p_1,\dots,(2l-1)p_s)} = \big((\phi)_{(p_1,\dots,p_s)}\big)^{2l-1} . \tag{5.13}$$

En utilisant alors la relation

$$\big(c^{(p_1,\dots,p_l)}\big)_{((2l-1)p_1,\dots,(2l-1)p_s)} = l_1! \dots l_s! a_{(l_1,\dots,l_s)} \big((\phi)_{(p_1,\dots,p_s)}\big)^{2l-1} \tag{5.14}$$

et l'estimation (5.9), on a

$$\begin{aligned} \big|\big(c^{(p_1,\dots,p_l)}\big)_{((2l-1)p_1,\dots,(2l-1)p_s)}\big| &\leq l!(4C_2C_4)^{-\mu} C_7 C_8 C_9^l C_0^{l(\mu-\nu+1)} \\ &\quad \times \max\{M, N\}_{l(\mu-\nu+1)} , \end{aligned} \tag{5.15}$$

avec $C_9 = 4^{\mu+1} s C_1 C_3 (C_2C_4)^{2\mu+1}$. On obtient bien le résultat annoncé en majorant $\frac{l!}{l_1!\dots l_s!}$ par $(2^{s-1})^l$. $\square$

Remarque. Les constantes de l'inégalité (5.15) ne dépendent que de l'application F. La division par le coefficient constant (5.13) donne une estimation ponctuelle uniforme des coefficients de $\mathcal{A}$ en fonction de ceux de $\mathcal{A} \circ F$. E. Bierstone a utilisé ce résultat pour démontrer un théorème sur l'extension du domaine d'une fonction sous-analytique [1].

On montre, dans la suite, que les résultats présentés dans les paragraphes précédents sont optimaux. On analyse le cas où le jacobien Φ de l'application F est nul.

Définitions et notations 6. Dans toute la suite, comme dans le Théorème 3 de l'introduction, on suppose que, pour tout n, on a $N_n \leq D^n M_n$. On suppose aussi que les suites M et N vérifient (H_1) et que la suite N satisfait (H_2). On suppose, enfin, que M et N vérifient l'une ou l'autre des conditions suivantes.

$$(a) \qquad M \text{ vérifie } (H_3) .$$

$$(b) \qquad \text{il existe } D' \text{ et } \epsilon > 0 \text{ tel que } N_h^{1+\epsilon} \leq D'^h M_h \text{ pour tout entier } h .$$

On peut remarquer que la condition (a) permet d'affirmer

$$\exists\, i > 0,\ \exists\, E > 0, \text{ tels que } \forall\, n \in \mathbb{N}^* (M_n)^{1/n} \leq E n^i . \tag{6.1}$$

Ce résultat figure dans [3], Remarque 32 b.

Soit r un réel strictement positif et $\tilde{r} = (r, \dots, r)$. On pose, pour une série formelle $\mathcal{A}(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} a_J X^J$,

$$\|\mathcal{A}\|_{\tilde{r}}^{(M)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J| = j}} \frac{|a_J|}{M_j} r^j .$$

Le lemme suivant donne l'équivalence entre les normes $\|.\|_{C_0,M}$ et $\|.\|_{\tilde{r}}^{(M)}$. On utilisera indifféremment l'un ou l'autre des points de vue.

LEMME. *Soit $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}[[X]]$ telle qu'il existe $C_0 > 0$ pour lequel on ait $\|\mathcal{A}\|_{C_0,M} < \infty$. Alors pour toute constante r, vérifiant $r < 1/sC_0$, on a*

$$\|\mathcal{A}\|_{r^{-1},M} \leq \|\mathcal{A}\|_{\tilde{r}}^{(M)} \leq \frac{1}{1-sC_0r}\|\mathcal{A}\|_{C_0,M}\,.$$

Soient $\mathcal{A}(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} a_J X^J$, $\mathcal{B}(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} b_J X^J$ et $S(y) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j y^j$, on notera $\mathcal{A} \ll S$, lorsque, pour tout entier j, on a $\sum_{|J|=j} |a_J| \leq |s_j|$. Si les coefficients s_j sont positifs, on a alors facilement la propriété

$$\mathcal{A} \ll S,\ \mathcal{B} \ll S \text{ implique } \mathcal{AB} \ll S^2\,. \tag{6.2}$$

Enfin, on note $(\mathcal{P})$ la propriété

$$(\forall\ \ P \in \mathbb{C}[X])(P \circ F = 0 \Rightarrow P = 0) \tag{$\mathcal{P}$}$$

Les deux lemmes suivants reprennent des idées et des notations de P. M. Eakin et G. M. Harris.

LEMME 7. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et soient $F_1, \ldots, F_s$ des séries formelles de $\mathbb{C}[[X]](N)$, ne dépendant que des $s-1$ premières variables, telles que $F = (F_1, \ldots, F_s)$ vérifie $\mathcal{P}$. Alors il existe une suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :*

(i) $\qquad P_k \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_s]$ *est de degré* k

(ii) $\qquad \max\{|b|$ *tel que* b *est un coefficient de* $P_k\} = 1$

(iii) $\exists\, r_0 > 0$ *tel que* $\forall\, r < r_0$, $\forall\, e \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{k\to\infty} \left(M_{ek}\|P_k(F_1, \ldots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)}\right)^{1/k} = 0\,.$

PREUVE. Soit $P_k \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_s]$ de degré k. D'après [5], on peut choisir P_k tel que

$$\operatorname{ord}(P_k(F_1, \ldots, F_s)) \geq [C_{10}k^{s/(s-1)}]\,, \tag{7.1}$$

pour une constante $C_{10} > 0$ bien choisie. Pour obtenir (ii), on divise P_k ainsi construit par le plus grand coefficient en valeur absolue. Par hypothèse, il existe $t_0 > 0$ et $B > 0$ tels que, pour tout $t \leq t_0$ et pour tout $l = 1, 2, \ldots, s$, on ait $\|F_l\|_{\tilde{t}}^{(N)} < B$. On obtient alors facilement $F_l \ll \sum_{k=0}^{\infty} BN_k \frac{y^k}{t^k}$. Ainsi, si on note $P_k = \sum_{i=0}^{k} \sum_{\substack{I\in\mathbb{N}^s;\\ |I|=i}} p_I X^I$, on obtient, en tenant compte de (ii),

$$\forall\, t \leq t_0,\quad \sum_{i=0}^{k} \sum_{\substack{I\in\mathbb{N}^s;\\ |I|=i}} p_I F_1^{i_1} \ldots F_s^{i_s} \ll \sum_{i=0}^{k} \sum_{\substack{I\in\mathbb{N}^s;\\ |I|=i}} \left(\sum_{h=0}^{\infty} BN_h \frac{y^h}{t^h}\right)^i\,. \tag{7.2}$$

Or, comme $i = |I| \leq k$, on a $(\sum_{h=0}^{\infty} BN_h \frac{y^h}{t^h})^i \ll (\sum_{h=0}^{\infty} BN_h \frac{y^h}{t^h})^k$ et donc on en déduit l'inégalité

$$\forall t \leq t_0,\ P_k(F_1, \dots, F_s) \ll \binom{k+s}{s} \left(\sum_{h=0}^{\infty} BN_h \frac{y^h}{t^h}\right)^k . \tag{7.3}$$

On montre alors facilement par récurrence

$$\left(\sum_{h=0}^{\infty} N_h \frac{y^h}{t^h}\right)^k \ll \sum_{h=0}^{\infty} N_h \binom{h+k-1}{k-1} \frac{y^h}{t^h} . \tag{7.4}$$

Ainsi, on a donc

$$\forall t \leq t_0,\ P_k(F_1, \dots, F_s) \ll \binom{k+s}{s} B^k \sum_{h=0}^{\infty} \binom{h+k-1}{k-1} N_h \frac{y^h}{t^h} . \tag{7.5}$$

On utilise alors (7.1) et l'inégalité $\binom{h+k-1}{k-1} \leq 2^{h+k}$ pour obtenir

$$\forall t \leq t_0,\ P_k(F_1, \dots, F_s) \ll 2^{s+k} 2^k B^k \sum_{h \geq [C_{10} k^{s/(s-1)}]} 2^h N_h \frac{y^h}{t^h} . \tag{7.6}$$

Premier cas. La condition (a) est vérifiée.

L'inégalité (7.6) devient, par définition de la norme et en utilisant l'inégalité $N_n \leq D^n M_n$,

$$\forall t \leq t_0,\ \|P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)} \leq 2^s 4^k B^k \left(\frac{2Dr}{t}\right)^{[C_{10} k^{s/(s-1)}]} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2Dr)^h}{t^h} . \tag{7.7}$$

On a alors, pour tout $e \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \leq t_0$,

$$\begin{aligned} \left(M_{ek} \|P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)}\right)^{1/k} &\leq 2^{s/k} 4B (M_{ek})^{1/k} \\ &\times \left(\frac{2Dr}{t}\right)^{[C_{10} k^{1/(s-1)}]} \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2Dr)^h}{t^h}\right)^{1/k} . \end{aligned} \tag{7.8}$$

On remarque facilement que, pour $r < t/(2D)$, la série de droite converge. On note S sa somme. On a ainsi

$$\left(M_{ek} \|P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)}\right)^{1/k} \leq (2^s S)^{1/k} 4B (M_{ek})^{1/k} \left(\frac{2Dr}{t}\right)^{[C_{10} k^{1/(s-1)}]} . \tag{7.9}$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse (H_3). En effet, d'après (6.1), on obtient l'existence d'un entier i tel que

$$\begin{aligned}\forall e>0,\ \forall t \le t_0 \big(M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)}\big)^{1/k} \\ \le (2^s S)^{1/k} 4 B E^e (ek)^{ei} \Big(\frac{2Dr}{t}\Big)^{[C_{10} k^{1/(s-1)}]}.\end{aligned} \tag{7.10}$$

Il est alors facile de conclure que, pour tout $t \le t_0$, il existe r_0 tel que, pour tout $r < \min(r_0, t/(2D))$ et pour tout $e>0$, on a $\lim_{k\to\infty}(M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} = 0$.

SECOND CAS. La condition (b) est vérifiée.

L'inégalité (7.6) devient, par définition,

$$\forall t \le t_0,\ \| P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)} \le 2^s 4^k B^k \sum_{h \ge [C_{10} k^{s/(s-1)}]} \frac{N_h}{M_h} \frac{(2r)^h}{t^h}. \tag{7.11}$$

On a alors, pour tout $e>0$ et tout $t \le t_0$,

$$\big(M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)}\big)^{1/k} \le 2^{s/k} 4B \left(\sum_{h \ge [C_{10} k^{s/(s-1)}]} M_{ek} \frac{N_h}{M_h} \frac{(2r)^h}{t^h} \right)^{1/k}. \tag{7.12}$$

On utilise (b). On obtient alors

$$\begin{aligned}\big(M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)}\big)^{1/k} \le 2^{s/k} 4B \frac{M_{ek}^{1/k}}{(M_{[C_{10} k^{s/(s-1)}]})^{\epsilon/k(1+\epsilon)}} \\ \times \left(\sum_{h \ge [C_{10} k^{s/(s-1)}]} \frac{(2D'^{1/(1+\epsilon)} r)^h}{t^h} \right)^{1/k}.\end{aligned} \tag{7.13}$$

D'une part, on remarque que l'on a, pour k suffisament grand,

$$[C_{10} k^{s/(s-1)}] \ge e \left[\frac{1+\epsilon}{\epsilon} \right] k, \tag{7.14}$$

D'autre part, on a clairement d'après (H_1), pour tout entier $\alpha \ge 1$,

$$M_{\alpha k} \ge M_k^{\alpha}. \tag{7.15}$$

De (7.13), on tire alors, en appliquant (7.14) avec $\alpha = [\frac{1+\epsilon}{\epsilon}]$,

$$\big(M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)}\big)^{1/k} \le 2^{s/k} 4B \left(\sum_{h \ge [C_{10} k^{s/(s-1)}]} \frac{(2D'^{1/(1+\epsilon)} r)^h}{t^h} \right)^{1/k}. \tag{7.16}$$

On remarque facilement alors que, pour $r < t/(2D')$, la série de droite converge. Il est alors facile de conclure que, pour tout $t \le t_0$, il existe r_0 tel que, pour tout $r < \min(r_0, t/(2D))$ et pour tout entier $e > 0$, on a $\lim_{k\to\infty}(M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} = 0$. □

REMARQUE. La condition (a) n'est pas nécessaire. En effet, il suffit que la suite M vérifie la condition suivante

$(H_3^{'})$ il existe une constante C positive telle que $M_n \leq C^{n^{\frac{s}{s-1}}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Clairement, (H_3) implique $(H_3^{'})$.

LEMME 8. *Soit $F = (F_1, \dots, F_s)$ une application formelle, sans terme constant, de $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$ et dont le jacobien Φ est nul. Alors il existe deux applications formelles G et H, de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$, appartenant à $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$, dont les jacobiens sont non nuls et telles que $G \circ F \circ H$ ne dépende que des $s-1$ premières variables.*

PREUVE. C'est une simple adaptation de la preuve donnée dans [5] au cas des séries formelles à croissance contrôlée. Il suffit, pour cela, d'utiliser le fait que la racine d-ième d'une série formelle à croissance contrôlée par la suite N est encore une série formelle à croissance contrôlée par la suite N [9]. □

On déduit des Lemmes 7 et 8 le résultat suivant.

PROPOSITION 9. *Soit $F = (F_1, \dots, F_s)$ une application formelle, sans terme constant, de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$, appartenant à $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$, et dont le jacobien Φ est nul. Soient C_0 et C' deux constantes strictement positives et d un entier supérieur ou égal à 1. Il existe une série formelle $\mathcal{A}$ qui vérifie*

$$\|\mathcal{A}\|_{C',M^{(d)}} = \infty \textit{ et } \|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0,M} < \infty .$$

PREUVE.

PREMIER CAS. On suppose que l'application F ne vérifie pas la propriété $(\mathcal{P})$. On a alors l'existence d'un polynôme P de degré p tel que $P(F_1, \cdots, F_s) = 0$. Quitte à le diviser par le maximum des modules de ses coefficients, on peut supposer $\max\{|a|, a \text{ coefficient de } P\} = 1$. En posant alors

$$\mathcal{A}(X_1, \cdots, X_s) = \sum_{i=\max(2,p)}^{\infty} a_{2i!}\big(P(X_1, \dots, X_s)\big)^{\frac{i!}{p}} X_1^{i!}, \tag{9.1}$$

on remarque que $\mathcal{A}$ est bien défini car, pour chaque i, $(P(X_1, \dots, X_s))^{\frac{i!}{p}} X_1^{i!}$ est de degré $2(i!)$ et d'ordre $\geq i!$. Ainsi, les termes d'indice $i \geq 2$ ne se mélangent pas car $2(i!) < (i+1)!$. Avec un bon choix de $a_{2(i!)}$, on aura $\|\mathcal{A}\|_{C',M^{(d)}} = \infty$ et, par construction, $\mathcal{A} \circ F = 0$, ce qui donne le résultat voulu.

SECOND CAS. Dans ce cas, on suppose que l'application F vérifie la propriété $(\mathcal{P})$. On utilise alors le fait que toute application formelle telle que $F(0) = 0$ et dont le jacobien est identiquement nul ne dépend, à changement de variables près, que des $s-1$ premières variables. Le Lemme 8 donne deux applications formelles G et H, satisfaisant les mêmes conditions de croissance que F, telles que l'application $T = G \circ F \circ H$ ne dépende que des $s-1$

premières variables. Alors, en utilisant le Lemme 7, on pose, pour $r > 0$ assez petit,

$$\mathcal{A}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\|P_{i!}(T_1, \dots, T_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)}} P_{i!}(X_1, \dots, X_s) X_1^{i!} . \tag{9.2}$$

On remarque que $\mathcal{A}$ est bien défini car, pour chaque i, $P_{i!}(T_1, \dots, T_s) \neq 0$ et $P_{i!}(X_1, \dots, X_s)X_1^{i!}$ est de degré $2(i!)$ et d'ordre $\geq i!$. Ainsi, les termes d'indice $i \geq 2$ ne se mélangent pas car $2(i!) < (i+1)!$. En outre, pour chaque indice i, le polynôme $P_{i!}$ a un coefficient égal à 1. De plus, d'après le Lemme 7, pour tout entier k, $i! \leq k \leq 2i!$, et, pour tout $e > 0$, on a $\lim_{i\to\infty}(1/\|M_{ek} P_{i!}(T_1, \dots, T_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} = \infty$. Ainsi, on a

$$\text{pour tout } d > 0 \text{ et pour tout } r > 0, \quad \|\mathcal{A}\|_{\tilde{r}}^{M^{(d)}} = \infty . \tag{$*$}$$

Mais, on remarque, quitte à changer r, que l'on a la majoration

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A} \circ T\|_{\tilde{r}}^{(M)} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\|P_{i!}(T_1, \dots, T_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)}} \|P_{i!}(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)} (\|T_1\|_{\tilde{r}}^{(M)})^{i!} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (\|T_1\|_{\tilde{r}}^{(M)})^{i!} < \infty . \end{aligned}$$

Le lemme est donc vrai pour l'application T. Supposons qu'il ne soit pas vérifié pour l'application F. On suppose donc que toutes les séries formelles $\tilde{\mathcal{A}}$, telles que $\|\tilde{\mathcal{A}} \circ F\|_{C_0,M} < \infty$, satisfont l'inégalité

$$\|\tilde{\mathcal{A}}\|_{C',M^{(d)}} \leq \|\tilde{\mathcal{A}} \circ F\|_{C_0,M} \tag{9.3}$$

pour C' et d bien choisis. D'après le Paragraphe 6, cela revient à supposer que toutes les séries formelles $\tilde{\mathcal{A}}$, vérifiant $\|\tilde{\mathcal{A}} \circ F\|_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty$, satisfont l'inégalité

$$\|\tilde{\mathcal{A}}\|_{\tilde{r}'}^{(M^{(d)})} \leq \|\tilde{\mathcal{A}} \circ F\|_{\tilde{r}}^{(M)} \tag{9.4}$$

pour r' et d bien choisis. Quitte à changer r, comme les coefficients des séries de l'application H sont contrôlées par la suite N, donc aussi par la suite M, on peut supposer

$$\|\tilde{\mathcal{A}} \circ F \circ H\|_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty . \tag{9.5}$$

On a donc, en notant k_h la constante associée, dans le Théorème 5, à l'application H, puisque celle-ci est de jacobien non nul, l'existence d'une constante r_1 telle que

$$\|\tilde{\mathcal{A}} \circ F\|_{\tilde{r}_1}^{(M^{(k_h)})} \leq \|\tilde{\mathcal{A}} \circ F \circ H\|_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty . \tag{9.6}$$

Soit $\mathcal{A}$ la série construite ci-dessus. On pose $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \circ G$. L'inégalité (9.6) devient

$$\|\mathcal{A} \circ G \circ F\|_{\tilde{r}_1}^{(M^{(k_h)})} \leq \|\mathcal{A} \circ G \circ F \circ H\|_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty . \tag{9.7}$$

Or, par hypothèse, on a $\|\mathcal{A} \circ G\|_{\tilde{r}'}^{(M^{(d)})} \leq \|\mathcal{A} \circ G \circ F\|_{\tilde{r}}^{(M)}$. Quitte à diminuer r', on a donc aussi

$$\|\mathcal{A} \circ G\|_{\tilde{r}'}^{(M^{(k_h d)})} \leq \|\mathcal{A} \circ G \circ F\|_{\tilde{r}_1}^{(M^{(k_h)})} . \tag{9.8}$$

Comme le jacobien de l'application G est non nul, d'après le Théorème 5, il existe un entier k_g et une constante r_2 tels que

$$\|\mathcal{A}\|_{\tilde{r}_2}^{(M^{(k_g k_h d)})} \leq \|\mathcal{A} \circ G\|_{\tilde{r}'}^{(M^{(k_h d)})} . \tag{9.9}$$

On obtient donc, en regroupant les inégalités (9.7), (9.8) et (9.9), l'inégalité

$$\|\mathcal{A}\|_{\tilde{r}_2}^{(M^{(k_h k_g d)})} \leq \|\mathcal{A} \circ G \circ F \circ H\|_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty . \tag{9.10}$$

Ceci contredit la propriété $(*)$. On a donc le résultat annoncé. $\square$

On a donc, en regroupant le Théorème 5 et la Proposition 9, le théorème suivant.

Théorème 10. *Soient M et N deux suites, M vérifiant (H_1) et N vérifiant (H_1) et (H_2). On suppose qu'il existe une constante $D \geq 1$ telle que, pour tout entier n, on ait $N_n \leq D^n M_n$. On suppose aussi que M et N vérifient l'une ou l'autre des conditions (a) ou (b). Soit $F = (F_1, \dots, F_s)$ une application formelle de $\mathbb{C}[[X]](N)^s$ de jacobien Φ. Soit C_0 une constante strictement positive. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $$\Phi \text{ est non nul dans } \mathbb{C}[[X]] ,$$

(ii) $$\begin{gathered}\text{il existe } C', C' > 0 \text{ et } d \text{ entier } d \geq 1 \text{ tels que} \\ \text{pour tout } \mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]], \text{ on ait } \|\mathcal{A}\|_{C', M^{(d)}} \leq \|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0, M} .\end{gathered}$$

Remarques 11. a) Il est intéressant de noter que, dans le cas où l'application formelle F ne vérifie pas la propriété $\mathcal{P}$, la série formelle (9.1) construite dans la preuve du Lemme 9 peut appartenir à n'importe quelle classe avec un bon choix des coefficients $a_{2i!}$. On peut alors se demander, dans le cas où l'application formelle F vérifie la propriété $\mathcal{P}$, à quelle classe appartient la série formelle (9.2)?

b) On dispose d'exemples pour lesquels $\mu - \nu + 1$ est le meilleur exposant d possible dans l'inégalité (ii) du Théorème 10. Il suffit de considérer l'application $F(X) = (X_1^k, X_2, \dots, X_s)$, où k est un entier non nul. Un calcul élémentaire donne $\mu - \nu + 1 = k$. La série $\mathcal{A}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} M_{kj} X_1^j$ est alors telle que $\|\mathcal{A} \circ F\|_{C,M} = \|\mathcal{A}\|_{C^k, M^{(k)}}$.

c) On peut noter aussi que l'assertion (i) du Théorème 10 est équivalente à

$$(A) \quad \text{il existe } D > 0 \text{ tel que, pour tout } \mathcal{A} \text{ de } \mathbb{C}[[X]],\ \operatorname{ord}(\mathcal{A} \circ F) \leq D \operatorname{ord}(\mathcal{A}).$$

Le fait que (i) implique (A) est une étape dans la preuve du théorème sur les fonctions composées de Glaeser [7], [13]. La réciproque est démontrée dans ([5], Lemme 4.2). On peut s'en convaincre facilement au vu de l'inégalité (7.1) ci-dessus. Étant donné F, on note alors D_F la meilleure constante D de l'inégalité (A). On a $D_F \leq \mu - \nu + 1$ [4]. Dans [4], J. Chaumat et A.-M. Chollet posent la question suivante : peut-on trouver une application F telle que D_F soit strictement inférieure à $\mu - \nu + 1$? Dans [10], en réponse à cette question, on donne une famille d'exemples où l'on a $D_F < \mu - \nu + 1$. On peut prendre $F(X, Y) = (X^3 + Y^4, X^2)$. On a alors $D_F = \frac{7}{2}$ et $\mu - \nu + 1 = 4$. Il est facile de voir que, selon la donnée F, le meilleur entier d de l'inégalité (ii) de 10 vérifie $D_F \leq d \leq \mu - \nu + 1$. A-t-on $d = D_F$?

d) Soit $\mathcal{I}$ l'idéal des relations entre les F_i, avec $1 \leq i \leq s$, défini par

$$\mathcal{I} = \{\mathcal{R} \in \mathbb{C}[[X]] \text{ tel que } \mathcal{R} \circ F = 0\}.$$

Si $\mathcal{I}$ n'est pas réduit à $\{0\}$, la propriété (A) n'est pas vérifiée et le jacobien de l'application F est donc nul.

On considère alors l'inégalité de Chevalley linéaire suivante [2], [6]

$$(A') \quad \begin{gathered} \text{il existe } a \text{ et } b \text{ tels que, pour tout } \mathcal{A} \text{ de } \mathbb{C}[[X]], \\ \operatorname{ord}(\mathcal{A} \circ F) \geq ak + b \Rightarrow \text{ il existe } \mathcal{R} \in \mathbb{C}[[X]] \\ \text{tel que } \mathcal{A} \circ F = \mathcal{R} \circ F \text{ et } \operatorname{ord}(\mathcal{R}) \geq k. \end{gathered}$$

On peut poser la question suivante : a-t-on l'équivalence entre (A') et l'assertion

$$(iii) \quad \begin{gathered} \mathcal{A} \circ F \in \mathbb{C}[[X]](M) \text{ implique} \\ \text{il existe } d \text{ entier, } d \geq 1, \text{ et } \mathcal{R} \text{ dans } \mathbb{C}[[X]](M^{(d)}) \\ \text{tel que } \mathcal{A} \circ F = \mathcal{R} \circ F \ ? \end{gathered}$$

Clairement, si $\mathcal{I}$ est réduit à $\{0\}$, la propriété (A') n'est autre que (A), l'assertion (iii) s'identifie à (ii) et le théorème établi dans le Paragraphe 10 répond à la question.

RÉFÉRENCES

[1] E. Bierstone, *Control of radii of convergence and extension of subanalytic functions*, Preprint, University of Toronto (2001).

[2] E. Bierstone – P. D. Milman, *Geometric and differential properties of subanalytic sets*, Ann. of Math. **147** (1998), 731-785.

[3] J. Chaumat – A. M. Chollet, *Propriétés de l'intersection des classes de Gevrey et de certaines autres classes*, Bull. Sci. Math. **122** (1998), 455-485.

[4] J. Chaumat – A. M. Chollet, *On composite formal power series*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 1691-1703.

[5] P. M. Eakin – G. A. Harris, *When $\Phi(f)$ convergent implies f is convergent*, Math. Ann. **229** (1977), 201-210.

[6] A. M. Gabrielov, *Formal Relations Between Analytic Functions*, Math. USSR-Iz. **7** (1973), 1056-1088.

[7] G. Glaeser, *Fonctions composées différentiables*, Ann. of Math. (1963), 193-209.

[8] B. Malgrange, *Sur le théorème de Maillet*, Asymptotic Anal. **2** (1989), 1-4.

[9] A. Mouze, *Un théorème d'Artin pour des anneaux de séries formelles à croissance contrôlée*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **330** (2000), 15-20.

[10] A. Mouze, *Anneaux de séries formelles à croissance contrôlée*, Thèse, Université de Lille, juin 2000.

[11] R. Moussu – J. C. Tougeron, *Fonctions composées analytiques et différentiables*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **282** (1976), 1237-1240.

[12] V. Thilliez, *Sur les fonctions composées ultradifférentiables*, J. Math. Pures Appl. (1997), 499-524.

[13] J. C. Tougeron, "Idéaux de fonctions différentiables", Springer Verlag, Berlin (1972).

Laboratoire de Mathématiques, UMR 8524
Université des Sciences et Technologies de Lille
59650 Villeneuve d'Ascq
mouze@agat.univ-lille1.fr