

Astérisque

B. HANOZET

**Caractérisation de classes de fonctions C^∞ et analytiques sur
une variété irrégulière à l'aide d'un opérateur différentiel**

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 188-196

http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__188_0

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CARACTERISATION DE CLASSES DE FONCTIONS C^∞ ET ANALYTIQUES SUR UNE
VARIETE IRREGULIERE A L'AIDE D'UN OPERATEUR DIFFERENTIEL

par

B. HANOUZET

Sur un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n à frontière régulière par morceaux, on étudie une famille d'opérateurs différentiels \mathcal{A} d'ordre 2, elliptiques dans Ω , dégénérés sur la frontière $\partial\Omega$ à l'ordre 1 suivant chaque direction normale. Un tel opérateur réalise un automorphisme de l'espace $C^\infty(\bar{\Omega})$ des fonctions de classe C^∞ sur $\bar{\Omega}$, ainsi que de l'espace $a(\bar{\Omega})$ des fonctions analytiques sur $\bar{\Omega}$. On caractérise des classes de fonctions C^∞ sur $\bar{\Omega}$ à l'aide des itérés de \mathcal{A} ; en particulier, si u est une fonction C^∞ sur $\bar{\Omega}$, pour qu'elle soit analytique sur $\bar{\Omega}$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $L > 0$ telle que, pour tout entier k , on ait

$$\|\mathcal{A}_u^k\|_{L^2(\Omega)} \leq L^{k+1} (2k)!$$

Ce théorème est intéressant pour les applications par le fait qu'il ne fait pas intervenir de condition aux limites. Dans Lions-Magenes [6], pour Ω régulier, on trouve une caractérisation de $a(\bar{\Omega})$ par les itérés d'un opérateur elliptique, mais cette caractérisation fait intervenir de plus des opérateurs frontières.

Antérieurement, de tels résultats ont été obtenus pour les fonctions analytiques à l'intérieur du domaine par Aronszajn [1], Nelson [9], Komatsu [7], le cas général ayant été démontré par Kotake et Narasimhan [8].

Les résultats énoncés ici généralisent ceux de Baouendi et Goulaouic [2] pour un ouvert régulier ; ils font l'objet d'une publication plus détaillée en collaboration avec eux [4].

Nous considérons des ouverts dont la frontière est C^∞ (ou, pour certaines questions, analytiques) par morceaux, et qui peuvent se représenter localement sur $(\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, c'est-à-dire que :

si $x_0 \in \partial\Omega$, il existe un voisinage O' de x_0 , un voisinage O de l'origine, un difféomorphisme θ de O' sur O et un entier k , $1 \leq k \leq n$, tels que

$$(1) \quad \begin{cases} \theta(O' \cap \Omega) = O \cap (\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ \theta(O' \cap \partial\Omega) = O \cap \partial((\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \end{cases}$$

Dans $(\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, la variable x est notée (y, z) avec $y = (y_1, \dots, y_k)$, $z = (z_{k+1}, \dots, z_n)$. Les opérateurs \mathcal{L} elliptiques dans Ω , sont tels que, après transport sur $(\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ ils s'écrivent sous la forme :

$$(2) \quad A(x, D)u = \sum_{1 \leq i \leq k} a_i(x) D_{y_i} (y_i D_{y_i} u) + \sum_{|\mu| \leq 2} b_\mu(x) D_z^\mu u + Pu$$

où P est un opérateur d'ordre 2, négligeable en un sens qui sera précisé plus loin. On suppose que les coefficients a_i , b_μ et ceux de P sont suffisamment réguliers dans $\underline{O} = O \cap (\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ et que la condition d'ellipticité suivante est réalisée :

$$(3) \quad \begin{cases} \exists \alpha > 0 \mid \forall \xi \in \mathbb{R}^n \\ \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^k a_j(o) \xi_j^2 + \sum_{|\mu|=2} b_\mu(o) \xi^\mu \right) \geq \alpha |\xi|^2 \end{cases}$$

L'idée directrice pour étudier A est que le changement de variables :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (s, t) &\longrightarrow y = s^2 + t^2 \end{aligned}$$

fait passer du Laplacien $D_s^2 + D_t^2$ dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ à l'opérateur dégénéré

$4 D_y y D_y$ dans \mathbb{R}_+ . Nous posons donc :

$$(4) \quad \begin{cases} y_i = s_i^2 + t_i^2, & 1 \leq i \leq k, \\ z_i = z_i & , k+1 \leq i \leq n, \\ v(s, t, z) = u(s_1^2 + t_1^2, \dots, s_k^2 + t_k^2, z). \end{cases}$$

L'opérateur A donné par (2) s'écrit alors au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}$ sous la forme :

$$(5) \quad \begin{cases} B(s, t, z, D_s, D_t, D_z)v = \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{1}{4} a_i(s, t, z) (D_{s_i}^2 + D_{t_i}^2)v \\ + \sum_{|\mu| \leq 2} b_\mu(s, t, z) D_z^\mu v + Qv \end{cases}$$

où Q est un opérateur d'ordre 2.

Nous supposons que P est tel que l'hypothèse (3) suffit pour que B soit uniformément fortement elliptique dans un voisinage \tilde{O} de l'origine de $\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}$, ce qui signifie pratiquement que les coefficients de la partie homogène d'ordre deux de Q doivent s'annuler à l'origine. Pour \underline{O} , nous pouvons prendre un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ contenu dans le transformé de \tilde{O} par (4). L'étude de la régularité au voisinage de $\partial\Omega$ pour l'opérateur \mathcal{A} est donc ramenée ainsi à une étude à l'intérieur pour l'opérateur elliptique B, ceci grâce à une augmentation du nombre des variables. En utilisant les résultats de régularité à l'intérieur dans les espaces de Sobolev pour B, nous obtenons la régularité pour \mathcal{A} et caractérisons les domaines des itérés de \mathcal{A} . Par le théorème des itérés à l'intérieur de Kotake Narasimhan [8] dans les classes de Gevrey d'ordre s ($s \geq 1$), nous obtenons un théorème des itérés sur $\overline{\Omega}$ pour une classe de fonctions $a_s(\overline{\Omega})$ qui coïncide avec $a(\overline{\Omega})$ pour $s = 1$.

1 - Régularité $D(\mathcal{A}^m)$

Nous supposons dans cette partie, que les coefficients de \mathcal{A} sont de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$ et que $\partial\Omega$ est C^∞ par morceaux.

Introduisons les espaces :

$$E_0 = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) ; \text{supp } u \subset \underline{O}\}$$

$$E_1 = \{u \in E_0 ; \sqrt{y_i} D_{y_i} u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}), 1 \leq i \leq k ;$$

$$D_{z_i} u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}), k+1 \leq i \leq n\}$$

et pour $l \geq 2$,

$$E_l = \{u \in E_{l-1} ; Au \in E_{l-2}\}$$

Par (4) on obtient que :

$$(6) \quad u \in E_l \iff v \in H^l(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$$

où H^l désigne l'espace de Sobolev usuel d'ordre l .

Plus précisément, dans (6), v n'est définie à priori que sur

$$(\mathbb{R}^2 - \{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \text{ On montre d'abord que } v \text{ appartient à } L^2((\mathbb{R}^2 - \{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k})$$

donc définit une distribution dans $\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}$ et c'est pour cette distribution, que nous notons encore v que l'on obtient la régularité dans H^l .

Grâce à des inégalités de Hardy, nous obtenons une description de E_{2m}

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{2m} = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) ; \text{supp } u \subset \underline{D} ; \\ y_i^q D_{y_i}^{m+q} u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \text{ pour } 0 \leq q \leq m, 1 \leq i \leq k ; \\ D_{z_i}^\mu u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \text{ pour } |\mu| \leq 2m \} \end{array} \right.$$

Cette propriété nous permet de décrire localement le domaine des itérés

de \mathcal{A} . En définissant $D(\mathcal{A})$ comme l'espace des fonctions $u \in H_{loc}^2(\Omega)$ telles

que, localement au voisinage de tout $x_0 \in \partial\Omega$, on ait $u \circ \theta^{-1} \in E_1$ et

$A(u \circ \theta^{-1}) \in E_0$ et plus généralement :

$$D(\mathcal{A}^m) = \{u \in D(\mathcal{A}^{m-1}), \mathcal{A}u \in D(\mathcal{A}^{m-1})\}$$

on obtient :

Théorème 1.

L'espace $D(\mathcal{A}^m)$ est constitué de fonctions $u \in H_{loc}^{2m}(\Omega)$ telles que, localement au voisinage de tout $x_0 \in \partial\Omega$ on ait $u \circ \theta^{-1}$ dans E_{2m} décrit par (7).

Comme $H^{2m}(\Omega) \hookrightarrow D(\mathcal{A}^m) \hookrightarrow H^m(\Omega)$, nous tirons de ce théorème les deux conséquences suivantes :

(8) 1°) Pour $m \geq 1$, l'injection de $D(\mathcal{A}^m)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte

2°) Avec une condition de coercivité convenable, \mathcal{A} est un automorphisme de $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Dans toute la suite, nous supposons que les coefficients de \mathcal{A} sont analytiques sur $\bar{\Omega}$ et que $\partial\Omega$ est analytique par morceaux.

Par changement de variables (4), on peut aussi obtenir directement que, sous une condition de coercivité convenable \mathcal{A} est un automorphisme de $a(\bar{\Omega})$. Cette dernière propriété découle aussi d'un résultat plus général sur les itérés de \mathcal{A} .

2 - Théorème des itérés.

Dans $(\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, pour $1 \leq i \leq k$, on considère les opérateurs différentiels :

$$R_i^m = \begin{cases} (D_{y_i} y_i D_{y_i})^\ell & \text{si } m = 2\ell, \\ y_i D_{y_i} (D_{y_i} y_i D_{y_i})^\ell & \text{si } m = 2\ell + 1 \end{cases}$$

et pour tout k-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ on pose :

$$R^\alpha = R_1^{\alpha_1} \dots R_k^{\alpha_k}.$$

On définit la classe d'espace $a_s(\bar{\Omega})$:

Définition

Soit $s \geq 1$; on note $a_s(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ qui sont dans $G_s(\Omega)$ (classe de Gevrey d'ordre s sur Ω) et telles que :

Pour tout $x_0 \in \partial\Omega$ et toute carte locale donnée par (1) au voisinage de x_0 on ait, pour tout compact $K \subset \Omega$ une constante $L > 0$ vérifiant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^k, \forall \mu \in \mathbb{N}^{n-k}, \|R^\alpha D_z^\mu (u \circ \theta^{-1})\|_{L^2(K)} \leq L^{|\alpha|+|\mu|+1} ((|\alpha|+|\mu|)!)^s.$$

On a immédiatement :

$$G_s(\bar{\Omega}) \hookrightarrow a_s(\bar{\Omega})$$

et par des inégalités de Hardy

$$a_s(\bar{\Omega}) \hookrightarrow G_{2s-1}(\bar{\Omega}) ;$$

en faisant $s = 1$, on obtient donc :

$$a(\bar{\Omega}) = a_1(\bar{\Omega}) = G_1(\bar{\Omega}).$$

Par le théorème de Kotake et Narasimhan dans les classes de Gevrey, appliqué aux opérateurs elliptiques \mathcal{A} (dans Ω) et B (dans $\bar{\Omega}$), on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.

Soient $s \geq 1$ et $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Alors, pour que u appartienne à $a_s(\bar{\Omega})$ il faut et il suffit que :

$$\exists L > 0 \mid \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq L^{k+1} (2k!)^s,$$

Ce résultat montre aussi que, avec une condition de coercivité convenable, \mathcal{A} est un automorphisme de $a_s(\bar{\Omega})$. Pour $s = 1$, on retrouve le résultat de régularité analytique.

En vue des applications, nous avons encore besoin d'un résultat de théorie spectrale, que nous indiquons brièvement.

3 - Théorie spectrale.

On suppose dans toute la suite que $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ est auto-adjoint. La propriété (8) montre que le spectre de \mathcal{A} est constitué par une suite $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de valeurs propres strictement positives, que l'on ordonne dans l'ordre croissant au sens large, et tendant vers l'infini avec j . Le comportement asymptotique des valeurs propres de \mathcal{A} est analogue à celui d'un opérateur elliptique d'ordre 2 sur un ouvert régulier, plus précisément :

Théorème 3.

Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\lambda_j \sim Cj^{2/n} \text{ quand } j \rightarrow +\infty.$$

4 - Applications.

Notons w_j une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de \mathcal{A} associées aux valeurs propres λ_j . On note J l'application, qui à $f \in L^2(\Omega)$, fait correspondre la suite $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de ses coefficients de Fourier sur la base $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Si $P(j)$ est une suite de réels strictement positifs, posons :

$$\mathcal{L}_{P(j)}^2 = \{(f_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2 P(j) < \infty\}$$

Par les théorèmes 1 et 3, on obtient :

J est un isomorphisme de $C^\infty(\bar{\Omega})$ sur $\mathcal{L}_{P(j)}^2$ espace des suites à décroissance rapide,

et par les théorèmes 2 et 3 :

$$J \text{ est un isomorphisme de } a_s(\bar{\Omega}) \text{ sur } \lim_{M \rightarrow 0} \mathcal{L}_{\exp(Mj^{1/sn})}^2$$

Les résultats d'interpolation de [5] permettent d'obtenir une nouvelle caractérisation de espaces $a_s(\bar{\Omega})$:

Théorème 4.

Soit $s \geq 1$; il existe un foncteur d'interpolation Ψ_s tel que :

$$\Psi_s [C^\infty(\bar{\Omega}), a(\bar{\Omega})] = a_s(\bar{\Omega}).$$

Plus généralement, on peut construire un foncteur d'interpolation Ψ_s tel que, pour $s_0 \leq s \leq s_1$:

$$\Psi_s [a_{s_0}(\bar{\Omega}), a_{s_1}(\bar{\Omega})] = a_s(\bar{\Omega}).$$

Le théorème 4 et les résultats d'approximation de [3] fournissent enfin :

Théorème 5.

Soient $s \geq 1$ et $u \in L^2(\Omega)$; pour que u soit dans $a_s(\bar{\Omega})$, il faut et il suffit qu'il existe $L > 0$ et $a \in]0,1[$ vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_k} \|u-P\|_{L^2(\Omega)} \leq La^{k^{1/s}}.$$

(\mathcal{P}_k désigne l'espace des polynômes à n variables réelles, à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à k).

En conclusion, d'après ces propriétés d'interpolation et d'approximation, les espaces $a_s(\bar{\Omega})$ sont des espaces naturels entre $C^\infty(\bar{\Omega})$ et $a(\bar{\Omega})$, jouant le rôle des espaces de Georey sur une variété analytique sans bord.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. ARONSZAJN. Sur un théorème de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.
C.R. Acad. Sc. Paris, 205 (1937), 16-18.
- [2] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC. Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications.
Journal of Funct. Anal.
- [3] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC. Approximation polynômiale de fonctions C^∞ et analytique. Ann. Inst. Fourier 1971.
- [4] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC, B. HANOZET. Caractérisation de classes de fonctions C^∞ et analytiques sur une variété irrégulière à l'aide d'un opérateur différentiel.
A paraître à :
- [5] C. GOULAOUIC. Prolongements de foncteurs d'interpolation et applications. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 18, 1 (1968) p. 1-98.
- [6] J.L. LIONS et E. MAGENES. Problèmes aux limites non homogènes
Tome 3 (Dunod) Paris 1970.
- [7] H. KOMATSU. A proof of Kotake et Narasimhan's theorem, Proc. Japan Acad. 38 (1962) 615,
A characterization of real analytic functions
Proc. Jap. Acad. 36 (1960) 90-93,
- [8] T. KOTAKE et M.S. NARASIMHAN, Fractionnel powers of a linear elliptic operator. Bull. Soc. Math. France, 90 (1962) 449-471,
- [9] E. NELSON Analytic vectors. Ann. of Math, (1959) 572-615,