C. BAIOCCHI

Sur quelques problèmes à frontière libre

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 69-85

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__69_0>

SUR QUELQUES PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE

C. BAIOCCHI (PAVIA - ITALIE)

SUR QUELQUES PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE

On expose ici quelques résultats obtenus récemment à Pavia par le Laboratoire d'Analyse Numérique du C.N.R. et les Départements de Mathématique et d'Hydraulique de l'Université, sur une classe de problèmes à frontière libre pour des équations linéaires elliptiques, qui se posent dans l'étude du filtrage de liquides à travers des milieux poreux ; il s'agit de problèmes bien connus et étudiés depuis longtemps par les ingénieurs hydrauliques (cf. par exemple [1] , [6] , [9] , [15] , [17] , [20] , et la bibliographie de ces ouvrages).

La méthode utilisée, introduite dans le cas particulier de [2] , a été ensuite développée par tout un groupe de chercheurs (cf. [3] , [4] , [5]), et elle s'applique à des nombreux problèmes. L'ensemble de tous les problèmes qui peuvent être résolus a été traité dans [3] , [4] . On se borne ici à poser le problème en général et à développer un cas concret qui néanmoins permet de mettre en évidence les points essentiels de la théorie.

Le problème général est le suivant : sur une base imperméable, on a deux bassins d'eau séparés par un barrage en matériaux poreux homogènes ; l'eau circule à travers le barrage en baignant une partie inconnue du barrage ; c'est cette partie ou, ce qui revient au même, le morceau inconnu de sa frontière ("frontière libre") qu'il s'agit de déterminer.

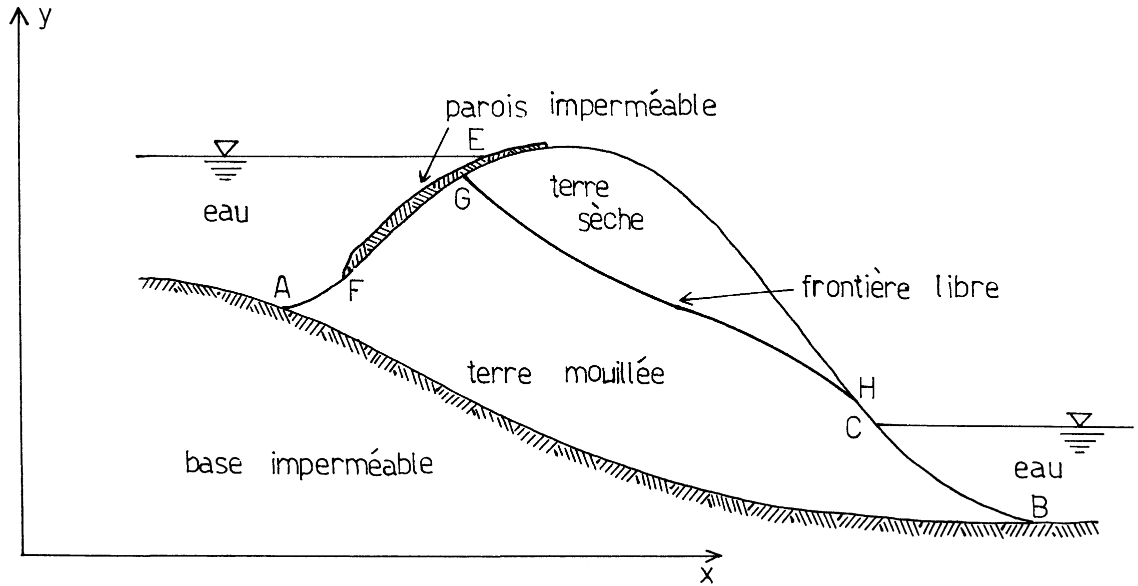
y
parois imperméable
E
G
terre
sèche
eau
A
F
frontière libre
terre mouillée
H
C
eau
base imperméable
B
x

fig. 1

On suppose que la digue est à section verticale constante, de façon à se réduire à un problème bidimensionnel ; dans la figure 1, on a ajouté une difficulté supplémentaire qui consiste à supposer qu'un morceau de la paroi de gauche a été imperméabilisé.

D'après la loi de Darey, on sait que le mouvement de l'eau dans la digue est lié à un potentiel de vitesse ; plus précisément, à des coefficients dimensionnels près, si l'on désigne par $p(x,y)$ la pression au point (x,y), et si l'on pose $u(x,y) - p(x,y) + y$, les composantes de la vitesse de l'eau sont proportionnelles au gradient de la fonction $u(x,y)$; et la fonction $u(x,y)$ est harmonique grâce à l'incompressibilité du liquide. En désignant par $v(x,y)$ une fonction harmonique conjuguée de $u(x,y)$, les équipotentielles de v donnent les lignes de courant ; en particulier, v doit être constante le long des parties imperméables AB et FG (G est inconnu!) et le long de la ligne GH inconnue; sur la ligne GH on a $p(x,y)$ = pression atmosphérique = 0, et donc $u(x,y) = y$; la condition $u(x,y) = y$ reste valable aussi sur CH ; tandis que, le long des parois AF et CB on a u = constante, et, plus précisément, $u = y_1$ sur AF et $u = y_2$ sur BC, où y_1 désigne la hauteur du bassin de gauche et y_2 celle du bassin de droite (à savoir y_1, y_2 sont les ordonnées de E et C respectivement).

Désignons par D le barrage ; par Ω la partie mouillée de D ; par $\{(y = \phi(x)\}$ l'équation du morceau " libre " du bord $\partial\Omega$ de Ω ; si l'on traduit les relations précédentes en relations sur $u(x,y)$, on doit résoudre le problème (dans lequel il faut encore préciser les hypothèses de régularité) :

Problème A.-

Chercher un triplet $\{ \phi , \Omega , u \}$ avec :

(1) Ω est un ouvert inclus dans D

(2) $\left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ est une fonction "régulière" , décroissante, et} \\ \text{telle que } \partial D - \partial\Omega = \text{graphe de } \phi \end{array} \right.$

(3) $u(x,y)$ est régulière dans $\bar{\Omega}$, harmonique dans Ω

(4) $u = y_1$ sur AF ; $u = y_2$ sur BC ; $u = y$ sur GH et HC

(5) $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur AB , FG et GH

($\frac{\partial}{\partial n}$ étant la dérivée normale) ; (5) peut évidemment peut être remplacée par une condition sur une harmonique conjuguée $v(x,y)$ de $u(x,y)$, en posant par exemple :

(6) $u_x = v_y$; $u_y + v_x = 0$ dans Ω ;

(7) $v = 0$ sur FG et GH ; v = constante = q sur AB

la valeur constante q de v sur AB donne le "débit" du barrage ; sauf des cas simples où q est fonction connue de la géométrie du barrage, q est inconnue (et même une des inconnues "physiquement intéressantes" du problème).

On va traduire ce problème sur le domaine inconnu Ω en un nouveau problème sur l'ensemble D tout entier ; précisément, on prolonge u et v en posant :

(8) $\tilde{u}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} u(x,y) & \text{dans } \bar{\Omega} \\ y & \text{dans } \bar{D} - \bar{\Omega} \end{array} \right.$; $\tilde{v}(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} v(x,y) \text{ dans } \bar{\Omega} \\ 0 \text{ dans } \bar{D} - \bar{\Omega} \end{array} \right.$

La relation (6) devient alors :

(9) $\tilde{u}_x = \tilde{v}_y$; $\tilde{u}_y + \tilde{v}_x = \chi_{C\Omega}$ dans D

où $\chi_{C\Omega}$ désigne la fonction caractéristique de $C\Omega$ (complémentaire de Ω dans D). Grâce à la première des relations (9), la forme différentielle $-\tilde{v}dx + (y - \tilde{u})dy$ est intégrable dans D ; on peut donc poser, pour $P = (x,y) \in \bar{D}$:

(10) $w(x,y) = \int_E^P -\tilde{v}dx+(y-\tilde{u})dy$

et, d'après (9), (4), (7), on aura :

(11) $\Delta w = \chi_\Omega$ dans D

(12) $w_y = y-y_1$ sur AF ; $w_y = y-y_2$ sur BC ;

$w_y = 0$ sur CH

(13) $w_x = 0$ sur FG ; $w_x = -q$ sur AB

(14) $w = 0$ dans $D - \Omega$

Naturellement, à partir de w on remonte aisément à u,v,Ω (et donc à ϕ) ; par exemple, on a :

(15) $\tilde{u} = y-w_y$; $\tilde{v} = -w_x$ dans D ;

(16) $\Omega = \{(x,y) \in D \; ; \; (\Delta w)\,(x,y) = 1\}$;

Ω peut d'ailleurs être identifié par d'autres relations; par exemple, on doit avoir, pour des raisons physiques (1)

(17) $u(x,y) > y$; $v(x,y) > 0$ dans

et donc on doit avoir aussi :

(18) $w_y < 0$ dans D ; $\Omega = \{(x,y) \in D \; ; \; w_y(x,y) < 0\}$;

(19) $w_x < 0$ dans D ; $\Omega = \{(x,y) \in D \; ; \; w_x(x,y) < 0\}$;

en particulier, on pourrait remplacer (11) par l'une des équations non linéaires multivoques (2) :

(11 bis) $\Delta w \in H(-w_y)$ dans D ;

(11 ter) $\Delta w \in H(-w_x)$ dans D .

Malheureusement, (11 bis), (11 ter) (munies des conditions aux limites que l'on peut tirer de (12) , (13) , (14) correspondent à des "problèmes mal posés " ; au contraire, si l'on sait :

---

(1) - D'ailleurs, sous des hypothèses convenables de régularité dans (2) et (3), on peut déduire (17) de (1), ... (7)

(2) - Où $H(t)$ désigne la fonction de Heaveside : $H(t) = 1$ pour $t > 0$, $H(t) = 0$ pour $t < 0$, $H(0) = [0,1]$.

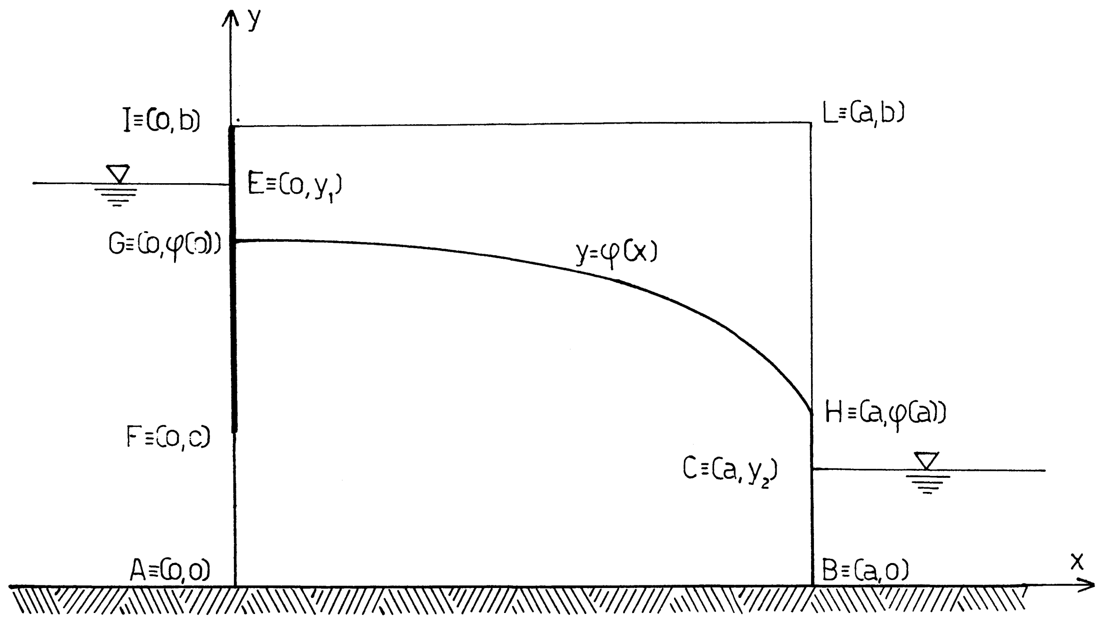

fig. 2

(20) $w(x,y) > 0$ pour $(x,y) \in \Omega$

on peut remplacer (11) par

(21) $\Delta w \in H(w)$ dans D

et de (21), (12) , (13) , (14) on voit qu'il est possible de déduire un problème aux limites " bien posé " ; il s'agit donc de voir quand (20) est valable, puis de résoudre le problème attaché à (21) , (12) , (13) , (14) , et de remonter à u,v,Ω par (15) et,par exemple(22) $\Omega = \{(x,y) \in D \ ; \ w(x,y) > 0\}$.
Malheureusement, (20) n'est pas toujours valable ; par exemple , dans le cas de la figure 1, on doit avoir $w < 0$ le long de la ligne HC. Toutefois, dans de nombreux cas, on peut montrer la validité de (20), et donc la méthode est applicable. En renvoyant à [3],[4] pour ces cas où la méthode s'applique, on décrit ici un cas particulier, correspondant à la figure 2 ; à savoir, on suppose que D est un rectangle, $D =]0,a[\times]0,b[$; y_1, y_2 (avec $b > y_1 > y_2 \geq 0$) désignent encore les niveaux des deux bassins ; c (avec $y_1 \geq c > 0$) désigne la hauteur du morceau perméable de la paroi de gauche; naturellement, si $c = y_1$, la partie imperméable ne joue aucun rôle , et le problème se simplifie beaucoup ; on tombe en effet sur un " problème modèle " qui a été le point de départ de notre recherche (cf. [2]).

On va préciser le problème A en choisissant une classe fonctionnelle dans laquelle se pose le problème ; par exemple (1), on peut procéder de la façon suivante :

(1) - la présentation donnée ici diffère un peu de celle donnée dans [3] , [4] .

Problème B.-

Chercher un triplet $\{\phi, \Omega, u\}$ avec :

(23) $\begin{cases} \phi : [0,a] \to R \text{ est une fonction continue décrois-} \\ \text{sante, avec } c \le \phi(0) \le y_1 \ ; \ \phi(a) \ge y_2 \end{cases}$

(24) $\Omega = \{(x,y) \in D \ ; \ 0 < y < \phi(x)\}$

(25) $\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \ ; \ u \text{ est harmonique dans } \Omega \text{ et continue} \\ \text{dans } \bar{\Omega} \text{ avec sa conjuguée } v(x,y) \end{cases}$

(26) $\begin{cases} u \text{ satisfait au sens de } C^0(\bar{\Omega}) \text{ , les relations} \\ u = y_1 \text{ sur } AF \ ; \ u = y_2 \text{ sur } BC \ ; \ u = y \text{ sur} \\ GH \text{ et } HC \end{cases}$

(27) $\begin{cases} v \text{ satisfait, au sens de } C^0(\bar{\Omega}) \text{, les relations :} \\ v = 0 \text{ sur } FG \text{ et } GH \ ; \text{ et il existe } q \in R^+ \\ \text{avec } v = q \text{ sur } AB \end{cases}$

Maintenant, la validité de (17) suit aisément le principe du maximum ; et si l'on garde la notation (8), on peut montrer que :

(28) $\tilde{u}, \tilde{v} \in H^1(D)$

et que (9) est remplie. On garde aussi la notation (10) ; de (15) et (28) on aura :

(29) $w \in H^2(D)$

et (11) , (12) , (13) , (14) restent valables ; on remarquera aussi que, dès que $v = 0$ dans $C\,\Omega$, on a :

(30) $w(x,y) = \displaystyle\int_y^b [\,\tilde{u}(x,t) - t\,]\,dt \qquad \forall (x,y) \in \bar{D}$

d'où, grâce à (17), la validité de (20) et (22).

Remarquons maintenant que si, $c = y_1$, on connaît la trace de w sur tout le bord ∂D de D ; en effet de (12), (14) on tire $w = 0$ sur FI , IL , LC ;

$w = \dfrac{(y - y_1)^2}{2}$ sur AF ; $w = \dfrac{(y - y_2)^2}{2}$ sur BC ; en particulier, on connaît les valeurs de w dans A et B ; w étant linéaire sur AB grâce à (13), on peut aussi évaluer les valeurs de w sur AB et la valeur q_1 de q ; précisément :

$$(31)\qquad q = q_1 = \frac{y_1^2 - y_2^2}{2a} \qquad \text{si } c = y_1$$

Dans le cas général, ($c < y_1$), si l'on pose

$$(32)\qquad \Gamma_N = IF \; ; \; \Gamma_D = \partial D - \Gamma_N$$

et si, pour tout $q \in R$, on pose :

$$(33)\qquad \begin{cases} g_q(x,y) = 0 \text{ sur } IL, LC \; ; \; g_q(x,y) = \dfrac{(y_2 - y)^2}{2} \text{ sur } BC \\ g_q(x,y) = \dfrac{y_2^2}{2} + q\,(a-x) \text{ sur } AB \; ; \\ g_q(x,y) = aq - \dfrac{y_1^2 - y_2^2}{2} + \dfrac{(y_1 - y)^2}{2} \text{ sur } AF \end{cases}$$

on aura, grâce à (12), (13), (14) :

$$(34)\qquad w = g_q \text{ sur } \Gamma_D \; ; \; w_x = 0 \text{ sur } \Gamma_N.$$

Posons encore :

$$(35)\qquad \begin{aligned} \mathcal{K}_q &= \{z \in H^1(D) \; ; \; z|_{\Gamma_D} = g_q\} . \\ \mathcal{K}_q^+ &= \{z \in H^1(D) \; ; \; z|_{\Gamma_D} = g_q \; ; \; z \geq 0\} \end{aligned}$$

<u>Théorème 1.</u>-

Soit $\{\phi,\Omega,u\}$ une solution du problème B ; et soit q la valeur de v sur AB (cf. (27)). Avec les notations (8), (10), (32), (33), (35), on a :

$$(36)\qquad w \in \mathcal{K}_q^+ \; ; \; \int_D \{[\text{grad}w.\text{grad}(z-w)] + (z-w)\}dxdy \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{K}_q^+$$

$$(37)\qquad w \in \mathcal{K}_q \; ; \; \int_D \{[\text{grad}w.\text{grad}(z-w)] + (z^+ - w^+)\}dxdy > 0 \quad \forall z \in \mathcal{K}_q$$

On a aussi :

$$(38)\qquad \forall\, \sigma \in [0,\tfrac{1}{2}[\, , \quad w \in H^{2+\sigma}(D)$$

$$(39)\qquad q = -\lim_{x\to 0} + \frac{1}{x}\int_0^c \{\tilde{u}(x,t) - \tilde{u}(0,t)\}dt$$

<u>Démonstration.</u>-

D'après (29), (34), on a $w \in \mathcal{K}_q$; grâce à (20), on a aussi $w \in \mathcal{K}_q^+$; les inégalités (36) et (37) sont des conséquences immédiates de (34), (29) et (11). (Il suffit d'appliquer une "demie-formule" de Green"). Pour montrer (38), notons d'abord que, grâce à (23), on a $\chi_\Omega \in H^\sigma(D)$ $\forall\ \sigma \in [0,\frac{1}{2}[$; on peut alors utiliser les résultats connus sur la régularité des solutions du problème mêlé (11) , (34) (cf. [16] et, pour la régularité dans le voisinage de A, B, L, cf. [8]) pour montrer qu'il s'agit d'un problème à indice dans les espaces $H^s(D)$, dont l'indice est égal à 1 dans $H^{2+\sigma}(D)$ pour $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$; d'ailleurs, la condition de compatibilité étant indépendante de σ , vu (29) et la régularité des données χ_Ω et g_q , on déduit (38).

Finalement, pour avoir (39), il suffit de remarquer que de (38), on a
$w \in C^1(\bar{D})$; et que $q = -\int_0^b \tilde{u}_x(x,t)dt$ (p.p. sur $[0,a]$; l'intégration dans (39) peut être faite sur $[0,c]$ dès que $\tilde{u}_x(0,t) = 0$ pour $t > c$).

Théorème 2.-

Le problème B admet au plus une solution.

Démonstration.-

Grâce à l'unicité, pour q fixé, des solutions de (36) (ou de (37)), il suffit de démontrer l'unicité de q. Dans le cas $c=y_1$ on a déjà vu que q doit être donné par (31) ; en général, si $\{\Phi',\Omega',u'\}$ et $\{\phi'',\Omega'',u''\}$ sont deux solutions, et si l'on désigne par q', q'', $\tilde{u}'$, $\tilde{u}''$, w', w'' les constantes q et les fonctions $\tilde{u}$ et w correspondantes, grâce au principe du maximum, on peut montrer que $q' \leq q''$ implique $w' \leq w''$, $\Omega' \subset \Omega''$ et $\tilde{u}' \leq \tilde{u}''$; grâce à (39) écrite pour q' et q'', compte tenu de $\tilde{u}'(0,t)\Big|_{AF} = \tilde{u}''(0,t)\Big|_{AF}$, on en déduit $q'' \leq q'$; d'où l'unicité.

Pour ce qui concerne l'existence d'une solution du problème B , on doit d'abord étudier les problèmes (36) et (37). Pour tout q réel (37) admet (cf. [21], [10]) une et une seule solution w_q (car $\mathcal{K}_q$ est un convexe fermé non vide de $H^1(D)$) ; (36) admet une et une seule solution pour tout $q > q_o = \frac{cy_1}{a} - \frac{c^2 + y_2^2}{2a}$ car alors $\mathcal{K}_q^+$ est encore un convexe fermé non vide de $H^1(D)$; et on montre aisément que cette solution coïncide avec w_q . Des résultats précédents nous savons que, s'il existe une solution $\{\phi,\Omega,u\}$ du problème B, il existe une et une seule valeur q^* de q telle que $\{\phi,\Omega,u\}$ soit liée à la solution w_q de (37) par les relations :

$$(40)\begin{cases} \Omega = \{(x,y) \in D \ ; \ w_{q^*}(x,y) > 0\} \\ \phi\ (x) = \max\ \{y \ ; \ (x,y) \in \bar{\Omega}\} \ , \quad 0 \leq x \leq a \ , \\ u(x,y) = y - D_y w_{q^*}(x,y) \quad , \quad (x,y) \in \bar{\Omega} \ . \end{cases}$$

Il faut donc étudier les solutions w_q de (37) pour montrer qu'il existe un tel q^* . On a d'abord le théorème :

Théorème 3.-

Pour tout q réel (37) admet une et une seule solution w_q ; et on a :

(41) $w_q \in W^{1,p}(D) \quad \forall\ p > 1$; $w_q \in H^{1+\sigma}(D) \quad \forall\ \sigma \in [0,\frac{1}{2}[$

(42) $\Delta\, w_q \in L^\infty(D)$; $0 \leq \Delta w_q \leq 1$ p.p. dans D

(43) $D_x w_q \Big|_{\Gamma_N} = 0$ dans un sens faible

Démonstration.-

On montre d'abord (42) et (43) (par exemple au sens de $(H_{oo}^{1/2}(\Gamma_N))$; cf. [11] pour cet espace) en écrivant (37) pour

$z = w_q \pm \psi$ avec $\psi \in H^1(D)$ et $\psi|_{\Gamma_D} = 0$; pour démontrer (41), on procède de façon analogue à ce qu'on a fait pour montrer (38), en utilisant essentiellement les résultats de [18] pour le problème mêlé :

$$(44) \qquad \Delta v = \Delta w_q \in L^\infty(D) \; ; \; v|_{\Gamma_D} = g_q \; ; \; D_x v|_{\Gamma_N} = 0.$$

La régularité (41) de w_q n'est pas suffisante ; en effet, on sait que si $\{\phi,\Omega,u\}$ est une solution, la fonction w correspondante doit satisfaire (38) (et donc aussi $w \in W^{2,p}(D)$ $\forall\, p < 4$, et $w \in C^1(\bar{D})$) ; on peut donc espérer de déterminer la " bonne valeur" q^* de q en utilisant la " condition de compatibilité " pour que le problème (44) ait une solution dans $H^{2+\sigma}(D)$ (ou $W^{2,p}(D)$, ou $C^1(\bar{D})$) comme une nouvelle équation dans l'inconnue q . En effet, on a le :

<u>Théorème 4.-</u>

Il existe une fonction $\mathcal{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et bornée, et deux constantes réelles α, β, avec $\alpha \neq 0$, telles que la solution w_q de (37) appartient à $W^{2,p}(D)$ $\forall\, p < 4$ si et seulement si q satisfait :

$$(45) \qquad \mathcal{F}(q) + \alpha q + \beta = 0$$

en outre, (45) admet une et une seule solution q^* ; et on a :

$$(46) \qquad \tilde{q}_o \leq q^* \leq q_1 \quad \text{où} \quad \tilde{q}_o = \max\,[0,q_o] \qquad (1)$$

<u>Démonstration.-</u>

On considère d'abord l'opérateur $T : v \to Tv = \{-\Delta v, v|_{\Gamma_D}, D_x v|_{\Gamma_N}$ dans les espaces $W^{2,p}(D)$ $(2 \leq p < 4)$; grâce aux résultats de [19] et [16] T est un opérateur à indice égal à 1 ;

---

(1) - q_o et q_1 ont déjà été introduits respectivement comme le minimum des valeurs de q tels que $K_q^+ \neq \emptyset$ et la valeur de q correspondante à $c = y_1$.

il y a donc une seule condition de compatibilité pour l'existence d'une solution de (44) dans $W^{2,p}(D)$; et l'on peut écrire cette condition sous la forme :

$$(47) \quad \int_D \mu \, \Delta \, w_q dxdy + \langle\psi, g_q\rangle = 0$$

avec $\mu \in L^2(D)$ et ψ fonctionnelle linéaire continue par exemple sur $H^{3/2}(\Gamma_D)$. Si l'on pose $\mathcal{F}(q) = \int_D \mu \Delta \, w_q dxdy$ et si l'on rappelle que g_q dépend de façon affine de q , on déduit de (47) l'équation (45) ; $\mathcal{F}$ est continue et bornée grâce à (42) et du fait que w_q (resp. $t \, \Delta w_q$) dépend continûment de q dans $H^{1+\sigma}(D)$ faible (resp. $t \, L^\infty(D)$ - faible - étoile) ; un raisonnement par l'absurde donne aussi $\alpha \neq 0$; en particulier, (45) admet au moins une solution q^*. Pour avoir l'unicité de q^* et la validité de (46) on étudie la fonction $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ définie par :

$$f(q) = \limsup_{x \to 0^+} \frac{w_q(x,c) - w_q(0,c)}{x}$$

Dès que $w_{q^*} \in C^1(\bar{D})$ et que $D_x w_{q^*}|_{\Gamma_N} = 0$ on a $f(q^*) = 0$; il suffit donc de prouver que $f(q)$ s'annule une seule fois, sa racine étant comprise entre $\tilde{q}_o$ et q_1 . Et, en effet, en faisant usage plusieurs fois du principe du maximum, on montre que : $f(\tilde{q}_o) \geq 0$; $f(q_1) \leq 0$; $f(q) > 0$ pour $q < \tilde{q}_o$; $f(q') \geq f(q'')$ pour $\tilde{q}_o \leq q' \leq q''$, avec inégalité stricte si $f(q')$ et $f(q'')$ sont finis ; d'où l'unicité de q^*, et (46).

Théorème 5.-

q^* étant la racine de (45), le triplet $\{\phi, \Omega, u\}$ défini par (40) est une solution du problème B.

Démonstration.-

On montre d'abord que $\Delta w_{q^*} = 1$ dans Ω ; en particulier, $D_x w_{q^*}$ et $D_y w_{q^*}$ sont harmoniques dans Ω (et continues dans $\bar{D}$, dès que $w_q \in H^{2+\sigma}(D)$); grâce à (34), le principe du maximum donne alors $D_x w_{q^*} \leq 0$ et $D_y w_{q^*} \leq 0$ dans $\bar{D}$. On en tire aisément que Ω est un ouvert du type (24), et que ϕ satisfait (23) ; encore de (34), $w_{q^*} \in C^1(\bar{D})$, $w_{q^*} = 1$ dans Ω, et en posant v = restriction à $\bar{\Omega}$ de $-D_x w_q$, on déduit (25), (26) et (27)(avec q = q*).

On a donc existence et unicité de la solution du problème B ; on a aussi des méthodes numériques pour l'évaluation explicite de la solution (cf. par exemple [7]), méthodes qui sont à la fois rigoureuses du point de vue mathématique et efficaces du point de vue de la vitesse des calculs.

Pour ce qui concerne le problème général (cf. problème A) dans les cas où la méthode s'applique (à savoir lorsqu'on a $w \geq 0$; cf. ce que l'on a dit à propos de la validité de (20)), on est amené à des problèmes mêlés, semblables à (21), (34), dans lesquels les conditions aux limites sont du type Dirichlet - dérivée oblique (cf. (12) et (13)) ; on peut alors traduire ces problèmes sous forme d'inéquations variationnelles (semblables à (36), (37)) mais pour des formes bilinéaires non symétriques ; c'est ceci, à notre connaissance, le premier exemple de problème concret qui se pose sous la forme d'inéquation stationnaire non symétrique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.I. ARAVIN - S.A. NUMEROV :
" Theory of fluid flow in undeformable porous media "
Moscow, 1953 (english. transl. : Israel Program scient. transl. Jerusalem, 1965)

[2] C. BAIOCCHI :
" Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica "
Ann. Mat. pura e appl. (1972)
C.R.Acad.Sc. Paris, 273 (1971), 1215-17

[3] C. BAIOCCHI - V. COMINCIOLI - E. MAGENES - G.A. POZZI :
" Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media : existence and uniqueness theorems "
(A paraître aux Ann. Mat. pura e appl.)

[4] C. BAIOCCHI - V. COMINCIOLI - L. GUERRI - G. VOLPI :
" Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media : numerical approach " (A paraître à Calcolo)

[5] V. COMINCIOLI - L. GUERRI - G. VOLPI :
" Analisi numerica di un problema di frontiera libera connesso col moto di un fluido attraverso un mezzo poroso "
Pubblic. der Labor. di Anal. Numer. C.N.R. - Pavia, N.17 (1971)

[6] C.W. CRYER :
" On the approximate solution of free boundary problems using finite differences "
J. Assoc. Comput. Mach. 17 (1970), 379-411

[7] R. GLOWINSKY - J.L. LIONS - R. TREMOLIERES :
" Résolution numérique des inéquations de la mécanique et de la physique "
Livre à paraître, Dunod, Paris

[8] P. GRISVARD :
" Equations différentielles abstraites "
Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. Paris (4) 2 (1969), 311-395

[9] M.E. HARR :
" Groundwater and seepage "
New York. Mc Graw Hill. 1962

[10] J.L. LIONS :
" Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires "
Dunod - Gauthier Villars. Paris. 1969

[11] J.L. LIONS - E. MAGENES :
" Problèmes aux limites non homogènes et applications "
Dunod. Paris. 1968 (tr. anglaise : Springer - Berlin (1972) ;
tr. russe : Mir, Moscou,(1971)).

[12] E. MAGENES :
" Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali "
Atti VII Congr. U.M.I., Roma, Cremonese, 1964, 134-197
(tr. russe : Uspehi Mat. Nank, 2 (128), XXI (1966), 169-218)

[13] U. MAIONE - S. FRANZETTI :
" Unconfined flow downstream of an homogeneous earth dam with impervious sheetpiles "
Thirteenth Congress of the Intern. Assoc. for Hydraulic research
Kyoto (1969), 191-204

[14] J. NECAS :
" Les méthodes directes dans la théorie des équations elliptiques "
Prague. Academia. 1967

[15] S.T. NEUMANN - P.A. WITHERSPOON :
" Variational principles for confined and unconfined flow of groundwater - Water resources Research 6, N.5 (1970)
1376-1387

[16] J. PEETRE :
" Mixed problems for higer order elliptic equations in two variables "
I.II ; Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa, 15 (1961), 337-353 ;
17(1963), 1-12

[17] P.YA POLUBARINOVA - KOCHINA :
" The theory of groundwater movement "
Moscow. 1952 (English. transl. : Princeton University Press,
Princeton, New Jersey, 1962)

[18] E. SHAMIR :
" Regularization of mixed second order elliptic problems "
Israel J. of Math. , 6 (1958) 150-168

[19] E. SHAMIR :
" Mixed boundary value problems for elliptic equation in the plane, the L^p theory "
Ann. Sc. Norm. Sup. , Pisa , 17 (1963) , 117 - 139

[20] R.V. SOUTHWELL :
" Relaxation methods in theoretical physics "
Oxford ; Clarendon Press. 1946

[21] G. STAMPACCHIA :
" Variational inequalities "
Proc. Nato, Venice (1968), 101-192