PIERRE BOLLEY

Régularité de certains espaces de distributions

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 98-107
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__98_0>

REGULARITE DE CERTAINS ESPACES DE DISTRIBUTIONS

par

Pierre BOLLEY (*)

(Université de Rennes)

§ 0. L'objet essentiel de cette étude est le problème suivant : étant donnés un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, des opérateurs différentiels $P_1,\dots,P_N$ d'ordre $\leq m$ et un entier k de $\mathbb{Z}$, à quelles conditions toute distribution T de $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $P_\ell T$ appartienne à l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ pour $\ell=1,\dots,N$ appartient à l'espace de Sobolev $H^{m+k}(\Omega)$? On donne une condition nécessaire et suffisante sur le système des opérateurs P_ℓ pour $\ell=1,\dots,N$ pour qu'il en soit ainsi. C'est la condition nécessaire et suffisante de coercivité des formes sesquilinéaires, intégro-différentielles, formellement positives construites à partir des opérateurs P_ℓ pour $\ell=1,\dots,N$, donnée par N. ARONSZAJN [1] ; on retrouve en particulier que cette condition est suffisante. (cf : § I). Cette étude se généralise à des formes intégro-différentielles, formellement positives et dégénérées sur le bord de l'ouvert. (cf : § II). On donne aussi quelques résultats de régularité pour des systèmes de distributions ; comme corollaire, on obtient une généralisation de l'inégalité de Korn pour le système de l'élasticité. (cf : § III).

Plusieurs prolongements peuvent être donnés à cette étude ; une publication plus complète et plus détaillée sera faite ultérieurement.

Enfin, signalons que ce problème de régularité a été en partie abordé ; en voici deux exemples classiques :

(*) Ce travail a été fait en collaboration avec Jacques Camus.

- J. DENY et J.L. LIONS [4] donnent plusieurs caractérisations des ouverts Ω pour lesquels toute distribution T de $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $D^\alpha T$ appartienne à $L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| = 1$, appartient à $L^2(\Omega)$.

- N. ARONSZAJN et K.T. SMITH [6] donnent le résultat suivant : soient Ω un ouvert borné ayant la propriété du cône strict, $P_\ell(\xi)$ pour $\ell=1,\dots,N$ des polynômes homogènes de degré m à coefficients constants n'ayant pas de zéro complexe commun autre que 0 ; alors toute distribution T de $L^2(\Omega)$ telle que $P_\ell T$ appartienne à $L^2(\Omega)$ pour $\ell=1,\dots,N$, appartient à $H^m(\Omega)$. Mais il faut remarquer que, a priori, T possède une certaine régularité : T est une distribution de $L^2(\Omega)$.

Ces résultats montrent que le problème a été abordé de deux manières différentes : dans [4] le système d'opérateurs étant fixé, on cherche des conditions sur l'ouvert Ω, alors que dans [1], [6] l'ouvert Ω étant fixé, on cherche des conditions sur le système d'opérateurs. C'est ce deuxième point de vue que l'on adopte dans cette étude.

§ I. Dans ce qui suit, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ étant une variété à bord de classe C^∞, de bord Γ.

Etant donné un entier m de $\mathbb{N}$, on considère N opérateurs différentiels $P_\ell \equiv P_\ell(x;D)$ pour $\ell=1,\dots,N$ d'ordre $\leq$ m à coefficients dans $C^\infty(\overline{\Omega})$. La partie principale d'ordre m de P_ℓ est notée P'_ℓ .

<u>Théorème 1</u> : avec les notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un entier k de $\mathbb{Z}$ tel que $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ P_\ell T \in H^k(\Omega),\ \ell=1,\dots,N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$.

(ii) pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ P_\ell T \in H^k(\Omega),\ \ell=1,\dots,N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$.

(iii) le système des opérateurs P_ℓ pour $\ell=1,\dots,N$ vérifie les conditions :

(A) pour tout x appartenant à Ω, pour tout ξ appartenant à $\mathbb{R}^n-\{o\}$ on a :

$$\sum_{\ell=1}^{N} |P'_\ell(x;\xi)|^2 \neq 0.$$

(B) pour tout x appartenant à Γ, pour tout ξ appartenant à $\mathbb{C}^n - \{o\}$ de la forme $\xi = \xi_1 + \tau\xi_2$ avec ξ_1 appartenant à $\mathbb{R}^n$ et tangent en x à Γ, ξ_2 vecteur normal unitaire en x à Γ et τ appartenant à $\mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{\ell=1}^{N} |P'_\ell(x;\xi)|^2 \neq 0.$$

Donnons tout de suite un exemple qui fournit une caractérisation intéressante de l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$:

$$H^m(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \; ; \; D_i^m T \in L^2(\Omega) \; i=1,\dots,n\}.$$

<u>Remarque 1</u> :

si les opérateurs P_ℓ sont à coefficients constants, le système des conditions (A) et (B) est équivalent à la condition unique :

(C) pour tout ξ appartenant à $\mathbb{C}^n - \{o\}$, on a $\sum_{\ell=1}^{N} |P'_\ell(\xi)|^2 \neq 0.$

<u>Démonstration du théorème 1</u> :

$\ast$ les conditions (A) et (B) sont suffisantes :

Plus précisément, on va montrer que si les conditions (A) et (B) sont vérifiées, l'espace $\{T\in \mathcal{D}'(\Omega) \; ; \; P_\ell T \in H^k(\Omega), \ell=1,\dots,N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$ pour tout k appartenant à $\mathbb{Z}$.

La démonstration est basée sur une méthode de dualité faisant intervenir un opérateur elliptique dégénéré.

On se donne une fonction φ de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \varphi(x) > o\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \varphi(x) = o\} \\ \text{grad } \varphi(x) \neq 0 \text{ pour } x \text{ appartenant à } \Gamma, \end{cases}$$

où grad $\varphi(x)$ est le vecteur gradient associé à $\varphi(x)$. On note $P_\ell^* \equiv P_\ell^*(x;D)$ l'opérateur adjoint formel de P_ℓ. Pour h appartenant à $\mathbb{N}$, on considère l'opérateur L défini sur Ω par :

$$Lu(x) \equiv L(x;D)\,\{u(x)\} \equiv \sum_{\ell=1}^{N} P_\ell^*(x;D)\ \{\varphi(x)^{2m+h}\, P_\ell(x;D)\,\{u(x)\}\}$$

et l'espace de Sobolev avec poids $W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega)$ défini par :

$$W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\ ;\ \varphi^{2m+h}\, u \in H^{2m+h}(\Omega)\}$$

et muni de la norme canonique.

En supposant que le système des opérateurs P_ℓ pour $\ell=1,\ldots,N$ vérifie les conditions (A) et (B), on déduit de [3] que l'opérateur L est un opérateur à indice de $W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega)$ dans $H_0^h(\Omega)$. Par suite, L est un isomorphisme algébrique et topologique de l'orthogonal H dans $W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega)$ du noyau de L dans $W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega)$, muni de la norme induite par celle de $W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega)$, sur un sous-espace M fermé et de codimension finie p dans $H_0^h(\Omega)$, muni de la norme induite par celle de $H_0^h(\Omega)$. Il existe p fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$, telles que :

$$H_0^h(\Omega) = M \oplus \mathbb{C}\,\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}\,\varphi_p .$$

De là, on déduit que l'espace $L\,(\mathcal{D}(\Omega) \cap H) \oplus \mathbb{C}\,\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}\,\varphi_p$ est dense dans $H_0^h(\Omega)$. En conclusion, on a construit un sous espace particulier de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui est dense dans $H_0^h(\Omega)$. On va voir que ce sous espace est fondamental pour démontrer que si les conditions (A) et (B) sont vérifiées, alors pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ P_\ell T \in H^k(\Omega),\ \ell=1,\ldots,N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$.

En effet, supposons tout d'abord $k \leq -m$ et soit T appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $P_\ell T$ appartienne à $H^k(\Omega)$ pour $\ell=1,\ldots,N$. On va démontrer que T appartient à $H^{k+m}(\Omega)$ dual de $H_0^{-k-m}(\Omega)$. Pour cela, on introduit l'opérateur L précédent et correspondant à $h = -k-m$.

Soit $\phi = Lu + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_i$ avec u appartenant à $\mathcal{D}(\Omega) \cap H$ et λ_i appartenant à $\mathbb{C}$ pour $i=1,\ldots,p$. On forme :

$$\langle T,\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{\ell=1}^{N} \langle P_\ell T, \varphi^{m-k} P_\ell u\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle T, \psi_i\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}$$

Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$|\langle T,\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}| \leq C_1 \left(\sum_{\ell=1}^{N} \|\varphi^{m-k} P_\ell u\|_{H_0^{-k}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \right)$$

D'après les propriétés de l'espace $W_{m-k}^{m-k}(\Omega)$, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que :

$$|\langle T,\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}| \leq C_2 \left(\|u\|_{W_{m-k}^{m-k}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \right)$$

Comme L est un isomorphisme de H sur M, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que :

$$|\langle T,\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}| \leq C_3 \left(\|Lu\|_{H_0^{-m-k}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \right)$$

D'après la décomposition de $H_0^{-m-k}(\Omega)$, il existe une constante $C_4 > 0$ telle que :

$$|\langle T,\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}| \leq C_4 \|\phi\|_{H_0^{-m-k}(\Omega)}.$$

D'où l'on en déduit que T appartient à $H^{m+k}(\Omega)$. C'est ce qu'on voulait. Lorsque $k > -m$, on procède par récurrence pour démontrer que $D^\alpha T$ appartient à $L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m+k$.

Remarque 2 : de façon générale, la méthode de dualité introduite précédemment permet de résoudre des problèmes de régularité du type étudié ici dès qu'on sait associer à l'ouvert Ω et au système d'opérateurs P_ℓ pour $\ell=1,\ldots,N$, un opérateur L convenable. Donnons un exemple où l'ouvert Ω n'est pas régulier : dans $\mathbb{R}^2$ soit un ouvert Ω borné dont la frontière est formée d'un nombre fini d'arcs réguliers tels qu'en chaque point de raccord de ces arcs, les tangentes soient distinctes ; alors pour un tel ouvert, on montre que l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \; ; \; D_i T \in H^{-1}(\Omega),\ i=1,2\}$ coïncide avec $L^2(\Omega)$. Mais il faut bien remarquer que si l'on supprime l'hypothèse faite sur les tangentes on n'est plus assuré de ce résultat.

$\ast$ les conditions (A) et (B) sont nécessaires.

Plus précisément, on va montrer que s'il existe k **appartenant à $\mathbb{Z}$** tel que l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ P_\ell T \in H^k(\Omega) \ \ell=1,\dots,N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$ alors les conditions (A) et (B) sont réalisées.

En effet, s'il existe k appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ;$ $P_\ell T \in H^k(\Omega) \ \ell=1,\dots,N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que pour tout T appartenant à $H^{m+k}(\Omega)$ on ait l'estimation a priori suivante :

$$\|T\|_{H^{m+k}(\Omega)} \leq C_k \left(\sum_{\ell=1}^{N} \|P_\ell T\|_{H^k(\Omega)} + \|T\|_{H^k(\Omega)} \right)$$

De là, on déduit que la forme intégro-différentielle a définie sur $H^{m+K}(\Omega) \times H^{m+K}(\Omega)$ par :

$$a(u,v) = \sum_{|\alpha|=K} \sum_{\ell=1}^{N} \int_\Omega D^\alpha P_\ell u(x) \overline{D^\alpha P v(x)} \, dx$$

est coercive sur $H^{m+K}(\Omega)$ (relativement à $L^2(\Omega)$) au sens de N. ARONSZAJN [1], où $K = \sup(o,k)$. De la condition nécessaire de coercivité donnée dans [1], on déduit que les conditions (A) et (B) sont vérifiées.

Ce qui termine la démonstration du théorème 1.

Remarque 3 :

Comme on vient de le montrer, l'étude de la régularité de l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ P_\ell T \in H^k(\Omega), \ \ell=1,\dots,N\}$ est étroitement liée à l'étude de la coercivité d'une certaine forme intégro-différentielle. Regroupant les résultats obtenus précédemment, on obtient :

Théorème 2 : pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ P_\ell T \in H^k(\Omega), \ \ell=1,\dots,N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$.

(ii) la forme $a(u,v) = \sum_{|\alpha|=K} \sum_{\ell=1}^{N} \int_\Omega D^\alpha P_\ell u . \overline{D^\alpha P_\ell v}\, dx$ est coercive sur $H^{m+K}(\Omega)$ (relativement à $L^2(\Omega)$) où $K = \sup(o,k)$.

(iii) les conditions (A) et (B) sont vérifiées.

Rappelons que l'on a montré que (iii) entraîne (i) par la méthode de dualité associée à un opérateur L elliptique et dégénéré, que (i) entraîne (ii) par une estimation a priori et enfin que (ii) entraîne (iii) par la condition nécessaire de N. ARONSZAJN [1]. Remarquons que l'on retrouve, sous des hypothèses de régularité convenables, la condition suffisante de N. ARONSZAJN [1] par une méthode totalement différente.

§ II. On utilise les notations du § I. La méthode de dualité introduite précédemment permet d'étudier la régularité de l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ; \varphi^r P_\ell T \in H^k(\Omega),\ \ell=1,\dots,N\}$ où k est un entier de $\mathbb{Z}$ et r un nombre réel, et permet de retrouver la condition suffisante de coercivité de formes intégro-différentielles, formellement positives, dégénérées sur le bord de l'ouvert Ω donnée dans [2].

On ne donne ici qu'un seul théorème :

Théorème 3 : pour tout nombre réel $r \geq o$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ; \varphi^r P_\ell T \in L^2(\Omega),\ \ell=1,\dots,N\}$ coïncide avec $W^m_r(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ; \varphi^r D^\alpha T \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m\}$

(ii) la forme $a(u;v) = \sum_{\ell=1}^{N} \int_\Omega \varphi^{2r}(x)\, P_\ell u(x)\, \overline{P_\ell v(x)}\, dx$ est coercive sur $W^m_r(\Omega)$ (relativement à $W^o_r(\Omega)$).

(iii) les conditions (A) et (B) sont vérifiées.

§ III. On donne maintenant quelques résultats de régularité pour des systèmes de distributions comme corollaire du théorème I ; pour cela, on se limite à des opérateurs différentiels à coefficients constants.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ étant une variété à bord de classe C^∞. Soient $P_i^j \equiv P_i^j(D)$ pour $i=1,\ldots,N$, $j=1,\ldots,M$ des opérateurs différentiels à coefficients constants d'ordre m_j. On note $P_i'^j$ la partie homogène d'ordre m_j de P_i^j.

<u>Théorème 4</u> : les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un entier k de $\mathbb{Z}$ tel que l'espace :

$$\{(T_1,\ldots,T_M) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^M,\ \sum_{j=1}^{M} P_i^j\, T_j \in H^k(\Omega),\ i=1,\ldots,N\}$$

coïncide avec $\prod_{j=1}^{M} H^{m_j+k}(\Omega)$.

(ii) pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, l'espace :

$$\{(T_1,\ldots,T_M) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^M,\ \sum_{j=1}^{M} P_i^j\, T_j \in H^k(\Omega),\ i=1,\ldots,N\}$$

coïncide avec $\prod_{j=1}^{M} H^{m_j+k}(\Omega)$.

(iii) le système des opérateurs P_i^j pour $i=1,\ldots,N$ et $j=1,\ldots,M$ vérifie la condition suivante :

(D) pour tout ξ appartenant à $\mathbb{C}^n - \{o\}$, le rang de la matrice $(P_i'^j(\xi))_{\substack{i=1,\ldots,N\\ j=1,\ldots,M}}$ est égal à M.

Pour terminer, on donne une généralisation de l'inégalité de Korn :

<u>Théorème 5</u> : pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, pour tout $(T_1,\ldots,T_n)$ appartenant à $(\mathcal{D}'(\Omega))^n$ tel que $D_iT_j + D_jT_i$ appartienne à $H^k(\Omega)$ pour $1 \leq i, j \leq n$, on a :

(i) T_j appartient à $H^{k+1}(\Omega)$ pour $j=1,\ldots,n$

(ii) $$\sum_{j=1}^{n} \|T_j\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq C_k \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|D_iT_j + D_jT_i\|_{H^k(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \|T_j\|_{H^k(\Omega)} \right)$$

(où C_k est une constante indépendante de $(T_1,\ldots,T_n)$).

Grâce à un système d'opérateurs introduits par DE FIGUEIREDO [5], ce résultat peut être amélioré sous la forme suivante :

étant donnés des nombres complexes λ_i^j pour $i=1,\ldots,n-1$ et $j=1,\ldots,n$ on a :

Théorème 6 : pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $(T_1,\ldots,T_n)$ appartenant à $(\mathcal{D}'(\Omega))^n$ tel que D_jT_j pour $j=1,\ldots,n$ et $(\sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j D_j)(\sum_{h=1}^{n} \lambda_i^h T_h)$ pour $i=1,\ldots,n-1$, appartiennent à $H^k(\Omega)$, on a :

1) T_j appartient à $H^{k+1}(\Omega)$ pour $j=1,\ldots,n$

2) $$\sum_{j=1}^{n} \|T_j\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq C_k \Big(\sum_{j=1}^{n} \|D_jT_j\|_{H^k(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n-1} \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j D_j\Big)\Big(\sum_{h=1}^{n} \lambda_i^h T_h\Big)\Big\|_{H^k(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \|T_j\|_{H^k(\Omega)} \Big)$$

(où C_k est une constante indépendante de $(T_1,\ldots,T_n)$)

(ii) les mineurs de la matrice $(\lambda_i^j)_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,n-1}}$ sont tous non nuls.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAJN : On coercive integro-differential quadratic forms ; Techn. Report n° 14, Univ. of Kansas, (1954), 94-106.

[2] P. BOERO; R. PAVEC : Coercivité de formes sesquilinéaires intégro différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids ; C.R.A.S. Paris, t 270, (1970), 1416-1419.

[3] P. BOLLEY; J. CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables ; à paraître.

[4] J. DENY; J.L. LIONS : Les espaces du type de Beppo Levi ; Ann. Inst. Fourier, 5, (1955) 305-370.

[5] D.G. de FIGUEIREDO : The coerciveness problem for forms over vector valued functions ; C.P.A.M, Vol XVI, (1963), 63-94.

[6] K.T. SMITH : Inequalities for formally positive integro-differential forms ; Bull. Am. Math. Soc., 67, (1961), 368-370.