Astérisque

A. BRUNEL

D. REVUZ

Marches aléatoires récurrentes au sens de Harris

Astérisque, tome 4 (1973), p. 137-156

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__137_0>

MARCHES ALEATOIRES RECURRENTES AU SENS DE HARRIS

PAR A. BRUNEL ET D. REVUZ

0 - Introduction et notations.-

Nous nous proposons d'étudier à des groupes plus généraux les résultats établis par D. Ornstein [VI] à propos de la normalité des marches aléatoires sur $\mathbb{R}$,récurrentes au sens de Harris. En ce qui concerne le problème du renouvellement, un travail ultérieur de Brunel et Revuz contiendra les généralisations des théorèmes connus dans le cas des groupes abéliens élémentaires. Les démonstrations que nous donnons ici s'appuient essentiellement sur des travaux récents de J. Neveu [V] sur les chaînes de Harris. En particulier, nous ferons usage des opérateurs potentiel W_h , introduits par Neveu, et nous emploierons des notations à quelques modifications près. L'une des différences avec la situation envisagée par Ornstein est que notre groupe, soit G, n'est plus nécessairement abélien. Cependant, Keane, Guivarc'h et Brunel ont démontré que si un groupe localement compact et de type dénombrable porte une marche de Harris, il est unimodulaire (1). Soit alors m la mesure de Haar, coïncidant nécessairement avec l'unique mesure invariante de la marche aléatoire (unique à un facteur près). Choisissant de ne considérer que des marches aléatoires à gauche et notant μ la probabilité d'une telle marche, il est commode de lui associer la marche " duale " de probabilité $\hat{\mu}$, image de μ par l'application $x \longmapsto x^{-1}$. Il est alors utile de se servir d'un

(1) Ce résultat vient d'être étendu au cas de marches récurrentes , plus nécessairement au sens de Harris, par Brunel, Crépel, Guivarc'h et Keane [III].

d'un opérateur W_h qui admette un transposé $\hat{W}_h$ qui se construise à partir de h et $\hat{\mu}$ comme W_h l'est à partir de h et de μ, la fonction spéciale h étant symétrique. Cela nécessite que h vérifie les conditions

$$U_h \geq 1 \otimes m \qquad \text{et} \qquad \hat{U}_h \geq 1 \otimes m.$$

Il est commode aussi que h soit continue. Dans une récente note aux Comptes Rendus, Brunel et Revuz [II] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une telle fonction h et il en sera fait usage.

Soit G un groupe localement compact, de type dénombrable. Etant donnée une mesure de probabilité μ sur les boréliens de G, on définit le noyau de transition P_g (resp. P_d) de la marche aléatoire à gauche (resp. à droite) de probabilité μ, sur G, par

$$P_g f(x) = \int f(yx) d\mu(y) \quad (\text{resp. } P_d f(x) = \int f(xy) d\mu(y)),$$

f étant une fonction ≥ 0, borélienne sur G. Nous utiliserons aussi les opérateurs de translation, ou de symétrie, donnés par les applications,

$$A \in G \quad ; \quad \tau_a f : x \longmapsto f(xa)$$
$$Sf : x \longmapsto f(x^{-1}),$$

et l'on vérifie aisément que

$$\forall\, a \in G \qquad P_g . \tau_a = \tau_a . P_g \quad , \quad P_g S = S\, \hat{P}_d .$$

En effet, on a par exemple

$$P_g S\, f(x) = \int f(x^{-1} y^{-1}) d\mu(y) = \int f(x^{-1} z) d\hat{\mu}(z) = \hat{P}_d f(x^{-1}) = S\, \hat{P}_d f(x).$$

Soit m_g (resp. m_d) la mesure de Haar invariante sous les translations $(\tau_a \; ; \; a \in G)$.

Rappelons encore que si l'on écrit $P_g^n f(x) = \int f(yx)d\mu_n(y)$, la mesure μ_n admet une décomposition de Lebesgue.

$$\mu_n = d_n \cdot m_g + \theta_n \quad \text{avec} \quad \theta_n \wedge m = 0,$$

relativement à m_g, dont la partie absolument continue $d_n \cdot m_g$ est > 0 pour un entier n si la condition de Harris est satisfaite. Il est alors connu que $||\theta_n|| \searrow 0$.

1 - LE THEOREME K.G.B.

Théorème 1.1

Tout groupe G, localement compact et de type dénombrable, portant une marche aléatoire récurrente au sens de Harris, est unimodulaire.

Démonstration

Soient f et h, non nulles dans $\mathcal{C}_K^+$ ($\mathcal{C}_K$ = ensemble des fonctions continues, à support compact, sur G). Le théorème ergodique quotient global (voir par exemple [IV]), nous donne que

$$\lim_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_g^k(f)(e)}{\sum_{k=1}^{n} P_g^k(h)(e)} = \frac{m_g(f)}{m_g(h)} \quad \text{et}$$

$$\lim_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_d^k(f)(e)}{\sum_{k=1}^{n} P_d^k(h)(e)} = \frac{m_d(f)}{m_d(h)},$$

e désignant l'élément neutre de G.

Mais pour tout k,

$$P_g^k f(e) = \int \cdots \int_{G^k} f(y_k y_{k-1} \cdots y_n) d\mu(y_k) \cdots d\mu(y_1) = P_d^k f(e).$$

On a donc :

$$\frac{m_g(f)}{m_g(h)} = \frac{m_d(f)}{m_d(h)} ,$$

qui entraîne la proportionnalité des mesures m_g et m_d. ∎

Dans ce qui va suivre, nous considérerons seulement des marches aléatoires à gauche, nous désignerons par m la mesure de Haar de G et nous poserons $P_g = P$.

2 - PRELIMINAIRES A LA NORMALITE. -

Soit $\mathcal{S}$ (resp. $\hat{\mathcal{S}}$) le cône des fonctions spéciales associées à P (resp. $\hat{P}$). Si $h \in \mathcal{S}$ et $U_h \geq 1 \otimes m$, on a aussi $U_{\tau h} \geq 1 \otimes m$ pour tout opérateur de translation à droite τ. En effet, soit I_k l'opérateur de multiplication par la fonction k. On a alors

$$\tau \circ I_h = I_{\tau h} \quad \tau,$$

puis les égalités,

$$\tau U_h = \sum_{n \geq 0} \tau P(I_{1-h}P)^n = \sum_{n \geq 0} P(I_{1-\tau h}P)^n \tau = U_{\tau h} \tau,$$

qui, puisque $\tau 1 = 1$ et $m\tau = m$, entraînent,

$$U_h \geq 1 \otimes m \Longrightarrow \tau U_h \geq 1 \otimes m \Longrightarrow U_{\tau h} \geq (1 \otimes m)\tau^{-1} = 1 \otimes m.$$

Venons-en aux opérateurs potentiel W_h , définis par

$$W_h = \sum_{n \geq 0} V_h (I_h V_h)^n \quad \text{avec} \quad V_h = U_h - 1 \otimes m.$$

Les relations précédentes montrent que

$$\tau W_h = W_{\tau h} \tau .$$

Lemme 2.1

Il existe une fonction continue, symétrique et strictement positive $h \in \mathcal{S}$, telle que

i) $U_h \geq 1 \otimes m$, $\hat{U}_h \geq 1 \otimes m$.

ii) $||W_h(\tau_a h-h)||_\infty$ et $||\hat{W}_h(\tau_a h-h||_\infty$ tendent vers zéro lorsque $a \longrightarrow e$.

Démonstration

Soit $u \in \mathcal{C}_K^+$, $u \neq 0$. La fonction

$$h_1 = b \sum_{n\geq 0} 2^{-n} P^n u \quad ; \; b > 0$$

est spéciale. En effet, si h_o est telle que $U_{h_o} \geq 1 \otimes m$, on vérifie facilement que $\frac{1}{n} ||U_{h_o} P^n u||_\infty$ est une suite bornée, ce qui implique :

$U_{h_o}(h_1)$ est bornée, donc $h_1 \in \mathcal{S}$.

D'autre part, il est clair que h_1 est > 0 et continue. La fonction $h_2 = h_1 \wedge Sh_1$ est alors spéciale et co-spéciale et, d'après un théorème de A. Brunel et D. Revuz [II], en choisissant la constante $b > 0$ suffisamment petite, les conditions i) sont satisfaites pour h_2. Soit alors $\mathcal{V}_o$ un voisinage compact de e et posons :

$$h' = \inf_{b \in \mathcal{V}_o} \tau_b (h_2)^2 \quad , \; h = h' \wedge Sh',$$

et montrons que h, qui vérifie aussi manifestement les conditions i), satisfait aux conditions ii).

Pour cela, observons d'abord que

$$(1) \qquad a \longrightarrow e \Longrightarrow ||\frac{\tau_a h-h}{h_2}|| \longrightarrow 0.$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $K_\varepsilon = \{h_2 \geq \varepsilon\}$ est compact et l'on a :

$$b \in \mathcal{V}_o \Longrightarrow \frac{|\tau_b h-h|}{h_2} \leq 2\,\varepsilon \quad \text{sur } K_\varepsilon^c .$$

D'autre part, $\tau_a h - h \longrightarrow 0$, uniformément sur K_ε, lorsque $a \longrightarrow e$. Puisque $h \leq h_2$, $U_h \geq 1 \otimes m$ et l'on peut écrire, d'après Neveu,

$$(2) \qquad W_{h_2} + \frac{1}{m(h_2)} W_h(h_2) \otimes m = W_h + \frac{1}{m(h)} 1 \otimes (hm) W_{h_2},$$

qui nous donne :

$$(3) \qquad W_{h_2}(\tau_a h-h) = W_h(\tau_a h-h) + \frac{1}{m(h)} < h , W_{h_2}(\tau_a h-h > .$$

La limite (1) entraîne que $W_{h_2}(\tau_a h-h) \longrightarrow 0$, uniformément quand $a \longrightarrow e$ et (3) montre qu'il en est de même de $W_h(\tau_a h-h)$. Un calcul analogue s'applique à $\hat{W}_h$. ∎

Ultérieurement, h désignera une fonction, choisie une fois pour toutes, satisfaisant aux conditions du lemme 2.1.

Nous allons voir tout de suite pourquoi une telle fonction h a été construite en démontrant les lemmes suivants :

<u>Lemme 2.2</u>

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_k^+$. On a l'inégalité :

$$(4) \qquad \forall\, a \in G \quad ||W_h\varphi - W_{\tau_a h}\varphi||_\infty \leq \frac{m(\varphi)}{m(h)} (||\hat{W}_h(\tau_a h-h)||_\infty + ||W_h(\tau_{a^{-1}} h-h)||_\infty).$$

On peut écrire, d'après la formule (2),

$$W_h\varphi - W_{\tau_a h}\varphi = \frac{1}{m(h)} < \tau_a h, W_h\varphi > - \frac{m(\varphi)}{m(h)} W_{\tau_a h}(h),$$

et, en tenant compte des égalités (voir [V]) ,

$$W_h(h) = W_{\tau_a h}(\tau_a h) = \frac{1-m(h)}{m(h)} ,$$

on obtient

$$(5) \qquad W_h\varphi - W_{\tau_a h}\varphi = \frac{1}{m(h)} <\hat{W}_h(\tau_a h-h),\varphi> - \frac{m(\varphi)}{m(h)} \cdot W_{\tau_a h}(h-\tau_a h).$$

On a fait usage de la formule de dualité :

$$< Pf,g >= <f,\hat{P}g>$$

qui entraîne à son tour

$$< W_h f,g >= <f,\hat{W}_h g>$$

quelles que soient f , g , boréliennes et positives.

On déduit de (5) l'inégalité (4) cherchée.

Lemme 2.3

Pour toute $f \in \mathcal{C}_K^+$, la suite de fonctions $\overline{W_h P^n f}$ est bornée sur tout compact.

Démonstration

Il suffira de montrer que pour tout $x_o \in G$, la suite est bornée sur un voisinage $x_o \mathcal{V}$ de x_o, $\mathcal{V}$ étant un voisinage compact de e. Soit $a \in \mathcal{V}$. On peut écrire

$$W_h P^n f\ (x_o a) - W_h P^n f(x_o) = W_{\tau_a h} P^n(\tau_a f)(x_o) - W_h P^n f(x_o)$$

$$= W_{\tau_a h}(P^n \tau_a f)(x_o) - W_h(P^n \tau_a f)(x_o) + W_h P^n(\tau_a f-f)(x_o).$$

Si $f' = \sup_{a \in \mathcal{V}_o} (\tau_a f) \in \mathcal{C}_K^+$ et si $\mathcal{V}$ désigne un voisinage de e contenu dans $\mathcal{V}_o$, on a l'inégalité :

$$a \in \mathcal{V} \qquad |\tau_a f - f| \leq \eta\ (\ )f',$$

où $\eta\ (\mathcal{V})$ est aussi petit que l'on veut pourvu que $\mathcal{V}$ soit suffisamment petit. On en tire, si $a \in \mathcal{V}$:

$$(6) \qquad |W_h P^n(\tau_a f-f)(x_o)| \leq \eta\ (\mathcal{V})\ W_h P^n f'(x_o).$$

Compte tenu du lemme 2.1, le problème est donc ramené à prouver que la suite numérique $W_h P^n f(x_o)$ est bornée pour tout $f \in \mathcal{C}_K^+$ et tout point $x_o \in G$.

Supposons donc l'existence d'une sous suite d'entiers $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$, telle que

$$\lim_j \; W_h P^{n_j} f(x_o) = + \infty .$$

Avec les notations précédentes, on a

$$a \in \mathcal{V}_o \;,\; W_h P^n f'(x_o a) = W_{\tau_a h} P^n (\tau_a f')(x_o) \geq W_{\tau_a h} P^n f(x_o)$$

et le lemme 2.2 montre que la suite $W_h P^n f'$ converge vers $+\infty$ uniformément sur $x_o \mathcal{V}_o$. Soit alors $g \in \mathcal{C}_K^+$, $g \neq 0$ et $\mathrm{supp}(g) \subset x_o \mathcal{V}_o$. La relation

$$< g, W_h P^n f'> \; = \; <\hat{W}_h g, P^n f'> \;\; \leq \; ||\hat{W}_h g||_\infty \; ||f'||_1$$

conduit à une contradiction. ∎

On va maintenant préciser le résultat qui vient d'être acquis en démontrant le

Lemme 2.4

Pour toute $f \in \mathcal{C}_K^+$, la suite de fonctions $\overline{W_h P^n f}$ est uniformément équicontinue sur tout compact.

Démonstration

Posons pour tout voisinage compact $\mathcal{v}$ de e,

$$\xi(\mathcal{v}) = \sup_{a \in v} \left(||\hat{W}_h (\tau_a h - h)||_\infty + ||W_h(\tau_{a^{-1}} h - h)||_\infty \right).$$

Les calculs faits dans la preuve du lemme 2.3 montrent que :

(7) $$|W_h P^n f(x_o a) - W_h P^n f(x_o)| \leq \frac{m(f)}{m(h)} \, \xi(v) + W_h P^n f'(x_o) \eta(v).$$

Si K est un compact de G, le lemme 2.3 donne que

$$\sup_{x_o \in K} \sup_n W_h P^n f'(x_o) = B < +\infty,$$

et l'inégalité (7) montre l'existence d'un $\mathcal{V}$, qui, pour tout ε, satisfait à

$\forall\ x, y \in K$, $x^{-1}y \in \mathcal{V} \Longrightarrow |W_h P^n f(y) - W_h P^n f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout n. ■

Remarque.-

On peut appliquer la même technique à la suite de fonctions $P^n W_h f$, avec la simplification due au fait que

$$|P^n W_h f(x)| \leq ||W_h f||_\infty ,$$

et en déduire des résultats analogues.

Si l'on tient maintenant compte des hypothèses faites sur G, qui entraînent en particulier la séparabilité de $\mathcal{C}_K$, on peut énoncer la proposition suivante qui est une conséquence immédiate du théorème d'Ascoli.

Proposition 2.5

De toute suite infinie d'entiers on peut extraire une sous-suite, soit $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$, qui a les propriétés suivantes :

Pour toute $f \in \mathcal{C}_K$, les suites de fonctions $W_h P^{n_j} f$, $P^{n_j} W_h f$, $\hat{W}_h \hat{P}^{n_j} f$ et $\hat{P}^{n_j} \hat{W}_h f$ convergent ponctuellement sur G.

3 - LA NORMALITE. -

Soit $f \in \mathcal{C}_K$, $m(f) = 0$. On a, pour tout n,

$$W_h f - P^n W_h f = \sum_{k=1}^{n} P^k f.$$

La normalité de la marche aléatoire, c'est à dire la convergence ponctuelle de la série $\sum_1^\infty P^k f$, équivaut à la convergence de la suite $P^n W_h f$ [I] . Pour que la série converge il faut que

$\lim_n P^n f(x) = 0$ partout. Plus généralement, démontrons-le.

Lemme 3.1

Pour toute $\varphi \geq 0$, continue et m-intégrable,
$\lim_n P^n \varphi(x) = 0$ partout.

Démonstration

On a $P^n \varphi \leq \|\varphi\|_\infty$. La fonction $\overline{\varphi} = \overline{\lim_n} P^n \varphi$ est bornée et vérifie : $P \overline{\varphi} \geq \overline{\varphi}$, donc est constante, soit $\overline{\varphi} = a$. Soit (n_j) une sous-suite telle que $P^{n_j}\varphi$ converge ponctuellement vers ψ. On a : $0 \leq \psi \leq a$. En outre, cette sous-suite peut être choisie de telle sorte que, q étant un entier > 0 fixé, $P^{n_j+q}\varphi\,(e) \xrightarrow[j \to \infty]{} a$. Pour tout compact K de G, on peut écrire :

$$\int_K P^{n_j}\varphi \, dm \xrightarrow[j \to \infty]{} \int_K \psi \, dm.$$

On a aussi :

$$P^{n_j+q}\varphi\,(e) = \int P^{n_j}\varphi(y)\,d\mu_q(y) \xrightarrow[j \to \infty]{} \int \psi(y)\,d\mu_q(y),$$

d'où l'on tire

$$a = \int \psi(y)\,d\mu_q(y).$$

Donc $\psi = a$, μ_q - p.p. et si K est contenu dans le support de μ_q, on obtient :

$$a\, m(K) \leq \|\varphi\|_1$$

Puisque m(K) peut être arbitrairement grand, on a bien $a = 0$. ∎

Lemme 3.2

Soit $f \in \mathcal{C}_K$ et (n_j) une suite vérifiant les conditions de la proposition 2.5 . Alors

$$\lim_j P^{n_j} W_h f = C^{ste}$$

En outre

$$\forall\ x\ ,\ y \in G \qquad \lim_n \left(P^n W_h f(x) - P^n W_h f(y)\right) = 0$$

Démonstration

On applique la formule [voir V] ,

$$P + PW_h = W_h + \frac{1}{m(h)}\ Ph \otimes m, \tag{8}$$

qui donne, pour tout entier > 0,

$$P^{n+1} W_h f(x) = P^n W_h f(x) - P^{n+1} f(x) + \frac{m(f)}{m(h)}\ P^{n+1} h(x).$$

Si l'on pose $\psi = \lim_j P^{n_j} W_h f$, on en déduit, grâce au lemme 3.2,

$$P\ \psi(x) = \psi\ (x),$$

donc $\psi = C^{ste}$. Le reste du lemme en est une conséquence immédiate.

Proposition 3.3

Soit $(n_j) = s$ une suite vérifiant les conditions de la proposition 2.5. Alors

$$\forall\ x \in G \qquad \lim_j\ \varepsilon_x\ W_h P^{n_j} = \gamma^s(x).m, \tag{9}$$

où la limite est prise au sens de la topologie vague sur l'espace des mesures de Radon sur l'espace localement compact G. La fonction γ^s est uniformément continue à droite et vérifie la relation

(10) $$P(\gamma^s) = \gamma^s + \frac{1}{m(h)} Ph.$$

Si $\gamma^{s'}$ est la fonction analogue associée à une autre suite s', la fonction $X = \gamma^{s'} - \gamma^s$ est un caractère réel de G tel que $P(|X|) - |X|$ soit m-intégrable.

Démonstration.

Soient $f, g \in \mathcal{C}_K$. La relation de dualité :

$$< W_h P^{n_j} f, g > = < f, \hat{P}^{n_j} \hat{W}_h g >,$$

et le lemme 3.2 montrent que :

$$m(f) = 0 \Longrightarrow \lim_j W_h P^{n_j} f = 0,$$

et ceci démontre (9).

Soit maintenant $f \in \mathcal{C}_K^+$, $f \neq 0$. De l'inégalité (4) du lemme 2.2, on déduit

$$a \in \mathcal{V} \qquad ||\gamma^s - \tau_a \gamma^s||_\infty \leq \frac{1}{m(h)} \xi(\mathcal{V}) ,$$

en écrivant que :

$$W_{\tau_a h} P^{n_j} f(x) = W_h P^{n_j} (\tau_{a^{-1}} f)(x) \xrightarrow[j \to \infty]{} m(f) \gamma^s(xa) = m(f) \tau_a \gamma^s(x).$$

Pour démontrer (10), nous utiliserons la relation (8), qui nous donne :

$$P^{n_j+1} f + P W_h P^{n_j} f = W_h P^{n_j} f + \frac{m(f)}{m(h)} Ph,$$

d'où l'on déduit, grâce au lemme 3.1,

$$m(f)\, P\, (\gamma^s) = m(f)\, \gamma^s + \frac{m(f)}{m(h)} Ph.$$

Enfin, si $\chi = \gamma^{s'} - \gamma^s$, $P(|\chi|)$ est finie et $\chi - \tau_a \chi$ est bornée pour tout $a \in G$. En outre $P\chi = \chi$. Cela entraîne que

$$P(\chi - \tau_a \chi) = \chi - \tau_a \chi ,$$

donc $\chi - \tau_a\chi$ est constante, soit

$$\forall\, x \in G \qquad \chi(x) - \chi(xa) = \chi(e) - \chi(a).$$

χ est donc la somme d'une constante et d'un caractère réel de G.

D'autre part,

$$< h\ ,\ W_h P^{n_j} f > \ = \ < \hat{W}_h(h)\ ,\ P^{n_j} f > = \frac{1-m(h)}{m(h)}\ m(f)\ ,$$

d'où l'on déduit, par le lemme de Fatou, que

$$\text{(11)} \qquad \int h\ \gamma^s\ dm \leq \frac{1-m(h)}{m(h)}.$$

Pour démontrer que la relation (11) est en fait une égalité, observons que pour toute $g \in \mathcal{C}_K^+$, on a

$$\text{(12)} \qquad \int g\ \gamma^s dm = \lim_j \hat{P}^{n_j} \hat{W}_h(g),$$

et aussi, pour tout k entier > 0,

$$\int \hat{P}^k g\ \gamma^s dm = \lim_j \hat{P}^{n_j} \hat{W}_h(\hat{P}^k g)\ ,$$

en utilisant les formules de Neveu.

Autrement dit, les fonctions g pour lesquelles (12) est vraie comprennent les éléments de $\mathcal{C}_K$ et aussi les combinaisons linéaires de leurs transformées par des puissances de $\hat{P}$. En outre, les considérations développées lors de la construction de h, montrent que, si $u \in \mathcal{C}_K^+$, $u \neq 0$, la fonction

$$\varphi = \sum_{n \geq 0} 2^{-n} \hat{P}^n u,$$

vérifie aussi la relation (12). Or, il est loisible de supposer que $h \leq \varphi$ et l'inégalité

$$\int (\varphi - h)\ \gamma^s dm \leq \lim_j \hat{P}^{n_j} \hat{W}_h(\varphi - h)$$

$$= \int \varphi\ \gamma^s dm - \frac{1-m(h)}{m(h)}\ ,$$

nous donne bien l'égalité dans (11).

Donc $\int X\, h\, dm = 0$ et puisque h est symétrique, X est bien un caractère réel de G.

Maintenant l'égalité $PX = X$ montre que $P(|X|) \geq |X|$. Si la fonction $v = P(|X|) - |X|$ n'était pas m-intégrable, la suite des rapports

$$\frac{\sum_{1}^{n} P^k v}{\sum_{1}^{n} P^k h}$$

aurait pour limite $+\infty$, ce qui est en contradiction avec le fait que $|X| \leq \gamma^s + \gamma^{s'}$, qui entraîne pour tout n entier > 0,

$$P^n\, |X| \leq \frac{2}{m(h)}\, (Ph + P^r h + \ldots + P^n h) + \gamma^s + \gamma^{s'} . \blacksquare$$

Lemme 3.4

Tout caractère X de G, donné par la proposition précédente satisfait à la condition

$$(13) \qquad \forall\, a \in G \qquad \lim_{n}\ (I - {}_{a})P^n\, |X| = 0$$

Démonstration

Un tel X est continu et le noyau de X est un sous-groupe fermé de G. Le groupe quotient $G/_{Ker(X)}$ est localement compact et l'image de G par X est, soit R, soit un sous-groupe de $\mathbb{R}$ de la forme $a\,\mathbb{Z}$, tout autre cas étant exclu à cause de l'intégrabilité de $P(|X|) - |X|$ par rapport à la mesure de Haar. Plaçons-nous par exemple dans le cas où $X(G) = \mathbb{R}$ (l'autre cas se traiterait de façon analogue). Posons $X(x) = x'$ et désignons par μ' la mesure image de μ par X. Soit P' le noyau associé à la marche aléatoire sur $\mathbb{R}$ de probabilité μ'. Il est clair que,

$$(I-\tau_a)P^n(|X|)(x) = (I-\tau'_{a'})P'^n(|X'|)(x'),$$

où $X'(x') = x'$ et $\tau'_{a'} f'(x') = f'(x'+a')$.

On a aussi :

$$\int(P|X| - |X|)\, dm = \int_{\mathbb{R}} (P'(|X'|) - |X'|)\, dx'.$$

Or $|X'| = x'^+ + x'^-$ et $\frac{1}{2} P'(|X'|) - |X'| = P'(x'^+)-x'^+ = P'(x'^-)-x'^-$

qui donnent

$$\int(P|X| - |X|\, dm = 2\int_{\infty}^{0} P'(x'^+)dx' + 2\int_0^{+\infty} P'(x'^-)dx' =$$

$$2\int_0^{+\infty} x'(P'1_{|-\infty,0|})dx' - 2\int_{\infty}^{0} x'(P'1_{|0,+\infty|})dx'$$

et, transformant les deux dernières intégrales :

$$2\int_0^{+\infty} x'dx' \int 1_{]-\infty,0]}(y'+x')d\mu'(y') = 2\int_{\infty}^{0} d\mu'(y') \int_0^{-y'} x'dx' =$$

$$\int_{-\infty}^{0} y'^2 d\mu'(y') \;,$$

$$-2\int_{\infty}^{0} x'(P'1_{[0,+\infty[})dx' = -2\int_0^{+\infty} d\mu'(y') \int_{y'}^{0} x'dx' = \int_0^{+\infty} y'^2 d\mu'(y').$$

On obtient :

$$\int(P\,|X| - |X|)dm = \int_{\mathbb{R}} y'^2 d\mu'(y') < +\infty\;.$$

Ainsi μ' a un moment d'ordre 2 et le théorème central limite nous indique que

$$\lim_n P'^n(1_{[0,+\infty[})\,(0) = \lim_n P'^n(1_{]-\infty,0]})\,(0) = \frac{1}{2}\;.$$

De là, on déduit aisément la relation cherchée,

$$\lim_n P'^n((I - \tau'_{a'})\,|X'| = 0. \blacksquare$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le

Théorème 3.5

i) La suite de mesures $\varepsilon_x W_h P^n$ converge vaguement vers la mesure $\gamma_h(x).m$, où la fonction $\gamma_h(x)$ ne dépend que de h et a les propriétés énoncées dans la proposition 3.3 pour γ^s.

ii) Pour tout $f \in \mathcal{I} \cap \hat{\mathcal{I}}$, la suite $\hat{P}^n \hat{W}_h f$ converge et l'on a

$$\lim_n \hat{P}^n \hat{W}_h f = \int f \gamma_h \, dm.$$

iii) On a des résultats analogues en renversant les rôles de μ et $\hat{\mu}$ (dans ii)).

iv) Toute marche aléatoire récurrente au sens de Harris est normale.

Démonstration

i) Le premier point est de vérifier l'unicité des limites γ^s données par la proposition 3.3. La formule [voir V],

$$P + W_h P = W_h + \frac{1}{m(h)} 1 \otimes (hm) P,$$

nous donne, pour $g \in \mathcal{C}_K^+$ et n entier > 0,

$$W_h P^n g = W_h g + \frac{1}{m(h)} < h, Pg + \ldots + P^n g > - (Pg + \ldots + P^n g),$$

d'où, pour $a \in G$,

$$(I - \tau_a) W_h P^n g = (I - \tau_a) W_h g + \sum_1^n (I - \tau_a) P^k g.$$

Si $s = (n_j)$ et $s' = (n'_j)$ sont deux sous-suites produisant γ^s et $\gamma^{s'}$, de différence X, on a

$$(14) \qquad m(g)\,(I - \tau_a) X = \lim_j \sum_{n_j}^{n'_j} (I - \tau_a) P^k g,$$

(où l'on peut avoir $n'_j > n_j$, ou $n'_j \leq n_j$, c'est à dire que la notation Σ désigne, soit $\sum_{n_j}^{n'_j}$, soit $\sum_{n'_j}^{n_j}$).

Le second membre de (14) est la limite d'une suite bornée et, v désignant la fonction m-intégrable $\hat{P}(|X|) - |X|$, on peut écrire

$$< v, \sum_{n_j}^{n'_j} (I - \tau_a)P^k g > = < (I - \tau_{a^{-1}})(\hat{P}^{n'_j+1}|X| - \hat{P}^{n_j}|X|) \quad g >,$$

et le lemme 3.4 montre que

$$m(g)\ ((I - \tau_a)X)\ m(v) = 0,$$

Soit $(I - \tau_a)X = - X(a) = 0$. Le caractère X est donc nul.

On a fait usage de l'intégrabilité de $\hat{P}(|X|) - |X|$, ce qui se voit de la façon suivante ;

$$S(P(|X|) - |X|) = \hat{P}_d(|X|) - |X| = \hat{P}(|X| - |X| .$$

ii) La relation,

$$\lim_n \hat{P}^n \hat{W}_h f = \int f\, \gamma_h dm \tag{15}$$

impliquant l'existence de la limite au premier membre, est valable pour $f \in \mathcal{C}_K$ et $f = h$.

Si f est une fonction borélienne, $0 \leq f \leq h$, le lemme de Fatou nous donne

$$\underline{\lim}_n \hat{P}^n \hat{W}_h f \geq \int f\, \gamma_h dm, \tag{16}$$

en considérant les fonctions de $\mathcal{C}_K^+$, inférieures à f.

Il suffit d'écrire ensuite,

$$\int h\gamma_h dm = \lim_n \hat{P}^n \hat{W}_h h \geq \underline{\lim}_n \hat{P}^n \hat{W}_h f + \underline{\lim}_n \hat{P}^n \hat{W}_h (h-f) \geq$$

$$\geq \int f\gamma_h dm + \int (h-f)\gamma_h dm = \int h\gamma_h dm,$$

pour en déduire que (16) est une égalité.

La relation (15) est ainsi vérifiée pour toute fonction spéciale majorée par un multiple de h.
Soit, pour terminer, $g \in \mathcal{S} \cap \hat{\mathcal{S}}$. On peut supposer, quitte à multiplier g par une constante > 0, suffisamment petite que $U_g \geq 1 \otimes m$ et $\hat{U}_g \geq 1 \otimes m$. La formule de Neveu,

$$(17) \qquad W_h + \frac{1}{m(h)} W_g(h) \otimes m = W_g + \frac{1}{m(g)} 1 \otimes (gm) W_h ,$$

montre alors que la suite $W_g P^n f$, pour toute $f \in \mathcal{C}_K$, a les propriétés énoncées dans les lemmes 2.3 et 2.4 pour la suite correspondante $W_h P^n f$. On peut en déduire comme dans le dernier théorème la convergence ponctuelle de la suite $W_g P^n f$, d'où la convergence de la suite $\hat{P}^n \hat{W}_g \varphi$ pour toute fonction borélienne φ majorée par un multiple de g. En revenant à la formule (17) on en déduit la convergence de $P^n W_h g$. Le lemme de Fatou donne ensuite l'égalité de ii). ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BRANCOVAN
C.R.A.S. - 12 juillet 1971 - tome 273 - p. 115-117 Série A

[2] A. BRUNEL et D. REVUZ
" Quelques applications probabilistes de la quasi-compacité "
Note à paraître

[3] A. BRUNEL - P. CREPEL - Y. GUIVARC'H et M. KEANE
" Marches aléatoires récurrentes sur les groupes localement compacts " C.R.A.S. décembre 1972

[4] M. METIVIER
" THéorèmes limite quotient pour chaînes de Markov récurrentes au sens de Harris "
Ann. Inst. H. Poincaré - VIII - n° 2 - 1972 - p. 93-105

[5] J. NEVEU
" Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris "
Ann. Inst. Fourier - tome XXII - Fasc. 2 - 1972

[6] D. ORNSTEIN
" Random walks "
T.A.M.S. - Vol. 138 - Avril 1969

A. BRUNEL et D. REVUZ
Laboratoire de Probabilités
Université de PARIS VI
9, quai St Bernard - Tour 56
PARIS - 5ème