Astérisque

YVES GUIVARC'H

Extension d'un théorème de Choquet-Deny à une classe de groupes non abéliens

Astérisque, tome 4 (1973), p. 41-59

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__41_0>

EXTENSION D'UN THEOREME DE CHOQUET-DENY

A UNE CLASSE DE GROUPES NON ABELIENS *

par Y. GUIVARC'H

* Ce travail est essentiellement le chapitre V d'une thèse de Doctorat d'Etat soutenue à l'Université de Rennes le 25/11/1972

On étudie dans ce chapitre l'invariance asymptotique de la suite p^n où p est une probabilité donnée sur le groupe localement compact G . G sera supposé séparable et unimodulaire et p apériodique, c'est à dire que G est engendré topologiquement par le support de p. On donne en particulier des conditions suffisantes sur le couple (G,p), généralisant celles de (1), pour que les seuls éléments **f** de L^∞ (G) vérifiant $f * p = f$ soient les constantes.

H étant un sous - groupe fermé distingué de G on notera, pour toute partie $A \subset H$ et tout élément g de G

$$A^g = g^{-1} A g \subset H \qquad A^G = \{g^{-1} a g \ ; \ a \in A \ ; \ g \in G\}$$

De même, pour une mesure v sur H on note :

$$v^g = \delta_{g^{-1}} * v * \rho_g$$

On dira que G opère de façon bornée (resp. compacte) sur H si pour toute partie compacte A de H (resp. H - {e}) l'adhérence $\overline{A^G}$ de A^G est un compact de H (resp. H - {e}). H étant supposé abélien ou compact, soit $\hat{H}$ l'espace des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de H muni de la topologie usuelle. On vérifie aisément que si G opère de façon bornée sur H l'élément identité, noté Id, de $\hat{H}$ possède une base de voisinages G - invariants et que si G opère de façon compacte sur H tout compact de $\hat{H}$ - {Id} est contenu dans un compact G - invariant de $\hat{H}$ - {Id} .

Pour toute mesure bornée q sur G on note q' l'image de q par l'application $x \longrightarrow x^{-1}$. Soit alors p une probabilité sur G que l'on écrit sous la forme

$p = \int_{G/H} u_{\bar{x}} \, d\bar{p}(x)$ où $u_{\bar{x}}$ est une probabilité portée par la classe $\bar{x}$ mod H et $\bar{p}$ est l'image de p sur G/H. On définit alors une probabilité p_H sur H par $p_H = \int u'_{\bar{x}} * u_{\bar{x}} \, d\,\bar{p}\,(\bar{x})$ et l'on désigne par H (p) [resp $H(p^\infty)$] le plus petit sous groupe fermé portant p_H [resp les p_H^n] . Dans le cas $H(p^\infty) = H$, p sera dite H - strictement apériodique. Si G est abélien et H = G on retrouve la notion classique (2) ; si G est compact et H = G $H(p^\infty) = G$ est la condition de convergence de p^n vers la mesure de Haar de G (3). On dira, comme en (1), que p est étalée si l'une des p^n est non singulière par rapport à la mesure de Haar de G. Enfin, pour tout groupe localement compact X, L_0^1 (X) désignera le sous - espace des éléments de L^1 (X) dont l'intégrale est nulle et le symbole $|\mu|$ désinera la variation de la mesure bornée μ , la variation totale de μ étant notée $||\mu||_1 = |\mu|\,(X)$.

<u>Théorème 1.</u>-

Soit H un sous groupe fermé distingué de G, p une probabilité H - strictement apériodique sur G. Si H est abélien ou compact et si G opère de façon bornée (resp. compacte) sur H on a pour p étalée (resp. quelconque) :

$$\forall\, v \in L_0^1\,(H) \qquad \lim_n \, ||p^n * v||_1 = 0$$

Ce théorème résulte des trois lemmes

<u>Lemme 1</u>.-

Soit γ_n une suite de probabilités sur le groupe abélien H portées par un compact K, v un élément de $L^1 \cap L^2$ (H), $\hat{K}$ le support de $\hat{v}$. Si toutes les $\hat{\gamma}_n$ sont majorées **sur** $\hat{K}$ par une constante s < 1 on a

$$\lim_n \, ||\gamma_1 * \quad * \gamma_n * v||_1 = 0$$

Ce lemme est lui même conséquence de la proposition.

Proposition 1 :

Soit π_n une suite de probabilités sur le groupe localement compact H , v un élément de $L^1 \cap L^2(H)$, A_n une suite croissante de compacts telle que :

$$\overline{\lim_n} \, ||\pi_n * v||_2^{\frac{1}{n}} < 1 \, , \quad \overline{\lim_n} \, |A_n|^{\frac{1}{n}} = 1 \, , \quad \lim_n \pi_n(A_n) = 1$$

On a alors :

$$\lim_n ||\pi_n * v||_1 = 0$$

Notons que, si α et β sont deux mesures bornées sur G , A et B deux compacts de G , on a :

$$|\alpha * \beta|(G) \leq |\alpha * \beta|(AB) + |\alpha|(A)\,|\beta|(G-B) + |\alpha|(G-A)\,|\beta|(G)$$

On prend ici $\alpha = \pi_n$, $A = A_n$, $\beta = \nu\, dx$ et B tel que $\int_{G-B} |\nu| \, dx \leq \varepsilon$ et on a alors :

$$||\pi_n * v||_1 \leq ||(\pi_n * v)_{A\,B}||_1 + \varepsilon + ||v||_1 \left[1 - \pi_n(A_n)\right]$$

Mais l'inégalité de Schwartz donne ici :

$$||(\pi_n * v)|_{A_n B}||_1 \leq |A_n B|^{\frac{1}{2}} \, ||\pi_n * v||_2$$

, le symbole $|A_n B|$ désignant la mesure de Haar de $A_n B$. On sait aussi que $\overline{\lim_n} \, |A_n B|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim_n} \, |A_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, ce qui donne

$$\overline{\lim_n} \, ||(\pi_n * v)_{A_n B}||_1 = 0 \text{ et } \lim_n ||\pi_n * v||_1 \leq \varepsilon$$

Le lemme 1 s'obtient en posant $\gamma_1 * \cdots * \gamma_n = \pi_n$ $K^n = A_n$ et en remarquant que, H étant abélien, $|K^n|$ est majorée par une puissance de n, ce qui donne $\overline{\lim_n} \, |K^n|^{\frac{1}{n}} = 1$. On a, de plus, d'après la formule de Plancherel:

$$||\pi_n * v||_2^2 = \int_{\hat{H}} |\hat{\pi}_n(\xi) \, \hat{v}(\xi)|^2 \, d\varepsilon = \int_{\hat{K}} |\hat{\pi}_n(\xi) \, \hat{v}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$||\pi_n * v||_2 \leq s^n \, ||v||_2 \quad \text{car} \quad \hat{\pi}_n(\xi) = \hat{\gamma}_1(\xi) \cdots \hat{\gamma}_n(\xi)$$

Désignons par $x \longrightarrow \hat{x}$ une section borélienne fixée au dessus de G/H et posons $\mu_{\bar{x}} = \varepsilon_{\hat{x}} * \mu_{\hat{x}}$ où $\mu_{\hat{x}}$ est une probabilité sur H. La restriction normalisée de $\mu_{\hat{x}}$ à un compact K sera notée $\mu_{\hat{x}}^K$.

Lemme 2 . -

Soit H comme dans le théorème et G opérant de façon bornée sur H , λ un élément de $\hat{H}$ tel que $||\hat{p}_H(\xi)|| \leq \sigma < 1$ pour tout ξ dans l'orbite λ^G de λ sous G . Alors, il existe un voisinage V_λ de λ tel que pour tout v de $L^1(H)$ dont le support de $\hat{v}$ est contenu dans V_λ on ait $\lim\limits_n ||p^n * v||_1 = 0$.

1) cas H compact

écrivant $p = \int_{G/H} \delta_{\hat{x}} * \mu_{\hat{x}}\, d\bar{p}\,(\bar{x})$ on a

$$p^n * v = \int_{(G/H)^\infty} \delta_{\hat{x}_n} \quad \hat{x}_1 \quad \mu_{\hat{x}_n}^{x_{n-1}(w)} \quad \mu_{x_1} * v\, d\bar{p}^{\infty}(w)$$

où $w = (\bar{x}_1 \;,\; \bar{x}_n, \quad) \in (G/H)^\infty$ est une trajectoire sur G/H, $d\bar{p}^\infty\,(w)$ la probabilité canonique sur $(G/H)^\infty$ et $X_k\,(w) = \hat{x}_k \quad \hat{x}_1$.

$$||p^n * v||_1 \leq \int_{(G/H)^\infty} ||\mu_{\hat{x}_n}^{x_{n-1}(w)} * \qquad * \mu_{\hat{x}_1} * v\,||_1 \; d\bar{p}^\infty\,(w)$$

$\hat{H}$ étant discret, on prendra $V_\lambda = \{\lambda\}$. L'hypothèse sur p_H s'écrit aussi :

$$\left|\left|\int_{G/H} \mu'^{g}_{\hat{x}} * \mu^{g}_{\hat{x}}\,(\lambda)\, d\,\bar{p}\,(\bar{x})\right|\right| \leq \sigma \quad \forall\, g \in G$$

et en particulier, pour tout vecteur a de l'espace de λ

$$\int_{G/H} ||\mu^{g}_{\hat{x}}\, a\,||^2 \; d\,\bar{p}\,(\bar{x}) \leq \sigma\; ||\,a\,||^2$$

Si l'on pose $E\,(g,a) = \{\bar{x}\;; ||\mu^{g}_{\hat{x}}\, a\,||^2 \geq \frac{1+\sigma}{2}\; ||a||^2\}$

l'inégalité précédente donne

$$\bar{p}\;(E\;(g,a)\;) \leq \frac{2\,\sigma}{1+\sigma} < 1$$

On en déduit que presque tout w possède une sous suite $\bar{x}_{n_k}$ vérifiant

$$||\mu_{\hat{x}_{n_k}}^{x_{n_k-1}(w)} * \qquad * \mu_{\hat{x}_1} * v|| \leq \left(\frac{1+\sigma}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \; ||v||$$

d'où le résultat puisque l'espace de λ est de dimension finie.

2) cas H abélien

Posons $p^K = \int_{G/H} \delta_{\hat{x}} * \mu_{\hat{x}}^K \; \mu_{\hat{x}}(K) \, d\bar{p}(\hat{x})$ où K est un compact de H et notons que $\| p^K \|_1 \leq 1$, $p = p^K + \alpha$, α étant une mesure positive sur G de masse $1 - \|p^K\|_1$. De plus,

$$\| p - \frac{1}{\| p^K \|} p^K \|_1 \leq 2 (1 - \|p^K\|_1).$$

On peut donc supposer, en prenant un compact G - invariant K assez grand, que p s'écrit $p = \int_I \delta_{x_i} * \gamma_i \, d\pi(i)$ où γ_i est une probabilité portée par H vérifiant

$\forall j \in J \quad \gamma_j (K) = 1$ où $J \subset (I)$ est non négligeable

et
$$\|p - \frac{1}{\pi(J)} \int_J \delta_{x_j} * \gamma_j \, d\pi(j) \|_1 \leq \frac{1 - \sigma}{4}$$

On en déduit d'après la construction de γ_j :

$$\|p_H - \frac{1}{\pi(J)} \int_J \gamma'_j * \gamma_j \, d\pi(j) \|_1 \leq \frac{1 - \sigma}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{\pi(J)} \int_J \gamma'_j * \gamma_j (\xi) \, d\pi(j) < \frac{1 + \sigma}{2} \quad \text{sur } \lambda^G.$$

Il y a donc, comme dans le premier cas, pour tout g, un sous - ensemble $J(g) \subset J$ de mesure positive indépendante de g sur lequel $|\hat{\gamma}_j^g (\lambda)|^2 \leq s < 1 \quad \forall j \in J(g)$. Les γ_j^g étant portées par K sont équicontinues et il existe V_λ voisinage de λ tel que : $\forall \eta \in V_\lambda$, $\forall j \in J^g$ $|\gamma_j^g (\eta)|^2 \leq \frac{1+s}{2} < 1$. Soit alors $v \in L^1(H)$ avec $\hat{v}$ portée par V_λ comme dans le premier cas :

$$\|p^n * v\|_1 \leq \int_{I^\infty} \|\gamma_{i_n}^{X_{n-1}(w)} * \quad * \gamma_{i_1} * v\|_1 \, d\pi^\infty(w)$$

Comme presque tout w possède une sous suite i_{n_k} telle que $\gamma_{i_{n_k}}(K) = 1$ et $|\hat{\gamma}_{i_{n_k}}^{X_{n_k-1}(w)}|$ soit majorée par $(\frac{1+s}{2})^{\frac{1}{2}}$ sur $V_\lambda^{n_k}$, Le résultat découle du lemme 1.

<u>Lemme 3.-</u>

Avec les notations du théorème, supposons que G opère de façon bornée (resp. Compacte) sur H et soit $\lambda \in \hat{H} - \{Id\}$.

Si p est étalée (resp. quelconque) et H strictement apériodique, il existe un entier n, une constante $s < 1$ telle que
$\forall \xi \in \lambda^G \qquad ||(p^n)_H(\xi)|| \leq s$
Posons $\hat{H}_n = \{ \xi \in \hat{H} ; ||\hat{p}_H^n(\xi)|| = 1 \}$. Du fait que $(p^n)_H$ est symétrique résulte que $\hat{H}_n = \{ \xi \in \hat{H} ; \xi(h) = 1 \;\; \forall h \in H(p^n)\}$. Que p soit H - strictement apériodique se traduit donc par $\bigcap_n \hat{H}_n = \{Id\}$. D'après la proposition 1 qui suit $\hat{H}_{n+1} \subset \hat{H}_n$ et donc $\overline{\lambda^G} \cap \hat{H}_n$ est une suite décroissante de fermés de $\overline{\lambda^G}$ d'intersection vide dans les deux cas puisque $Id \notin \overline{\lambda^G}$. Dans le deuxième cas, $\overline{\lambda^G}$ est compact et donc par n assez grand $\overline{\lambda^G} \cap \hat{H}_n = \emptyset$; le lemme résulte donc de la continuité de $|| \hat{p}_H^n(\xi) ||$. Dans le premier cas, pour n assez grand $(p^n)_H$ a une partie absolument continue non nulle et $H(p^n)$ est ouvert, ce qui implique $\hat{H}_n$ compact (4), d'où encore pour n assez grand $\overline{\lambda^G} \cap \hat{H}_n = \emptyset$. Par ailleurs, la propriété de Riemann - Lebesgue montre que, en dehors d'un compact de $\hat{H}$ $|| \hat{p}_H^n(\xi) || \leq \sigma < 1$. Le lemme résulte encore de la continuité de $|| \hat{p}_H^n(\xi) ||$.

<u>Démonstration du théorème</u>.-

Posons $P = \{ v \in L^1(H) \;\; \lim_n || p^n * v||_1 = 0 \}$ et observons que P est un idéal à droite fermé de $L^1(H)$. Dans les deux cas du théorème P contient, d'après les lemmes 2, 3 les v tels que le support de $\hat{v}$ soit contenu dans un voisinage V_λ assez petit de $\lambda \in \hat{H} - \{Id\}$. Les propriétés de synthèse spectrale des groupes abéliens (5) ou compacts (4) entraînent alors $P = L_0^1(H)$.

<u>Proposition 2</u>.-

Soient p et q deux probabilités sur G. Alors $H(q * p) \supset H(p)$ et l'on a q- presque partout $x^{-1}H(p)x \subset H(p * q)$

Observons que si r est une probabilité et L un sous groupe fermé de H contenant $H(r)$, il existe une section borélienne σ de G au dessus de G/H telle que r soit portée par $\bigcup_{\bar{x} \in G/H} \sigma(\bar{x}) L$ et réciproquement.

Posant $p = \int_{G/H} \mu_{\bar{x}} \, d\,\bar{p}\,(x)$ $\quad q = \int_G \delta_y \, d\,q\,(y)$

on a $\quad q * p = \int_{G/H \times G} \delta_y * \mu_{\bar{x}} \, d\,\bar{p}\,(\bar{x}) \, d\,q\,(y)$

Prenant $L = H\,(q * p)$ on a donc :

$\delta_y * \mu_{\bar{x}}\ [\sigma(\bar{y}\ \bar{x})\ L] = 1$ $\quad q \times \bar{p}$ presque partout et aussi $q \times \bar{p}$ presque partout $\mu'_{\bar{x}} * \mu_{\bar{x}}\ [L] = 1$ donc $H\,(p) \subset L$

De même $\quad p * q = \int_{G/H \times G} \mu_{\bar{x}} * \delta_y \ d\,\bar{p}\,(\bar{x})\ d\,q\,(y)$

donc $\mu_{\bar{x}} * \delta_y \ (\sigma(\bar{x}\ \bar{y})\ L) = 1$, en prenant $L = H\,(p * q)$, $\bar{p} \times q$ presque partout.

On en déduit $\delta_{y^{-1}} * \mu'_{\bar{x}} * \mu_{\bar{x}} * \delta_y\ (L) = 1$ $\bar{p} \times q$ presque partout, donc q - presque partout $(\delta_{y^{-1}} * p_H * \delta_y)\ (L) = 1$ et le résultat

Le résultat suivant sera utile pour montrer la H - stricte apériodicité de certaines probabilités.

<u>Proposition 3</u>.-

Soit H sous groupe fermé distingué de G, L un sous groupe fermé de H et g un élément de G vérifiant $g\,L\,g^{-1} \subset L$

On a : $g\,L\,g^{-1} = L$ dans les deux cas suivants :

- H est abélien ou compact et G opère de façon compacte sur H
- H est abélien ou compact, L est ouvert et G opère de façon bornée sur H

Dans le premier cas, l'adhérence du groupe des automorphismes de H définis par les éléments de G est un groupe compact pour la topologie naturelle (6). Il en résulte que le semi - groupe fermé d'automorphismes engendré par g est un groupe qui contient donc l'automorphisme associé à g^{-1}. Comme ce semi groupe applique L dans L, on a aussi

$$g^{-1} L g \subset L$$

Dans le deuxième cas, si H est compact le résultat est immédiat : l'automorphisme de H associé à g conserve la mesure de Haar et L est ici non négligeable. L'hypothèse $g L g^{-1} \subset L$ entraîne donc $g L g^{-1} = L$.

Dans le deuxième cas, soit H abélien et soit L à génération compacte. Comme G opère de façon bornée sur H et que L est ouvert, L est contenu dans L_1 sous - groupe ouvert de H à génération compacte et G - invariant. La suite croissante $g^{-n} L g^{n}$ $(n \in N)$ de sous - groupes ouverts de L_1 est donc stationnaire : $g^{-k} L g^{k} = g^{-(k+1)} L g^{k+1}$ pour un certain entier k positif ou nul. Mais, d'autre part, les quotients successifs de cette suite sont tous isomorphes à $g^{-1}Lg/L$: on a donc $g^{-1}L g = L$. Si maintenant L est quelconque, il est réunion de sous - groupes ouverts à génération compacte L_i avec $g L_i g^{-1} \subset L_i$: l'action de G sur H étant bornée, tout compact K d'intérieur non vide de L est contenu dans un compact K_1 de L d'intérieur non vide tel que $g K_1 g^{-1} \subset K_1$.
Le résultat précédent reste donc vrai pour L quelconque.

Corollaire.-

Soit p une probabilité apériodique sur G, H un sous-groupe fermé distingué abélien ou compact de G_o. Le sous-groupe $H(p^\infty)$ est distingué dans les deux cas suivants

- p est étalée et G opère de façon bornée sur H
- p est quelconque et G opère de façon compacte sur H.

La proposition 2 entraîne :

$\forall n \quad H(p^n) \subset H(p^{n+1})$

p - presque partout $x^{-1} H(p^\infty) x \subset H(p^{n+1})$

On en déduit que pour tout x dans le support de p :

$x^{-1} (H(p^\infty) x \subset H(p^\infty)$

La proposition 3 et le fait que p soit apériodique permettent de conclure.

On dira qu'un groupe G possède la propriété de Liouville si pour toute loi p étalée et apériodique les éléments f de $L^\infty(G)$ vérifiant $f * p = f$ sont les constantes.

Le théorème suivant résulte du théorème 1.

Théorème 2.-

Soit H un sous-groupe distingué fermé de G qui est abélien ou compact. Si G/H possède la propriété de Liouville et si G opère de façon bornée sur H, G possède la propriété de Liouville.

Observons que d'après (1) si L possède la propriété de Liouville et si S est un semi-groupe ouvert engendrant L on a $S^{-1} S = L$.

Soit alors S le semi-groupe ouvert de G formé des éléments au voisinage desquels l'une des p^n domine une mesure de Haar. On sait (1) que S engendre G et son image T dans G/H est donc aussi un semi-groupe ouvert engendrant G/H. L'hypothèse faite sur G/H donne $T^{-1} T = G/H$. En remplaçant p par $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} p^n$

on peut supposer que la partie absolument continue de p a une densité strictement positive sur S et ceci implique $S^{-1}S \cap H \subset H(p^{\infty})$. D'après le corollaire de la proposition 3, $H(p^{\infty})$ est distingué ; comme, d'autre part, $T^{-1}T$ est un groupe, on vérifie aisément que $S^{-1}S\,H(p^{\infty})$ est un groupe.

Comme $S^{-1}S\,H(p^{\infty})$ est un sous - groupe ouvert portant p qui est apériodique $S^{-1}S\,H(p^{\infty}) = G$ et on a donc :
$H = S^{-1}S\,H(p^{\infty}) \cap H \subset H(p^{\infty})$, p est donc H - strictement apériodique et, d'après le théorème 1, :
$\forall\, v \in L^1_0(H) \qquad \lim_n \; ||p^n * v||_1 = 0.$
Soit alors $f \in L^{\infty}(G)$ avec $f * p = f$. On a aussi :
$f * p^n * v = f * v \quad \forall\, n$ et à la limite $f * v = 0$.
Ceci signifie f constante sur chaque classe mod H.
Désignant par $\bar{p}$ l'image de p sur G/H et par $\bar{f}$ l'élément de $L^{\infty}(G/H)$ correspondant à f on a $\bar{f} * \bar{p} = \bar{f}$ et l'hypothèse faite sur G/H entraîne $\bar{f} = cte$.

Ce théorème permet de construire, par extensions, de nouveaux groupes possèdant la propriété de Liouville à partir des groupes abéliens, compacts ou vérifiant identiquement une relation $x^n = e$.

En particulier, la propriété de Liouville se conserve par passage à la limite projective.

Si G est réunion d'une suite croissante de sous groupes compacts ouverts distingués, G possède la propriété de Liouville. Certains groupes de matrices sur le corps des nombres p - adiques sont de ce type.

Si G possède une suite croissante finie de sous groupes fermés distingués, $\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n+1} = G$ telle que $G/_{H_i}$ $(0 \leq i \leq n)$ opère de façon bornée sur $H_{i+1}/_{H_i}$ supposé abélien ou compact, G possède la propriété de Liouville. Les groupes de Lie connexes de type R et leurs extensions compactes sont de ce type. [1] . Le théorème 3 est aussi une conséquence du théorème 1, la probabilité p étant quelconque.

Soit G' l'adhérence du groupe des commutateurs de G.

<u>Théorème 3.-</u>

Soit p une probabilité apériodique sur G. Si G' est abélien ou compact et si G opère de façon compacte sur lui, on a :

$\forall\ v \in L^1_0\ (G')\quad \lim_n\ \|p^n * v\|_1 = 0$

En particulier, les seuls éléments f de L^∞ (G) vérifiant $f * p = f$ sont les constantes.

D'après la démonstration du théorème 2, la deuxième assertion est conséquence immédiate de la première. Pour montrer $G'(p^\infty) = G'$, on peut se ramener, puisque $G'(p^\infty)$ est distingué,au cas $G'(p^\infty) = \{e\}$ et il faut alors montrer $G' = \{e\}$. Ceci découle du lemme :

<u>Lemme.-</u>

Si p est apériodique sur G , si $G'(p^2) = \{e\}$, G est abélien.

Posant $p = \int \mu_{\bar{x}}\, d\,\bar{p}\,(\bar{x})$ où $\mu_{\bar{x}}$ est portée par la classe $\bar{x}$ mod G', on a $p^2 = \int \mu_{\bar{x}} * \mu_{\bar{y}}\, d\,\bar{p}\,(\bar{x})\, d\,\bar{p}\,(\bar{y})$. D'après l'hypothèse $G'(p^2) = \{e\}$, p^2 est portée par une section borélienne de G au dessus de $G/_{G'}$, et, en désignant par σ cette section on a donc :

$\mu_{\bar{x}} * \mu_{\bar{y}} = \sigma\,(\bar{x}\,\bar{y})\qquad \bar{p} \times \bar{p}$ presque partout.

Ceci entraîne, puisque $\bar{x}\,\bar{y} = \bar{y}\,\bar{x}$, $x\,y = y\,x$ $p \times p$ presque partout. Or, x étant fixé, l'ensemble des y qui commutent avec x est un sous groupe fermé de G. Pour presque tout x, ce sous groupe porte p, donc est égal à G. Mais alors p est portée par le centre de G qui est donc égal à G.

Le théorème 3 s'applique en particulier lorsque G est nilpotent de classe 2 ou bien lorsque G est extension d'un groupe abélien par un groupe abélien compact.

Le théorème 3 est une généralisation des théorèmes limites sur les groupes compacts [3] , et aussi d'un résultat de Stam [8] sur le groupe des réels, résultat qui a été étendu aux groupes abéliens localement compacts par G. Letac et M. Métivier [9] .

Lorsque la condition de H - stricte apériodicité n'est pas vérifiée, on peut cependant énoncer un théorème analogue au théorème 1, si l'on suppose que p admet " un moment d'ordre non nul ".

Supposons que G soit à génération compacte et soit K un compact tel que $G = \bigcup_{n \geq 0} K^n$. Disons que p admet un moment d'ordre $\alpha > 0$ si la série de terme général $n^\alpha\ p\ (K^{n+1} - K^n)$ est convergente. On vérifie aisément que cette condition est indépendante du compact engendrant G. On en déduit que $\lim_n n^\alpha\ (1 - p\ (K^n)) = 0$

H étant un sous groupe fermé distingué on dira que p est H - fortement apériodique si, pour tout sous groupe D dont une classe bilatère porte p on a $\overline{D \cap H} = H$. Cette notion généralise aussi la notion connue dans le cas G abélien ou compact et H = G. De plus, si p est H - strictement apériodique, elle est H fortement apériodique : si p est portée par la classe bilatère a D, p^n est portée par $a^n D$ et $(p^n)_H$ est portée par $D \cap H$ ce qui implique $\overline{D \cap H} = H$.

Dans le théorème 1, G est supposé à croissance polynômiale, c'est à dire que $|K^n|$ est majorée par une puissance de n.

Enfin, on note $L^1_0\ (G,H)$ le noyau de l'homomorphisme canonique de $L^1\ (G)$ sur $L^1\ (G/H)$.

<u>Théorème 1'</u>.-

Soit H un sous groupe fermé distingué de G, p une probabilité H - fortement apériodique sur G. Si G est à croissance polynômiale, opére de façon compacte sur H supposé abélien ou compact et si p admet un moment d'ordre non nul on a :

$$\forall\ f \in L^1_0\ (G,H) \qquad \lim_n\ ||p^n * f||_1 = 0$$

Le théorème 1' résulte de trois propositions :

Proposition 4.-

Soit p H - fortement apériodique, ρ une représentation unitaire de G telle que $\mathrm{Res}_H\ \rho$ soit continue en norme et ne contienne pas faiblement l'identité. Alors la norme spectrale de $\rho\ (p)$ est inférieure à 1. Cette proposition résultera du lemme :

Lemme.-

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de ρ, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x_n \in \mathcal{H}$,

D l'ensemble des ξ de G tels que $\lim_n \|\xi x_n - x_n\| = 0$

C l'ensemble des g de G tels que $\lim_n \|g x_n - \alpha x_n\| = 0$

Alors, si $C \neq \emptyset$, C est une classe bilatère du sous groupe D.

Observons que si g et g' sont deux éléments de G, λ et λ' deux complexes vérifiant

$$\lim_n \|g\, x_n - \lambda\, x_n\| = \lim_n \|g'\, x_n - \lambda'\, x_n\| = 0$$

on a :

$$\|g\, g'\, x_n - \lambda\, \lambda'\, x_n\| \leq \|g(g' x_n - \lambda' x_n)\| + |\lambda'|\,\|(g x_n - \lambda x_n)\|$$

donc $\lim_n \|g\, g'\, x_n - \lambda\, \lambda'\, x_n\| = 0$

On a de même $\|g^{-1}\, x_n - \lambda^{-1}\, x_n\| = \|\lambda^{-1}\, g^{-1}(g\, x_n - \lambda x_n)\|$

et $\lim_n \|g^{-1}\, x_n - \lambda^{-1}\, x_n\| = 0$

D'où le lemme.

Supposons la norme spectrale de $\rho\ (p) = P$ égale à 1 et soit $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = 1$ tel que $P - \alpha$ ne soit pas inversible. Montrons l'existence d'une suite de vecteurs unitaires x_n telle que

$\lim_n \|P\, x_n - \alpha\, x_n\| = 0$: s'il n'existe pas de telle suite $\mathrm{Im}\ (P - \alpha)$ est fermée et distincte de $\mathcal{H}$, [10] , ce qui entraîne $\mathrm{Ker}\ (P^* - \bar{\alpha}) \neq \{0\}$ et l'existence de $x \neq 0$ tel que $P\ x = \bar{\alpha}\ x$, $(g^{-1}\ x = \bar{\alpha}\ x$ p presque partout, soit $g\ x = \alpha\ x$ et $P\ x = \alpha\ x$, ce qui contredit l'hypothèse. La relation $\lim_n \|P\, x_n - \alpha\, x_n\| = 0$ entraîne puisque $\|x_n\| = 1$,

$\lim_n \langle P x_n , x_n \rangle = \alpha$ soit $\lim_n \int \langle g x_n , x_n \rangle \, dp(g) = \alpha$.
Puisque $|\alpha| = 1$ et $|\langle g x_n , x_n \rangle| \leq 1$ on en déduit l'existence d'une sous suite x_{n_k} telle que $\lim_k \langle g x_{n_k} , x_{n_k} \rangle = \alpha$, $\lim_k \| g x_{n_k} - \alpha x_{n_k} \| = 0$ p - presque partout. D'après le lemme, p est portée par une classe bilatère C du sous groupe D des ξ de G tels que $\lim_k \| \xi x_{n_k} - x_{h_k} \| = 0$. Puisque $\mathrm{Res}_H \rho$ est continue en norme $D \cap H$ est fermé et l'hypothèse sur p entraîne $D \supset H$. Ceci contredit l'hypothèse que $\mathrm{Res}_H \rho$ ne contient pas faiblement l'identité. (11)

Soit f un élément de $L^2(G)$, $\mathcal{F}$ le sous espace engendré par les translatées à gauche de f. On appellera H - spectre de f l'ensemble des représentations irréductibles de H faiblement contenues dans la représentation de H dans $\mathcal{F}$ par translations à gauche. On sait que G opère par le dual $\hat{H}$ de H, l'action de G étant définie par $(g\lambda)(h) = \lambda(g h g^{-1})$ où $\lambda \in \hat{H}$, $h \in H$; on notera $\mathcal{P}(\hat{H})$ l'ensemble des orbites fermées sous G des compacts de $\hat{H} - \{Id\}$, H étant supposé compact ou abélien.

Proposition 5.-

Supposons H compact ou abélien. Alors l'ensemble des f de $(L^1 \cap L^2)(G)$ dont le H - spectre est contenu dans un élément de $\mathcal{P}(\hat{H})$ est dense dans $L^1_0(G, H)$

Ce résultat, classique lorsque $G = H$, sera obtenu en s'appuyant sur ce cas particulier.

Soit $\varphi \in L^1 \cap L^2(H)$ dont le spectre est un compact $\hat{K}$ de $\hat{H} - \{Id\}$, η un élément quelconque de $(L^1 \cap L^2)(G)$. Alors le sous espace de $L^2(G)$ engendré par les $\eta * \varphi$ s'identifie à l'espace de la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^G [L^2(\hat{K})]$ par la représentation de H dans $L^2(\hat{K})$. Le spectre de $\mathrm{Res}_H [\mathrm{Ind}_H^G L^2(\hat{K})]$ est l'orbite fermée de $\hat{K}$ sous G [11] et le H - spectre de $\eta * \varphi$ est contenu dans cet élément de $\mathcal{P}(\hat{H})$.

Les fonctions $\eta * \varphi$ appartiennent de plus à $L^1 \cap L^2$ (G) et si $g \in L^\infty$ (G) leur est orthogonale, on a pour tous les η et φ du type précédent $< \eta * \varphi, g > = < \eta, g * \hat{\varphi} > = 0$. Comme l'ensemble des η est dense dans L^1 (G), $g * \hat{\varphi} = 0$ et comme l'ensemble des φ est dense dans L^1_0 (H) [5] , g = cte sur toute classe de H, d'où la proposition.

Proposition 6.-

Soit $f \in L^1 \cap L^2 \cap (G)$ telle que $\overline{\lim_n} \| p^n * f \|_2^{\frac{1}{n}} < 1$ Alors, si G est à croissance polynômiale et si p admet un moment d'ordre non nul, on a $\lim_n \| p^n * f \|_1 = 0$.

Pour obtenir ce résultat, il suffit, d'après la proposition 1 de trouver une suite A_n de compacts telle que :
$\overline{\lim_n} | A_n |^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \lim_n p^n (A_n) = 1$

On sait par hypothèse que : $| K^n | \leq C n^d$ et $\lim_n n^\alpha (1 - p(K^n) | = 0$. En prenant $\alpha = \frac{1}{k}$ (k entier) la deuxième condition donne : $\lim_n n (1 - p(K^{n^k})) = 0$. L'inégalité utilisée dans la proposition donne aussi $(1 - p^n(A^n)) \leq n (1 - p(A))$ donc $1 - p^n (K^{n^{k+1}}) \leq n (1 - p(K^{n^k}))$. En posant $A_n = K^{n^{k+1}}$ on aura bien $\lim_n (1 - p^n(A_n)) = 0$ et aussi $\overline{\lim_n} (A_n)^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim_n} (C n^{(k+1)d})^{\frac{1}{n}} = 1$.

Il suffit de vérifier la propriété du théorème pour f appartenant à un système total de L^1_0 (G,H).

La proposition 5 fournit un tel système E. Puisque G opère de façon compacte sur H, les éléments de $\mathcal{S}(\hat{H})$ sont des compacts de $\hat{H} - \{ Id \}$. On en déduit que, pour tout f de E, la représentation de H dans $\mathcal{F}$ par translations à gauche satisfait aux hypothèses de la proposition 1. Cette proposition dit que :

$$\forall f \in E \quad \overline{\lim_n} \| p^n * f \|_2^{\frac{1}{n}} \leq \lim_n \| p^n \|^{\frac{1}{n}} \| f \|_2^{\frac{1}{n}} < 1$$

Comme G est à croissance polynômiale, et que p admet un moment d'ordre non nul, on a, d'après la proposition 6, $\lim_n \| p^n * f \|_1 = 0$.

Le théorème suivant est une application du théorème 1'. Soit C l'adhérence du groupe dérivé du groupe résoluble G , C^k la suite centrale descendante de C supposé nilpotent de classe r + 1. Si G opère de façon compacte sur les groupes, C^k/C^{k+1} $(k \leq r)$, G est à croissance polynômiale [12] .

Théorème 2'.-

Soit G un groupe localement compact nilpotent ou résoluble tel que son groupe dérivé C soit nilpotent et que G opère de façon compacte sur les quotients de la suite centrale descendante de C, p une probabilité sur G possédant un moment d'ordre non nul. On a alors :

$$\forall f \in L^1_0 (C) \qquad \lim_n ||p^n * f||_1 = 0$$

On se bornera dans la démonstration au deuxième cas, et le corollaire résultera des deux lemmes.

Lemme 1.-

Soit p apériodique et G, C^k comme dans le théorème Alors p est c^r fortement apériodique. Soit D un sous groupe de G dont une classe porte p, Δ le sous groupe engendré par cette classe et D : D est distingué dans Δ et $\Delta/_D$ est cyclique. Soit Γ le groupe dérivé de Δ et Γ^k $(k \leq r)$ la suite centrale descendante de Γ . Puisque p est apériodique, $\bar{\Delta} = G$ et comme $D \supset \Gamma$, $\bar{\Gamma} = C$ d'où $\bar{\Gamma^k} = C^k$, $\overline{D \cap C^k} = C^k$.

Lemme 2.-

Soit T une contraction d'un espace de Banach E Laissant invariant un sous espace F, T_F et $T_{E/_F}$ les parties de T dans F , $E/_F$. Si, en convergence simple $\lim_n T^n_F = 0$, $\lim T^n_{E/_F} = 0$ on a $\lim_n T^n = 0$.

Soit x un élément de E, $\bar{x}$ sa classe dans $E/_F$. $\varepsilon > 0$ étant donné, soit n tel que $||T^n_{E/_F} \bar{x}|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, y dans F tel que $||y - T^n x|| < \frac{\varepsilon}{2}$. On sait que pour m assez grand $||T^m y|| < \frac{\varepsilon}{2}$ et ceci entraîne puisque T est une contraction :

$$|| T^{m+n} x || \leq ||T^m y|| + ||T^m(y - T^n x)|| \leq \varepsilon$$

Montrons le théorème par récurrence descendante : $L_0^1 (G, C^{k-1}) / L_0^1(G, C^k)$ s'identifie à $L_0^1 (G/C^k ; C^{k-1}/C^k)$ et l'opérateur défini par p sur cet espace à la convolution par $\bar{p}$ image de p sur G/C^k . D'après le premier lemme, $\bar{p}$ est C^{k-1}/C^k - fortement apériodique. Le théorème 1' entraîne alors :

$$\forall \bar{f} \in L_0^1 (G/C^k , C^{k-1}/C^k) \quad \lim_n ||\bar{p}^n * \bar{f}||_1 = 0$$

Le théorème résulte donc du deuxième lemme et de l'hypothèse de récurrence.

Ce théorème s'applique à une classe de groupes résolubles de type R dont le groupe des déplacements du plan euclidien est un exemple. On conjecture que la condition d'existence d'un moment n'est pas essentielle et que le théorème 1' est valable sans restriction pour tous les groupes nilpotents localement compacts. La démonstration qui en a été donnée en (13) est incomplète.

Y. GUIVARC'H
E.R.A. n° 250 du C.N.R.S.
Université de RENNES
B.P. 25 A
35031 RENNES CEDEX

[1] R. AZENCOTT
"Espaces de Poisson des groupes localement compacts "
Lecture Notes. 1970

[2] F. SPITZER
" Principles of random walks "
Van Nostrand. 1964

[3] U. GRENANDER
" Probabilities on algebraic structures "
John Wiley. New York. 1963

[4] A. WEIL
" L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications "
Hermann. Paris. 1938.

[5] A. GUICHARDET
" Analyse harmonique commutative "
Dunod. Paris. 1968.

[6] S. GROSSER-M. MOSKOWITZ
Journal für Mathematik. Band 246. 1970. PP. 1 - 40.

[7] C. FREMOND - M. SUEUR-PONTIER
Ann. Inst. H. Poincaré. Vol. 7; n° 4. 1971. PP. 293-298

[8] A.J. STAM
Compositi Mathematica. 1966. Vol. 17. PP. 268-280

[9] Communication orale. U.E.R. Mathématiques et Informatique.
Rennes. 1969.

[10] P.R. HALMOS
" An introduction to Hilbert spaces "
Chelsea. New York. 1954.

[11] J.M. FELL
" Weak containment and induced representations of groups "
Canad. J. Math. 14. n° 2. 1962. PP. 237-268

[12] Y. GUIVARC'H
" Groupes localement compacts à croissance polynômiale "
A paraître

[13] Y. GUIVARC'H
" Groupes nilpotents et probabilité "
C.R.A.S. t. 273. 22 novembre 1971. PP. 997-998