

# *Astérisque*

ANDRÉ GALLIGO

**Sur le théorème de préparation de Weierstrass  
pour un idéal de  $kx_1, \dots, x_n$**

*Astérisque*, tome 7-8 (1973), p. 165-169

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1973\\_\\_7-8\\_\\_165\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__165_0)

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# WEIERSTRASS POUR UN IDÉAL

## SUR LE THEOREME DE PREPARATION DE WEIERSTRASS POUR UN IDEAL DE $k\{x_1, \dots, x_n\}$

André GALLIGO

H. Hironaka et H. Grauert dans [1] et [2] ont énoncé chacun un théorème de division par un idéal de  $k\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Le but de cet exposé est de synthétiser ces deux résultats dont des démonstrations ont aussi été données dans [3] et [4].

$k$  désignera les corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $x$  l'ensemble des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $k\{x\}$ .

### § 1. Théorème de préparation de Weierstrass classique

Théorème 0 : Soit  $f \in k\{x\}$  une série telle que  $f(0, \dots, 0, x_n) \neq 0$ , notons alors  $a x_n^m$  le terme de plus bas degré de cette série en  $x_n$ , on peut effectuer la division d'une série quelconque  $g \in k\{x\}$  par  $f$ , plus précisément il existe un couple unique  $(q, r)$  tel que  $q \in k\{x\}$

$$r \in k\{x_1, \dots, x_{n-1}\} [x_n] \text{ avec } \deg(r) < m \text{ et } g = qf + r.$$

#### Idee de la démonstration

On munit les ensembles  $k(\rho)$ ,  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$  des séries convergentes dans le polydisque de polyrayon  $\rho$  de structures d'espaces de Banach. Puis on perturbe l'isomorphisme "division par  $a x_n^m$ " :

$$\begin{array}{ccc} k(\rho) \times (k(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}))^m & \longrightarrow & k(\rho) \\ (q, r) & \xrightarrow{\sim} & a x_n^m q + r \end{array}$$

en l'homomorphisme  $(q, r) \longmapsto a x_n^m q + r + (f - a x_n^m) q = g$  qui reste un isomorphisme si on a pris la précaution de choisir le polydisque de polyrayon  $\rho$  assez "effilé" en  $\rho_n$  pour que  $\|f - a x_n^m\|$  soit suffisamment petit.

#### Remarque 0 .

Après presque tout changement linéaire des coordonnées, le  $m$  du théorème est égal à l'ordre de  $f$  :  $v(f) = \sup \{i/f \in \mathfrak{m}^i\}$ .

§ 2 . Méthode d'Hironaka

Pour généraliser le théorème 0 il nous faut d'abord généraliser le m du théorème 0 .

Définition 1.

A toute série  $f = \sum f_{\mu} x^{\mu}$  de  $k\{x\}$  on associe son diagramme de Newton  $N_f = \{\mu \in \mathbb{N}^n / f_{\mu} \neq 0\} \subset \mathbb{N}^n \subset \mathbb{R}^n$  . Pour toute forme linéaire  $\Delta$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\Delta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  avec  $\alpha_i > 0$   $i = 1, \dots, n-1$  et  $\alpha_n \geq 0$  , on note  $v_{\Delta}(f) = \min \{\Delta(\mu) / \mu \in N_f\}$  , on appelle exposant privilégié dans la direction  $\Delta$  de  $f$  et on note  $\exp_{\Delta}(f)$  le premier élément, pour l'ordre lexicographique de  $\{\mu \in N_f / \Delta(\mu) = v_{\Delta}(f)\}$  .

On a alors :  $\exp_{\Delta}(f.g) = \exp_{\Delta}(f) + \exp_{\Delta}(g)$   
 $\exp_{\Delta}(f+g) \geq \min(\exp_{\Delta}(f) , \exp_{\Delta}(g))$  .

Définition 2.

A tout idéal  $I$  de  $k\{x\}$  on associe le sous-ensemble  $E_{\Delta}(I) = \{\exp_{\Delta}(f)/f \in I\}$ . Cet ensemble vérifie :  $\mu \in E_{\Delta}(I) \implies \mu + \mathbb{N}^n \subset E_{\Delta}(I)$  et on montre facilement qu'il existe un ensemble fini minimal que l'on nomme la frontière  $F_{\Delta}(I)$  de  $E_{\Delta}(I)$  ,  $F_{\Delta}(I) = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$  tel que  $E_{\Delta}(I) = \bigcup_{i=1}^r (\mu_i + \mathbb{N}^n)$  .  
 On considère alors la partition suivante de  $\mathbb{N}^n$  :

$$D_1 = \mu_1 + \mathbb{N}^n, \dots, D_i = (\mu_i + \mathbb{N}^n) - (D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}), \dots, D_{r+1} = \mathbb{N}^n - E_{\Delta}(I).$$

Théorème 1.

Soient  $\Delta$  une forme linéaire positive de  $\mathbb{R}^n$  ,  $I$  un idéal de  $k\{x\}$  ,  $F_{\Delta}(I) = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$  la frontière de  $E_{\Delta}(I)$  . Toute famille  $(f_1, \dots, f_r)$  d'éléments de  $I$  telle que  $\exp_{\Delta}(f_i) = \mu_i$  , est un système de générateurs de l'idéal  $I$  . De plus, pour toute série  $g \in k\{x\}$  il existe des séries de  $k\{x\}$   $q_1, \dots, q_r, q_{r+1}$  uniques qui s'écrivent .

$$q_i = \sum_{\mu + \mu_i \in D_i} q_{i,\mu} x^{\mu} \quad i = 1, \dots, r$$

et

$$q_{r+1} = \sum_{\mu \in D_{r+1}} q_{r+1,\mu} x^{\mu} \text{ telles que } g = \sum_{i=1}^r q_i f_i + q_{r+1}.$$

La démonstration, voir [1] et [3] , généralise de façon naturelle la démonstration du théorème 0 . On dit que  $q_{r+1}$  est le reste de la division de  $g$  par  $I$ .

*WEIERSTRASS POUR UN IDÉAL*

Remarques.

1. En divisant  $x^{\mu_1}$  par  $I$  on obtient l'unique série  $h_1$  de  $k\{x\}$  telle que  $h_1$  s'écrit  $h_1 = \sum_{\mu \in \mathbb{D}_{r+1}} h_{1,\mu} x^\mu$  et  $x^{\mu_1} + h_1 \in I$  .  
On en déduit un système de générateur "plus beau que les autres" de l'idéal  $I$  .
2. Si  $\Delta$  est la forme linéaire homogène  $i_1 + \dots + i_n$  de  $\mathbb{R}^n$  on omet de la noter en indice et on a  $E(I + \mathcal{M}^\Delta) = E(I) \cup E(\mathcal{M}^\Delta)$  pour tout  $\Delta \in \mathbb{N}$  .  
Cette égalité n'est pas vraie pour les autres formes linéaires.
3. Si  $\mathbb{D}_{r+1} = \mathbb{N}^n - E_\Delta(I)$  est fini, les monômes  $x^\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{N}^n - E_\Delta(I)$  forment une base de l'espace vectoriel  $k\{x\} / I$  .
4. On déduit des remarques 2 et 3 que la connaissance de  $E(I)$  implique celle de la fonction d'Hilbert Samuel de  $k\{x\} / I$  :  
$$HS(\Delta) = \dim_k k\{x\} / (I + \mathcal{M}^{\Delta+1}) = \text{card } (\mathbb{N}^n - (E(I) \cup E(\mathcal{M}^{\Delta+1})))$$
 .
5. Notons  $\text{in}(I)$  l'idéal initial de  $I = \{\text{in}(f) / f \in I\}$  où  $\text{in}(f)$  désigne la composante homogène de plus bas degré de la série  $f$  . On a trivialement  $E(I) = E(\text{in}(I))$  .

§ 3. Ce que nous apprend de plus la méthode de Grauert.

On étudie le comportement de  $E(I)$  par changement linéaire des coordonnées.  
Pour cela pour tout  $M \in GL(n, k)$  on note  $f^M$  la série telle que  $f^M(x) = f(Mx)$ ,  
 $I^M = \{f^M / f \in I\}$  et  $E(I^M) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$  . On a :

Théorème 2.

Pour tout idéal  $I$  de  $k\{x\}$  il existe un ouvert de Zariski non vide  $U$  de  $GL(n, k)$  tel que pour  $M \in U$ ,  $E(I^M)$  soit constante, notons  $\mathcal{Z}(I)$  sa valeur. De plus  $\mathcal{Z}(I)$  a une configuration particulière que l'on précise :  
si  $\mathcal{F}(I) = (\mu_1, \dots, \mu_r)$  désigne la frontière de  $\mathcal{Z}(I)$  et  $D_i = (\mu_i + \mathbb{N}^n) - (D_1 \cup \dots \cup D_{i-1})$  la partition définie plus haut, alors  $D_i = \mu_i + (\mathbb{N}^{d(i)} \times 0)$ , où  $d(i)$  est défini en écrivant  $\mu_i = (0, \dots, 0, \mu_i^{d(i)}, \dots, \mu_i^n)$  avec  $\mu_i^{d(i)} \neq 0$  . Et  $\mu_1 = (0, \dots, 0, v(I))$ , donc  $d(1) = n$  .

Idée de la démonstration. On obtient la configuration de  $\mathcal{Z}(I)$  en définissant par récurrence des multiexposants  $\mu_i \in \mathbb{N}^n$ , des séries  $f_i \in I$ , des ouverts de Zariski  $U_i \subset GL(n, k)$  tels que

$$\mu_i = \inf \{ \{ \exp(f^M) / f \in I, M \in U_{i-1} \subset GL(n,k) \} - \bigcup_{j=1}^{i-1} (\mu_j + \mathbb{N}^{d(j)} \times 0) \}$$

et  $\exp(f_i^M) = \mu_i$  pour tout  $M \in U_i$ . Puis en considérant des changements de coordonnées particulières on montre que nécessairement pour tout  $k = d(i) + 1, \dots, n$  le multiexposant  $(0, \dots, 0, \mu_i^{d(i)+1}, \mu_i^{d(i)+1}, \dots, \mu_i^k + 1, \dots, \mu_i^n) \in \bigcup_{j=1}^{i-1} \mu_j + \mathbb{N}^{d(j)} \times 0$ , ce qui entraîne que les  $\mu_i$  forment la frontière  $\mathcal{F}(I)$  de  $\mathcal{E}(I)$ . Voir [5].

Corollaire .

En appliquant le théorème 1 après changement générique linéaire des coordonnées on obtient un "joli" théorème de division ; la condition sur les quotients devient:  $q_i$  ne dépend que des  $d(i)$  premières coordonnées !! .

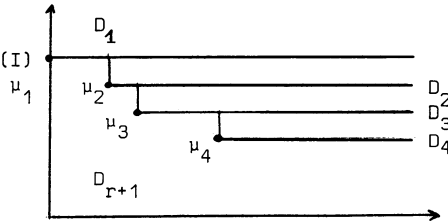
Remarque 6.

Dans le cas  $n = 2$   $\mathcal{E}(I)$  est un "escalier avec des marches de hauteur 1", c'est-à-dire que :

$$\mu_1 = (0, v(I)), \mu_i = (\alpha_i, v(I) - i + 1) \quad v(I)$$

pour  $i = 2, \dots, r$

et que  $\alpha_i$  est strictement croissant avec  $i$ .



Remarque 7.

Pour tout  $n$  on pourrait décrire explicitement, comme dans la remarque 6, la configuration de  $\mathcal{E}(I)$  et retrouver la description que donne Grauert dans [2] et [4]. On peut retenir que  $\mathcal{E}(I)$  donne "à vue d'oeil" deux entiers  $d$  et  $\delta$  dont nous donnons la signification au § 4 :

$$d = \sup \{ i / \mathbb{N}^i \times 0 \cap \mathcal{E}(I) = \emptyset \} \text{ et } \delta = \sup \{ i / \exists \mathcal{E} \text{ tq } \mathcal{E}(I) = \mathbb{N}^i \times \mathcal{E} \}.$$

§ 4. Quelques remarques sur l'invariant  $\mathcal{E}(I)$  associé à un idéal  $I$  de  $k\{x\}$ .

1. Nous avons vu au §2 que  $\mathcal{E}(I)$  détermine la fonction de Hilbert Samuel de  $k\{x\} / I$  :  $HS(\ell) = \dim_k k\{x\} / (I + \mathcal{N}^{\ell+1}) = \text{card} \{ \mu \in \mathbb{N}^n / |\mu| \leq \ell \} - \mathcal{E}(I)$ .  
On voit aisément que pour  $\ell$  assez grand  $HS(\ell)$  est un polynôme de degré  $d$ , ce qui montre que  $d$  est la dimension de  $k\{x\} / I$ . La description explicite de  $\mathcal{E}(I)$  donnerait également la multiplicité de  $k\{x\} / I$ .

2. Si  $n = 2$  la connaissance de la fonction d'Hilbert Samuel détermine  $\mathcal{C}(I)$ . En effet la croissance de  $HS(\ell)$  détermine le nombre de points de  $\mathcal{C}(I)$  contenus dans les hyperplans  $x_1 + \dots + x_n = \ell$  et sont les premiers pour l'ordre lexicographique. Cela n'est plus vrai pour  $n > 2$  par exemple les idéaux  $I = (z^2, zy, zx, y^3) + \mathfrak{m}^4$  et  $I_2 = (z^2, zy, y^2) + \mathfrak{m}^4$  ont des  $\mathcal{C}(I)$  et  $\mathcal{C}(I_2)$  différents bien qu'ils aient même fonction d'Hilbert Samuel.
3. La suite  $(x_1, \dots, x_\delta)$  des classes des  $\delta$  premières coordonnées dans  $k\{x\} / I$  est une suite régulière, donc  $\delta \leq \text{prof}(k\{x\} / I)$ . L'égalité en général est fautive par exemple pour l'idéal  $I = (z^2, zy, zx \text{ et } y^3, y^4)$ ,  $\delta = 0$ ,  $d = 1$  et la classe de  $x$  est non diviseur de zéro dans  $k\{x\} / I$  donc  $\text{prof}(k\{x\} / I) = d = 1$ .
4. Si  $X$  est un espace analytique dans  $\mathbb{C}^N$  on associe à tout point  $x$  de  $X$  un sous-ensemble  $\mathcal{C}(X, x)$  de  $\mathbb{N}^n$ . Si  $\mathcal{O}_{X, x} = \mathbb{C}\{x\} / \mathfrak{I}$  on pose  $\mathcal{C}(X, x) = \mathcal{C}(\mathfrak{I}_x)$  qui est indépendant de la présentation de  $\mathcal{O}_{X, x}$ . On obtient ainsi une partition de  $X$  en sous-ensembles de points ayant même  $\mathcal{C}(X, x)$ . Comme  $\mathcal{C}(\mathfrak{I}_x) = \mathcal{C}(\text{in } \mathfrak{I}_x)$ ,  $\mathcal{C}(X, x)$  ne dépend que du cône tangent en  $x$  à l'espace  $X$ . De plus, cette partition est strictement plus fine que la partition d'Hilbert Samuel (Exemple : si  $X$  est défini dans  $\mathbb{C}^n$  par  $(z^2, zy, zx + ty^2, y^3)$  la "strate" de Samuel de 0 est l'axe des  $t$  alors que la "strate" par les  $\mathcal{C}(X, x)$  ne contient que 0.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] Hironaka, Lejeune, Teissier : Résolution des singularités des espaces analytiques complexes.
- [2] H. Grauert : "Über die deformation isolierter singularitäten analytischer Mengen". Invent. Math. Vol 15, fasc 3. 1972.
- [3] J. Briançon : Weierstrass préparé à la Hironaka. "Singularités à Cargèse".
- [4] A. Galligo et Ch. Houzel : Déformations semi-universelles de germes d'espaces analytiques (d'après Verdier et Grauert). "Singularités à Cargèse".
- [5] A. Galligo : Thèse de 3ème cycle, Université de Nice.