

Astérisque

JEAN-PAUL SPEDER

Éclatements jacobiens et conditions de Whitney

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 47-66

http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__47_0

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ECLATEMENTS JACOBIENS ET CONDITIONS

DE WHITNEY

Jean-Paul SPEDER

INTRODUCTION : Ce papier fait suite à l'article "Un critère d'éclatement pour les conditions de Whitney" ([1]) dont nous rappelons les principaux résultats.

Nous étudions ici la situation "relative" suivante :

Soient X un espace \mathbb{C} -analytique réduit de dimension pure et Y un sous-espace lisse fermé de X de dimension pure strictement inférieure à la dimension de X . Nous supposons qu'il existe une "bonne" rétraction $\rho : X \rightarrow Y$ et nous notons $X_{\text{sing},\rho}$ le lieu singulier relatif (à la rétraction ρ), $X_{\text{lisse},\rho} = X - X_{\text{sing},\rho}$.

Nous donnons un critère qui permet de vérifier les conditions de Whitney pour le couple $(X_{\text{lisse},\rho}, Y)$ le long de Y ([6] page 540) et qui est stable par changement de base (sur Y).

Plus précisément, soient $\omega_\rho : \hat{X}_\rho \rightarrow X$ l'éclatement de X le long du produit de l'idéal I de Y par l'idéal jacobien relatif (à la rétraction ρ) J_ρ , \hat{H}_ρ et \hat{Y}_ρ les espaces réduits de support respectif $\omega_\rho^{-1}(X_{\text{sing},\rho})$ et $\omega_\rho^{-1}(Y)$. Nous montrons, d'après une idée d'H. Hironaka ([2] page 9, Définition 2), le :

THEOREME : Si en tout point de \hat{Y}_ρ , la fibre correspondante du morphisme $\rho \circ \omega_\rho : \hat{H}_\rho \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{H}_\rho - \dim Y$, le couple $(X_{\text{lisse},\rho}, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y .

Les démonstrations s'inspirent souvent de celles de ([1]), nous nous contentons alors de les donner brièvement en renvoyant le lecteur à celles-là.

SPEDER

Ayant identifié \mathbb{C}^M au produit cartésien $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p$ (où $M = s+p$, $s > 1$, $p \geq 0$) à l'aide du système canonique de coordonnées (z_1, \dots, z_M) , considérons un sous-ensemble \mathbb{C} -analytique réduit X d'un ouvert $D \times Y$ de \mathbb{C}^M de codimension r en tout point ($s > r > 0$) et défini par des fonctions holomorphes f_1, \dots, f_q (i.e. f_1, \dots, f_q engendrent l'idéal des fonctions qui s'annulent sur X).

Nous notons $\rho: X \rightarrow Y$ la rétraction de X sur Y induite par la projection canonique $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ et nous supposons que :

- * ρ est un morphisme plat de X sur Y
- * pour tout point $S \in Y$, la fibre $X_S = \rho^{-1}(\{S\})$ est réduite
- * Y est inclus dans le lieu singulier relatif (à la rétraction ρ) : $X_{\text{sing}, \rho}$.

Dans ces conditions, si I est l'idéal de Y dans X et J l'idéal jacobien de X , I est l'idéal engendré par z_1, \dots, z_s et J est l'idéal engendré par les déterminants :

$$D(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{i_1}, \dots, z_{i_r}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial z_{i_1}} & \dots & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial z_{i_r}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{j_r}}{\partial z_{i_1}} & \dots & \frac{\partial f_{j_r}}{\partial z_{i_r}} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{où } j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, q\} \\ i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, M\} \end{array}$$

De même, l'idéal jacobien relatif (à la rétraction ρ) J_ρ (qui définit $X_{\text{sing}, \rho}$) est engendré par les déterminants :

$$D(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{i_1}, \dots, z_{i_r}) \quad \text{où } j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, q\} \text{ et } i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, s\}$$

Notons $\omega : \hat{X} \longrightarrow X$ (resp. $\tilde{\omega} : \tilde{X} \longrightarrow X$) l'éclatement (resp. l'éclatement normalisé) de X le long de IJ , \hat{Y} (resp. \tilde{Y}) l'espace réduit de support $\omega^{-1}(Y)$ (resp. $\tilde{\omega}^{-1}(Y)$), $\omega_\rho : \hat{X}_\rho \longrightarrow X$ (resp. $\tilde{\omega}_\rho : \tilde{X}_\rho \longrightarrow X$) l'éclatement (resp. l'éclatement normalisé) de X le long de IJ_ρ , \hat{Y}_ρ (resp. \tilde{Y}_ρ) l'espace réduit de support $\omega_\rho^{-1}(Y)$ (resp. $\tilde{\omega}_\rho^{-1}(Y)$), \hat{H}_ρ (resp. \tilde{H}_ρ) l'espace réduit de support $\omega_\rho^{-1}(X_{\text{sing}, \rho})$ (resp. $\tilde{\omega}_\rho^{-1}(X_{\text{sing}, \rho})$).

Enfin, pour $j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, q\}$ et $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, M\}$, notons $\hat{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r} ; z_{i_1}, \dots, z_{i_r})$ (resp. $\hat{D}_\rho(f_{j_1}, \dots, f_{j_r} ; z_{i_1}, \dots, z_{i_r})$) la fonction $D(f_{j_1}, \dots, f_{j_r} ; z_{i_1}, \dots, z_{i_r}) \circ \tilde{\omega}$ (resp. $D(f_{j_1}, \dots, f_{j_r} ; z_{i_1}, \dots, z_{i_r}) \circ \tilde{\omega}_\rho$).

PROPOSITION 1. ([1] PROPOSITION 1).

Si en tout point d'un ouvert analytique dense de \tilde{Y} la fibre correspondante du morphisme $\tilde{\omega} : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \tilde{Y} - \dim Y$, alors les conditions suivantes sont satisfaites :

Condition A) : Pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}$, tout indice $k \in \{1, \dots, p\}$, tout $(r-1)$ -uplet (i_2, \dots, i_r) de $\{1, \dots, M\}$ et tout r -uplet (j_1, \dots, j_r) de $\{1, \dots, q\}$, nous avons :

$$\hat{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r} ; z_{s+k}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})_{\tilde{Q}} \in IJ_{\tilde{Q}}^{\sigma_{\tilde{X}, \tilde{Q}}}$$

SPEDER

Condition B) :

Pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}$, il existe un entier $\sigma(\tilde{Q}) > 0$ tel que, pour tout $(r-1)$ -uple (i_2, \dots, i_r) de $\{1, \dots, M\}$ et tout r -uple (j_1, \dots, j_r) de $\{1, \dots, q\}$, nous ayons :

$$\left(\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega}^{\sigma(\tilde{Q})} (f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_1, z_2, \dots, z_{i_r}) \right)_{\tilde{Q}} \in I^{\sigma(\tilde{Q})+1}_{J^{\sigma(\tilde{Q})}} \sigma_{\tilde{X}, \tilde{Q}}$$

REMARQUE 1) : Si X est une hypersurface définie par une fonction f , les conditions A) et B) deviennent :

Condition A) :

Pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}$ et tout indice $k \in \{1, \dots, p\}$ nous ayons :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z_{s+k}} \circ \tilde{\omega} \right]_{\tilde{Q}} \in I^{\sigma(\tilde{Q})} \sigma_{\tilde{X}, \tilde{Q}}$$

Condition B) :

Pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}$, il existe un entier $\sigma(\tilde{Q}) > 0$ tel que nous ayons :

$$\left[\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega} \frac{\partial f}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega} \right]_{\tilde{Q}} \in I^{\sigma(\tilde{Q})+1}_{J^{\sigma(\tilde{Q})}} \sigma_{\tilde{X}, \tilde{Q}}$$

PROPOSITION 1 :

Si en tout point d'un ouvert analytique dense de \hat{Y} , la fibre correspondante du morphisme $\omega: \hat{Y} \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{Y} - \dim Y$, alors les conditions \tilde{A}) et \tilde{B}) sont satisfaites.

Preuve :

Comme la normalisation est un morphisme à fibres finies, l'hypothèse de la PROPOSITION 1 entraîne immédiatement l'hypothèse de la PROPOSITION \tilde{Y} .

PROPOSITION \tilde{Y}_ρ :

Si en tout point de \tilde{Y}_ρ , la fibre correspondante du morphisme $\rho \circ \tilde{\omega}_\rho: \tilde{H}_\rho \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \tilde{H}_\rho - \dim Y$, alors les conditions suivantes sont satisfaites :

Condition \tilde{A}_ρ) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{Y}_\rho$, tout indice $k \in \{1, \dots, p\}$, tout $(r-1)$ -uple (i_2, \dots, i_r) de $\{1, \dots, M\}$ et tout r -uple (j_1, \dots, j_r) de $\{1, \dots, q\}$ nous avons :

$$\tilde{D}_\rho (f_{j_1}, \dots, f_{j_r}, z_{s+k}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})_{\tilde{S}} \in I_{\tilde{Y}_\rho} \sigma_{\tilde{X}_\rho, \tilde{S}}$$

Condition \tilde{B}_ρ) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{Y}_\rho$, il existe un entier $\sigma(\tilde{S}) > 0$ tel que pour tout $(r-1)$ -uple (i_2, \dots, i_r) de $\{1, \dots, M\}$ et tout r -uple (j_1, \dots, j_r) de $\{1, \dots, q\}$, nous avons :

$$\left[\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega}_\rho \tilde{D}_\rho (f_{j_1}, \dots, f_{j_r}, z_1, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right]_{\tilde{S}}^{\sigma(\tilde{S})} \in I^{\sigma(\tilde{S})+1} J_\rho^{\sigma(\tilde{S})} \sigma_{\tilde{X}_\rho, \tilde{S}}$$

Preuve :

Elle s'inspire de celle de la PROPOSITION 1 de ([1]).

Soit $\tilde{S} \in \tilde{Y}_\rho$. Il existe un voisinage ouvert \tilde{W} de \tilde{S} dans \tilde{X}_ρ tel qu'en tout point de $\tilde{W} \cap \hat{H}_\rho$, la fibre correspondante du morphisme :

$$\rho \circ \tilde{\omega}_\rho : \hat{H}_\rho \longrightarrow Y$$

soit de dimension : $\dim \hat{H}_\rho - \dim Y$.

Nous montrons la PROPOSITION \tilde{Y}_ρ (qui est trivialement vérifiée en tout point de $\tilde{W} - \hat{H}_\rho$) en tout point d'un ouvert analytique dense de $\tilde{W} \cap \hat{H}_\rho$ puis, comme \tilde{W} est un espace normal et les idéaux $I \sigma_{\tilde{W}}$ et $J_\rho \sigma_{\tilde{W}}$ sont inversibles, nous en déduisons alors la proposition en tout point de \tilde{W} (c.f [1] PROPOSITION 1).

Plus précisément, soit :

$$\tilde{U} = \tilde{X}_{\rho, \text{lisse}} \cap \{ \tilde{U} \in \hat{H}_{\rho, \text{lisse}} \cap \tilde{W} : \rho \circ \tilde{\omega}_\rho : \hat{H}_{\rho, \text{lisse}} \longrightarrow Y \text{ est une submersion en } \tilde{U} \}.$$

C'est un ouvert analytique dense de $\tilde{W} \cap \hat{H}_\rho$, l'espace $\tilde{W} - \tilde{U}$ est donc de codimension ≥ 2 dans \tilde{W} .

Nous avons, d'autre part, de façon évidente, le :

LEMME \tilde{Y}_ρ :

Soient \tilde{I}_ρ l'idéal $\sigma_{\tilde{X}_\rho}$ définissant \tilde{Y}_ρ et $\tilde{Y}_{\rho, \text{lisse}} = \bigcup_\alpha \tilde{Y}_{\rho, \alpha}$

la décomposition de $\tilde{Y}_{\rho, \text{lisse}}$ en composantes connexes.

Pour tout indice α , il existe un et un seul entier $\sigma_\alpha > 0$ tel que, pour tout point $\tilde{U} \in \tilde{X}_{\rho, \text{lisse}} \cap \tilde{Y}_{\rho, \alpha}$, nous ayons :

$$I \sigma_{\tilde{X}_\rho, \tilde{U}} = \tilde{Y}_{\rho, \tilde{U}}^{\sigma_\alpha}$$

Prenons alors un point $\tilde{Q} \in \tilde{U}$ et quitte à transporter l'origine des coordonnées dans \mathbb{C}^M au point $\tilde{\omega}_\rho(\tilde{Q})$, supposons que $\tilde{\omega}_\rho(\tilde{Q}) = 0$.

Il existe un voisinage ouvert \tilde{V} de \tilde{Q} dans $\tilde{\mathcal{X}}_{\rho}$ lisse et des fonctions y, v_1, \dots, v_{s-r-1} holomorphes dans \tilde{V} tels que :

- 1) $\tilde{V} \cap \tilde{H}_\rho = \tilde{V} \cap \tilde{H}_{\rho}$ lisse
- 2) $\tilde{V} \cap \tilde{H}_\rho = \{\tilde{p} \in \tilde{V} : y(\tilde{p}) = 0\}$
- 3) $\{\tilde{V}, (y, v_1, \dots, v_{s-r-1}, z_{s+1} \circ \tilde{\omega}_\rho, \dots, z_M \circ \tilde{\omega}_\rho)\}$ soit une carte de $\tilde{\mathcal{X}}_{\rho}$ lisse au voisinage de \tilde{Q} adaptée à la submersion $\rho \circ \tilde{\omega}_\rho : \tilde{H}_{\rho}$ lisse $\longrightarrow Y$.

De plus, si $\tilde{Q} \in \tilde{Y}_\rho$, il existe un indice α tel que $\tilde{Q} \in \tilde{Y}_{\rho, \alpha}$, il résulte alors du LEMME $\tilde{1}_\rho$ que, pour tout $i, 1 \leq i \leq s$, $(z_i \circ \tilde{\omega}_\rho)_{\tilde{Q}}$ peut se mettre sous la forme $(z_i \circ \tilde{\omega}_\rho)_{\tilde{Q}} = y_{\tilde{Q}}^\sigma \alpha g_{i\tilde{Q}}$ où $g_{i\tilde{Q}}$ est un germe de $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_\rho, \tilde{Q}}$ qui est inversible si $(z_i \circ \tilde{\omega}_\rho)_{\tilde{Q}}$ engendre $I_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_\rho, \tilde{Q}}}$.

Démonstration de la condition $\tilde{\Lambda}_\rho$ en \tilde{Q} :

Nous avons (c.f [1] PROPOSITION 1) :

$$\tilde{\partial}_\rho(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}, z_{s+k}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})_{\tilde{Q}} = \left[\sum_{i=1}^s \frac{\partial(z_i \circ \tilde{\omega}_\rho)}{\partial(z_{s+k} \circ \tilde{\omega}_\rho)} \times \tilde{\partial}_\rho(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}, z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right]_{\tilde{Q}}$$

d'où la condition $\tilde{\Lambda}_\rho$ si $\tilde{Q} \notin \tilde{Y}_\rho$ (par induction sur le nombre des indices i_2, \dots, i_r qui sont $\geq s+1$).

Si $\tilde{Q} \in \tilde{Y}_{\rho, \alpha}$, la condition $\tilde{\Lambda}_\rho$ résulte alors de l'égalité :

$$\left[\frac{\partial(z_1 \circ \tilde{\omega}_\rho)}{\partial(z_{s+k} \circ \tilde{\omega}_\rho)} \right]_{\tilde{Q}} = y_{\tilde{Q}}^{\sigma_\alpha} \left[\frac{\partial g_1}{\partial(z_{s+k} \circ \tilde{\omega}_\rho)} \right]_{\tilde{Q}}$$

Démonstration de la condition \tilde{B}_ρ) en \tilde{Q} :

Nous pouvons maintenant supposer que $i_2, \dots, i_r \in \{1, \dots, s\}$ (sinon $\sigma(\tilde{Q})=1$ convient d'après la condition \tilde{A}_ρ) . La condition \tilde{B}_ρ) est alors évidente si $\tilde{Q} \notin \tilde{Y}_\rho$ ($\sigma(\tilde{Q}) = 1$) . Si $\tilde{Q} \in \tilde{Y}_{\rho, \alpha}$, la condition \tilde{B}_ρ) résulte alors de l'égalité (c.f [1] PROPOSITION 1) :

$$\left[\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega}_\rho \tilde{D}_\rho (f_{j_1}, \dots, f_{j_r}, z_1, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right]_{\tilde{Q}} = \frac{-1}{\sigma_\alpha} y_{\tilde{Q}}^{\sigma_\alpha + 1} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^s \frac{\partial g_1}{\partial y} \tilde{D}_\rho (f_{j_1}, \dots, f_{j_r}, z_1, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right]_{\tilde{Q}}$$

REMARQUE \tilde{Y}_ρ : Si X est une hypersurface définie par une fonction f , les conditions \tilde{A}_ρ) et \tilde{B}_ρ) deviennent :

Condition \tilde{A}_ρ) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{Y}_\rho$ et tout indice $k \in \{1, \dots, p\}$, nous avons :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z_{s+k}} \circ \tilde{\omega}_\rho \right]_{\tilde{S}} \in IJ_\rho \sigma_{\tilde{Y}_\rho, \tilde{S}}$$

Condition \tilde{B}_ρ) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{Y}_\rho$, il existe un entier $\sigma(\tilde{S}) > 0$ tel que nous ayons :

$$\left[\sum_{i=1}^s z_i \circ \omega_\rho \frac{\partial f}{\partial z_i} \circ \omega_\rho \right]_{\hat{S}} \in 1^{\sigma(\hat{S})+1} j_\rho^{\sigma(\hat{S})} \mathcal{O}_{\hat{X}, \hat{S}}$$

PROPOSITION 1 ρ :

Si en tout point de \hat{Y}_ρ , la fibre correspondante du morphisme $\rho \circ \omega_\rho : \hat{H}_\rho \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{H}_\rho - \dim Y$, alors les conditions \hat{X}_ρ et \hat{B}_ρ sont satisfaites .

Preuve :

Analogue à celle de la PROPOSITION 1.

PROPOSITION 2 ([1] PROPOSITION 2) :

Soit S un point de Y .

Les conditions a) et b) de Whitney pour le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ en S le long de Y sont équivalentes aux :

Condition A) :

Pour tout point $\hat{S} \in \omega^{-1}(S)$, tout indice $k \in \{1, \dots, p\}$, tout $(r-1)$ -uple (i_2, \dots, i_r) de $\{1, \dots, M\}$ et tout r -uple (j_1, \dots, j_r) de $\{1, \dots, q\}$:

$$\hat{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}, z_{s+k}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})_{\hat{S}}$$

n'engendre pas $J \mathcal{O}_{\hat{X}, \hat{S}}$.

Condition B) :

Pour tout point $\hat{S} \in \omega^{-1}(S)$ tout $(r-1)$ -uple (i_2, \dots, i_r) de $\{1, \dots, M\}$ et tout r -uple (j_1, \dots, j_r) de $\{1, \dots, q\}$:

$$\left[\sum_{i=1}^s z_i \circ \hat{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}, z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right]_{\hat{S}}$$

n'engendre pas $I \mathcal{O}_{\hat{X}, \hat{S}}$

SPEDER

REMARQUE 2 : Si X est une hypersurface définie par une fonction f , les conditions A) et B) deviennent :

Condition A) :

Pour tout point $S \in \tilde{\omega}^{-1}(S)$ et tout indice $k \in \{1, \dots, p\}$:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z_{s+k}} \circ \tilde{\omega} \right]_S \text{ n'engendre pas } J_{X, S}^{\sigma}$$

Condition B) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}^{-1}(S)$:

$$\left[\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega} \frac{\partial f}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega} \right]_{\tilde{S}} \text{ n'engendre pas } IJ_{X, S}^{\sigma}$$

PROPOSITION 2_p :

Soit S un point de Y . Les conditions a) et b) de Whitney pour le couple $(X_{\text{lisse}, p}; Y)$ en S le long de Y sont équivalentes aux :

Condition A_p) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}_p^{-1}(S)$, tout indice $k \in \{1, \dots, p\}$, tout indice $\ell \in \{1, \dots, r\}$, tout r-uple (i_1, \dots, i_r) de $\{1, \dots, s\}$ et tout r-uple (j_1, \dots, j_r) de $\{1, \dots, q\}$ tel que

$$\tilde{D}_p(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{i_1}, \dots, z_{i_r}) \text{ engendre } J_p^{\sigma} \text{ sur } X_p, \tilde{S}, \text{ nous avons :}$$

$$\tilde{D}_p(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{s+k}, z_{i_1}, \dots, z_{i_{\ell}}, \dots, z_{i_r}) \text{ engendre } J_p^{\sigma} \text{ sur } X_p, \tilde{S}$$

Condition B_p) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}_p^{-1}(S)$, tout indice $\ell \in \{1, \dots, r\}$, tout r-uple (i_1, \dots, i_r) de $\{1, \dots, s\}$ et tout r-uple (j_1, \dots, j_r) de $\{1, \dots, q\}$ tel que

$$\tilde{D}_p(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{i_1}, \dots, z_{i_r}) \text{ engendre } J_p^{\sigma} \text{ sur } X_p, \tilde{S}$$

$$\left[\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega}_\rho \tilde{D}_\rho (f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_i, z_{i_1}, \dots, \hat{z}_{i_\ell}, \dots, z_{i_r}) \right]_{\tilde{S}}$$

n'engendre pas $IJ_\rho \sigma_{\tilde{X}_\rho, \tilde{S}}$

Preuve :

Elle s'inspire de celle de la PROPOSITION 2 de ([1]).

Les conditions A_ρ) et B_ρ) entraînent les conditions a) et b) :

Soit $\tilde{S} \in \tilde{\omega}_\rho^{-1}(S)$.

Nous pouvons supposer que $i_1 = j_1 = 1, \dots, i_r = j_r = r$.

Dans ces conditions, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ et tout $\ell \in \{1, \dots, r\}$, nous avons, d'après la condition A_ρ) :

$$\lim_{\substack{\tilde{R} \rightarrow \tilde{S} \\ \tilde{R} \in \tilde{X}_\rho - \tilde{H}_\rho}} \frac{\tilde{D}_\rho (f_1, \dots, f_r; z_{s+k}, z_1, \dots, \hat{z}_\ell, \dots, z_r)(\tilde{R})}{\tilde{D}_\rho (f_1, \dots, f_r; z_1, \dots, z_r)(\tilde{R})} = 0$$

et, d'après la condition B_ρ) :

$$\lim_{\substack{\tilde{R} \rightarrow \tilde{S} \\ \tilde{R} \in \tilde{X}_\rho - \tilde{H}_\rho}} \frac{\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega}_\rho(\tilde{R}) \tilde{D}_\rho (f_1, \dots, f_r; z_i, z_1, \dots, \hat{z}_\ell, \dots, z_r)(\tilde{R})}{\sqrt{\sum_{1 \leq i \leq s} |z_i \circ \tilde{\omega}_\rho(\tilde{R})|^2 \tilde{D}_\rho (f_1, \dots, f_r; z_1, \dots, z_r)(\tilde{R})}} = 0$$

Les conditions a) et b) en S se montrent alors comme dans la PROPOSITION 2 de ([1]).

Les conditions a) et b) entraînent les conditions A_ρ) et B_ρ) :

Soit $\tilde{S} \in \tilde{\omega}_\rho^{-1}(S)$.

Nous pouvons encore supposer que $i_1 = j_1 = 1, \dots, i_r = j_r = r$.

Pour toute suite : $(\tilde{R}_m)_m$ de points de $\tilde{X}_\rho - \tilde{H}_\rho$ telle que $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{R}_m = \tilde{S}$,

nous avons, d'après la condition a) en S, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ et tout $l \in \{1, \dots, r\}$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\tilde{D}_\rho (f_1, \dots, f_r ; z_{s+k}, z_1, \dots, \hat{z}_l, \dots, z_r)(\hat{R}_m)}{\tilde{D}_\rho (f_1, \dots, f_r ; z_1, \dots, z_r)(\hat{R}_m)} = 0 \text{ (c.f [1] PROPOSITION 2)}$$

d'où

$$\lim_{\substack{\hat{R} \rightarrow \hat{S} \\ \hat{R} \in \tilde{\mathcal{X}}_\rho - \tilde{\mathcal{H}}_\rho}} \frac{\tilde{D}_\rho (f_1, \dots, f_r ; z_{s+k}, z_1, \dots, \hat{z}_l, \dots, z_r)(\hat{R})}{\tilde{D}_\rho (f_1, \dots, f_r ; z_1, \dots, z_r)(\hat{R})} = 0$$

Nous en déduisons que $\tilde{D}_\rho (f_1, \dots, f_r ; z_{s+k}, z_1, \dots, \hat{z}_l, \dots, z_r)_{\hat{S}}$ appartient à $J_\rho \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_\rho, \hat{S}}$ ([4] page 114 Remark) mais ne l'engendre pas.

De même, d'après la condition b) en S, nous avons, pour tout $l \in \{1, \dots, r\}$:

$$\lim_{\substack{\hat{R} \rightarrow \hat{S} \\ \hat{R} \in \tilde{\mathcal{X}}_\rho - \tilde{\mathcal{H}}_\rho}} \frac{\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega}_\rho(\hat{R}) \tilde{D}_\rho (f_1, \dots, f_r ; z_i, z_1, \dots, \hat{z}_l, \dots, z_r)(\hat{R})}{\sqrt{1 \sum_{1 \leq i \leq s} |z_i \circ \tilde{\omega}_\rho(\hat{R})|^2} \tilde{D}_\rho (f_1, \dots, f_r ; z_1, \dots, z_r)(\hat{R})} = 0 \text{ (c.f [1] PROPOSITION 2)}$$

d'où la condition B_ρ).

REMARQUE 2 _{ρ} : Si X est une hypersurface définie par une fonction f, les conditions A_ρ) et B_ρ) deviennent :

Condition A _{ρ}) :

Pour tout point $\hat{S} \in \tilde{\omega}_\rho^{-1}(S)$ et tout indice $k \in \{1, \dots, p\}$ nous avons :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_{s+k}} \circ \tilde{\omega}_\rho \right)_{\hat{S}} \in J_\rho \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_\rho, \hat{S}}$$

Condition B_p) :

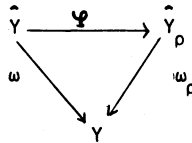
Pour tout point $S \in \tilde{\omega}_\rho^{-1}(S)$:

$$\left[\sum_{i=1}^S z_i \circ \tilde{\omega}_\rho \frac{\partial f}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega}_\rho \right]_{\tilde{X}} \text{ n'engendre pas } IJ_\rho \sigma_{\tilde{X}, \tilde{S}} .$$

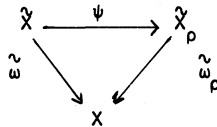
PROPOSITION 3 :

Si le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ vérifie la condition a) de Whitney le long de Y , nous avons :

- i) $J_{\tilde{X}/\tilde{Y}}^\sigma = J_\rho \sigma_{\tilde{X}/\tilde{Y}}$ et $J_{\tilde{X}/\tilde{Y}}^\sigma = J_\rho \sigma_{\tilde{X}/\tilde{Y}}$
- ii) X_{sing} et $X_{\text{sing}, \rho}$ coïncident au voisinage de Y .
- iii) Il existe un isomorphisme canonique $\psi : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}_\rho$ rendant commutatif le diagramme :



- iv) Si $Y = X_{\text{sing}, \rho}$ (cas où les fibres X_S sont lisses en dehors de Y), il existe un isomorphisme canonique $\psi : \hat{X} \longrightarrow \hat{X}_\rho$ rendant commutatif le diagramme :



Preuve :

- i) C'est une conséquence immédiate de la PROPOSITION 2.
- ii) Supposons le contraire : il existe un point $S \in Y$ et une suite $(R_m)_m$ de points de $X_{\text{lisse}} \cap X_{\text{sing}, \rho}$ telle que $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = S$. Pour tout m ,

il existe un et un seul point $\tilde{R}_m \in \tilde{X}$ tel que $\tilde{\omega}(\tilde{R}_m) = R_m$ et comme $\tilde{\omega}$ est propre, nous pouvons supposer qu'il existe $S \in \tilde{\omega}^{-1}(S)$ tel que $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{R}_m = \tilde{S}$.

Or, puisque nous avons la condition a) en S , pour tout indice $k \in \{1, \dots, p\}$, tout $(r-1)$ -uplet (i_2, \dots, i_r) de $\{1, \dots, M\}$ et tout r -uplet (j_1, \dots, j_r) de $\{1, \dots, q\}$, $D(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}, z_{s+k}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})$ n'engendre pas $J\sigma_{X, \tilde{S}}$.

Il existe donc un r -uplet $(i_{0,1}, \dots, i_{0,r})$ de $\{1, \dots, s\}$ et un r -uplet $(j_{0,1}, \dots, j_{0,r})$ de $\{1, \dots, q\}$ tel que $D(f_{j_{0,1}}, \dots, f_{j_{0,r}}, z_{i_{0,1}}, \dots, z_{i_{0,r}})(R_m) = 0$ entraîne $D(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}, z_{i_1}, \dots, z_{i_r})(R_m) = 0$ pour tout r -uplet (i_1, \dots, i_r) de $\{1, \dots, M\}$, tout r -uplet (j_1, \dots, j_r) de $\{1, \dots, q\}$ et tout m suffisamment grand. D'où $R_m \in X_{\text{sing}}$ pour m suffisamment grand : contradiction.

- iii) D'après ii) nous pouvons supposer que $X_{\text{sing}} = X_{\text{sing}, \rho}$. Intéressons-nous au cas où X est une hypersurface définie par une fonction f et prenons comme modèle d'éclatement de X le long de IJ et IJ_ρ les projections canoniques respectives sur X des fermetures dans $X \times \mathbb{P}\mathbb{C}^s \times \mathbb{P}\mathbb{C}^M$ et $X \times \mathbb{P}\mathbb{C}^s \times \mathbb{P}\mathbb{C}^s$ respectivement, des graphes de :

$$\begin{array}{ccc}
 X_{\text{lisse}} & \longleftrightarrow & \mathbb{P}\mathbb{C}^s \times \mathbb{P}\mathbb{C}^M \\
 Q & \longmapsto & \left[(z_1(Q), \dots, z_s(Q)), \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(Q), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_M}(Q) \right) \right] \\
 \text{et de } X_{\text{lisse}} & \longrightarrow & \mathbb{P}\mathbb{C}^s \times \mathbb{P}\mathbb{C}^s \\
 Q & \longmapsto & \left[(z_1(Q), \dots, z_s(Q)), \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(Q), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_s}(Q) \right) \right]
 \end{array}$$

L'isomorphisme canonique $Y \times \mathbb{P}\mathbb{C}^S \times \mathbb{P}\mathbb{C}^M \longrightarrow Y \times \mathbb{P}\mathbb{C}^S \times \mathbb{P}\mathbb{C}^S$, où $\mathbb{P}\mathbb{C}^M_p$ désigne la sous-variété de $\mathbb{P}\mathbb{C}^M$ formée des éléments dont les p dernières composantes sont nulles, induit, d'après la PROPOSITION 2, un isomorphisme $\hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}_p$ commutant avec les projections sur Y . Cet isomorphisme est obtenu par "passage à la limite" de l'isomorphisme canonique $\omega^{-1}(X_{\text{lisse}}) \longrightarrow \omega_p^{-1}(X_{\text{lisse}})$.

Le cas général (r quelconque) se traite de la même façon.

iv) D'après i) nous avons $IJ\sigma_{\hat{X}} = IJ\sigma_{\hat{X}_p}$.

Il existe donc, d'après la propriété universelle de l'éclatement, un morphisme (unique) : $\psi : \hat{X} \longrightarrow \hat{X}_p$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\psi} & \hat{X}_p \\ \omega \searrow & & \swarrow \omega_p \\ & X & \end{array}$$

Le morphisme ψ induit les isomorphismes canoniques $\hat{X} - \hat{Y} \longrightarrow \hat{X}_p - \hat{Y}_p$ et $\hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}_p$ (cf iii)), il est donc bijectif. Nous en déduisons que le morphisme canonique $\hat{X} \longrightarrow \hat{X}_p$ ainsi défini est surjectif, à fibres finies et qu'il induit un isomorphisme : $\hat{X} - \hat{Y} \longrightarrow \hat{X}_p - \hat{Y}_p$; comme $\hat{X} - \hat{Y}$ et $\hat{X}_p - \hat{Y}_p$ sont denses dans \hat{X} et \hat{X}_p respectivement, il s'ensuit que $\hat{X} \longrightarrow \hat{X}_p$ est une normalisation de \hat{X}_p d'où iv).

Nous allons maintenant donner des théorèmes "globaux" correspondants aux propositions "locales" que nous venons de démontrer.

Soient X un espace \mathbb{C} -analytique réduit de dimension pure et Y un sous-espace lisse fermé de X de dimension pure strictement inférieure à la dimension de X .

Soient $\omega : \hat{X} \longrightarrow X$ (resp $\hat{\omega} : \hat{X} \longrightarrow X$) l'éclatement (resp l'éclatement normalisé) de X le long du produit de l'idéal de Y par l'idéal jacobien de X , et \hat{Y} (resp \hat{Y}) l'espace réduit de support $\omega^{-1}(Y)$ (resp $\hat{\omega}^{-1}(Y)$).

THEOREME I :

Si en tout point d'un ouvert analytique dense de \hat{Y} , la fibre correspondante du morphisme $\omega : \hat{Y} \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{Y} - \dim Y$, le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y .

Preuve :

Ce théorème étant de nature locale, nous sommes ramenés à la situation décrite au début de l'article (sans tenir compte toutefois des hypothèses relatives à la rétraction ρ).

Il suffit de remarquer que les conditions \hat{A}) et \hat{B}) de la PROPOSITION 1 entraînent de façon évidente les conditions A) et B) de la PROPOSITION 2.

Nous obtenons en fait directement les conditions de Whitney strictes au sens d'Hironaka ([3] p.135 Définition 5.1).

THEOREME I ([1]) :

Si en tout point d'un ouvert analytique dense de \tilde{Y} , la fibre correspondante du morphisme $\tilde{\omega} : \tilde{Y} \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \tilde{Y} - \dim Y$, le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y .

Preuve :

Elle résulte des PROPOSITIONS 1 et 2. Il est à noter que ce résultat peut aussi se déduire de l'équivalence de la PROPOSITION 2 à l'aide de ([4] p.132 Proposition 4) et de ([6] Lemma 19.3).

Considérons maintenant la situation "relative" suivante :

Soient Z un espace \mathbb{C} -analytique lisse, X un sous-espace réduit fermé de Z de dimension pure et Y un sous-espace lisse fermé de X de dimension pure strictement inférieure à la dimension de X .

Soit $\rho : Z \rightarrow Y$ une rétraction holomorphe de Z sur Y telle que, si l'on note encore $\rho : X \rightarrow Y$ la rétraction induite de X sur Y , :

- * ρ soit un morphisme plat de X sur Y
- * pour tout point $S \in Y$, la fibre $X_S = \rho^{-1}(\{S\})$ soit réduite
- * Y soit inclus dans le lieu singulier relatif (à la rétraction ρ) $X_{\text{sing},\rho}$ (on pose $X_{\text{lisse},\rho} = X - X_{\text{sing},\rho}$).

Soient $\omega_\rho : \hat{X}_\rho \rightarrow X$ (resp $\tilde{\omega}_\rho : \tilde{X}_\rho \rightarrow X$) l'éclatement (resp l'éclatement normalisé) de X le long du produit de l'idéal I de Y par l'idéal jacobien relatif (à la rétraction ρ) J_ρ , \hat{H}_ρ (resp \tilde{H}_ρ) et \hat{Y}_ρ (resp \tilde{Y}_ρ) les espaces réduits de support respectif $\omega_\rho^{-1}(X_{\text{sing},\rho})$ et $\omega_\rho^{-1}(Y)$ (resp $\tilde{\omega}_\rho^{-1}(X_{\text{sing},\rho})$ et $\tilde{\omega}_\rho^{-1}(Y)$).

THEOREME I ρ :

Si en tout point de \hat{Y}_ρ , la fibre correspondante du morphisme $\rho \circ \omega_\rho : \hat{H}_\rho \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{H}_\rho - \dim Y$, le couple $(X_{\text{lisse}, \rho}, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y .

Preuve :

Ce théorème étant de nature locale, nous sommes encore ramenés à la situation décrite au début de l'article.

Il suffit alors de remarquer que les conditions \hat{X}_ρ et \hat{B}_ρ de la PROPOSITION 1 entraînent de façon évidente les conditions A_ρ et B_ρ de la PROPOSITION 2 ρ .

Nous obtenons encore en fait directement les conditions de Whitney strictes au sens d'Hironaka.

THEOREME I ρ :

Si en tout point de \hat{Y}_ρ , la fibre correspondante du morphisme $\rho \circ \tilde{\omega}_\rho : \hat{H}_\rho \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{H}_\rho - \dim Y$, le couple $(X_{\text{lisse}, \rho}, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y .

Preuve :

Elle résulte des PROPOSITIONS \hat{Y}_ρ et \hat{Z}_ρ . Il est à noter que ce résultat peut aussi se déduire de l'équivalence de la PROPOSITION 2 et du fait que \hat{X}_ρ est normal à l'aide de ([4] p.132, Proposition 4) et de ([6] Lemma 19.3).

Nous montrons, pour terminer, que le THEOREME I ρ donne un critère pour les conditions de Whitney de $(X_{\text{lisse}, \rho}, Y)$ le long de Y qui est stable par changement de base (sur Y).

Plus précisément soient $g : Y' \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces lisses de dimensions pures et $Z' = Z \times_Y Y'$, $X' = X \times_Y Y'$, $\rho' : Z' \rightarrow Y'$ les éléments déduits de Z, X, ρ par le changement de base g .

Si l'on note encore $\rho' : X' \rightarrow Y'$ la rétraction induite de X' sur Y' :

- * ρ' est un morphisme plat de X' sur Y' ([5] Exposé 13, Proposition 2.4).
- * pour tout point $S' \in Y'$, la fibre $X'_{S'} = \rho'^{-1}(\{S'\})$ est réduite
- * X' est un sous-espace fermé de Z' de dimension pure et réduit ([5] Exposé 21-B)
- * Y' est le sous-espace lisse fermé de X' défini par l'idéal $I' = I_{X'}$, et est de dimension pure strictement inférieure à la dimension de X' .
- * Y' est inclus dans le lieu singulier relatif (à la rétraction ρ') $X'_{\text{sing}, \rho'}$, qui est défini par l'idéal $J'_{\rho'} = J_{\rho'} \mathcal{O}_{X'}$.

Soient alors $\omega'_{\rho'} = \hat{X}'_{\rho'} \longrightarrow X'$ l'éclatement de X' le long de $I'J'_{\rho'}$, $\hat{H}'_{\rho'}$, et $\hat{Y}'_{\rho'}$, les espaces réduits de support respectif $\omega'^{-1}_{\rho'}(X'_{\text{sing}, \rho'})$ et $\omega'^{-1}_{\rho'}(Y')$

THEOREME II :

Si en tout point de $\hat{Y}'_{\rho'}$ la fibre correspondante du morphisme $\rho \omega'_{\rho'} : \hat{H}'_{\rho'} \longrightarrow Y'$ est de dimension : $\dim \hat{H}'_{\rho'} - \dim Y'$, alors, en tout point de $\hat{Y}'_{\rho'}$, la fibre correspondante du morphisme $\rho' \omega'_{\rho'} : \hat{H}'_{\rho'} \longrightarrow Y'$ est de dimension : $\dim \hat{H}'_{\rho'} - \dim Y'$ et le couple $(X'_{\text{lisse}, \rho'}, Y')$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y' .

Preuve :

Comme nous éclatons X' le long de $I'J'_{\rho'} \mathcal{O}_{X'}$, nous avons un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \hat{X}'_{\rho'} & \longrightarrow & \hat{X}_{\rho'} \\ \omega'_{\rho'} \downarrow & & \downarrow \omega_{\rho'} \\ X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

qui induit le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}'_{\rho'} & \longrightarrow & \hat{H}_{\rho'} \\ \rho' \circ \omega'_{\rho'} \downarrow & & \downarrow \rho \circ \omega_{\rho'} \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \text{g}$$

d'où la première assertion puisque, d'après la platitude de ρ et ρ' , nous avons $\dim X - \dim Y = \dim X' - \dim Y'$.

La seconde assertion résulte alors du Théorème I_ρ,.

REMARQUES :

- 1) - La PROPOSITION 3, qui est de nature "locale", est encore valable sous les hypothèses "globales" précédentes.
- 2) - En résumé, sous l'hypothèse $X_{\text{sing}} = X_{\text{sing},\rho}$, nous avons les implications suivantes :

- i) - En tout point de \hat{Y}_ρ , la fibre correspondante du morphisme $\rho \circ \omega_\rho : \hat{H}_\rho \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{H}_\rho - \dim Y$.
- ii) - En tout point d'un ouvert analytique dense de \hat{Y}_ρ , la fibre correspondante du morphisme $\omega_\rho : \hat{Y}_\rho \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{Y}_\rho - \dim Y$ et le couple (X_{lisse}, Y) vérifie la condition a) de Whitney le long de Y .
- iii) - En tout point d'un ouvert analytique dense de \hat{Y} , la fibre correspondante du morphisme $\omega : \hat{Y} \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{Y} - \dim Y$.
- iv) - Le couple (X_{lisse}, Y) vérifie les conditions de Whitney le long de Y .

L'implication i) \implies ii) résulte du THEOREME I_ρ, l'équivalence ii) \iff iii) est une conséquence de la PROPOSITION 3 et du THEOREME I, l'implication iii) \implies iv) résulte du THEOREME I, nous ne savons pas si les implications ii) \implies i) et iv) \implies iii) sont vraies.

SPEDER

R E F E R E N C E S

* * * * *

- [1] G. CANUTO - J.P. SPEDER : Un critère d'éclatement pour les conditions de WHITNEY.
A paraître aux "Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa".
- [2] H. HIRONAKA : Equivalences and deformations of isolated singularities.
Woodshole Seminar in algebraic geometry (1964).
- [3] H. HIRONAKA : Normal cones in analytic Whitney stratifications.
Publications Mathématiques N°31, I.H.E.S. (1970)
- [4] R. NARASIMHAN : Introduction to the theory of analytic spaces.
Springer Verlag Lecture Notes in Mathematics, Vol 25 (1966).
- [5] Séminaire Henri CARTAN : 13ème année 1960-1961.
Fondements de la géométrie analytique.
Exposés n° 13 par A. Grothendieck
n° 21 par C. Houzel.
- [6] H. WHITNEY : Tangents to analytic variety.
Annals of Mathematics, Vol 81 (1965).
