Astérisque

BERNARD MAUREY

Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p

Astérisque, tome 11 (1974)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__11__1_0>

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout spécialement Monsieur Laurent Schwartz, dont l'attention et les conseils m'ont été extrêmement précieux dans la préparation de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Monsieur Pierre Cartier, qui a lu le manuscrit, et Monsieur Adrien Douady qui m'a indiqué un intéressant sujet de seconde thèse.

Je ne dois pas oublier de remercier mes camarades du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, qui ont dû subir les premières versions des résultats qui suivent.

Je remercie enfin les secrétaires du Centre de Mathématiques pour leur gentillesse et leur efficacité dans la résolution des multiples problèmes techniques.

<u>TABLE DES MATIERES</u>

INTRODUCTION

La première source d'inspiration de ce travail se trouve dans un article de E.M. Nikishin [19] qui démontre le résultat suivant : soient E un espace de Banach, (Ω, μ) un espace de probabilité et u un opérateur linéaire continu de E dans l'espace $L^o(\Omega, \mu)$ des fonctions réelles μ-mesurables, muni de la topologie de la convergence en probabilité. Il n'y a pas de raison a priori pour que les éléments de u(E) admettent un moment d'ordre p, pour un $p > 0$, c'est-à-dire appartiennent à $L^p(\Omega, \mu)$. Cependant, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p < 1$, il est possible de trouver une partie mesurable Ω_ε de Ω, telle que $\mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, et une constante M telles que :

$$\forall\, x \in E, \quad \int_{\Omega_\varepsilon} |u(x)|^p \, d\mu \leqslant M \, \|x\|^p$$

De cet énoncé donné par Nikishin il est facile de passer à un énoncé équivalent : tout opérateur linéaire continu d'un espace de Banach E dans un espace $L^o(\Omega, \mu)$ admet la factorisation : (pour tout $p < 1$) :

$$E \xrightarrow{u_1} L^p(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^o(\Omega, \mu),$$

où u_1 est un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega, \mu)$, et où T_g désigne l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable g.

Par ailleurs, Grothendieck a démontré dans [5] un théorème de même nature : tout opérateur linéaire continu d'un espace $L^\infty(X, \nu)$ dans un espace $L^1(\Omega, \mu)$ admet la factorisation:

$$L^\infty(X, \nu) \xrightarrow{u_1} L^2(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^1(\Omega, \mu),$$

où u_1 est un opérateur linéaire continu de $L^\infty(X, \nu)$ dans $L^2(\Omega, \mu)$, et où T_g désigne l'opérateur de multiplication par une fonction g de $L^2(\Omega, \mu)$.

Les deux articles que nous venons de citer fixent le thème de notre travail, qui est donc consacré aux théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires continus à valeurs dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$.

Notre étude empruntera beaucoup à un article récent de H.P. Rosenthal, "On subspaces of L^p" [25], dont nous généraliserons plusieurs résultats. En particulier, en utilisant un lemme très intéressant de cet article, nous donnerons une nouvelle démonstration du théorème de Grothendieck cité plus haut.

Dans la théorie des applications sommantes [27], ce théorème de Grothendieck implique que tout opérateur 2-sommant d'un espace $L^1(X, \nu)$ dans un espace quasi-normé F est 1-sommant. Un certain nombre de théorèmes analogues ont été démontrés par S. Kwapien [9] et P. Saphar [26], sans faire intervenir de théorèmes de factorisation : tout opérateur linéaire q-sommant d'un espace $L^r(X, \nu)$ dans un espace quasi-normé F est p-sommant si $0 \leqslant p \leqslant q < r' \leqslant 2$ ou si $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2 \leqslant r' < \infty$. Nous verrons que les théorèmes de cette nature impliquent des théorèmes de factorisation : tout opérateur linéaire continu d'un espace $L^{r'}(X, \nu)$ dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ admet la factorisation:

$$L^{r'}(X, \nu) \longrightarrow L^q(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega, \mu),$$

où p, q, r sont comme précédemment, et où g est une fonction de $L^s(\Omega, \mu)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$.

Notre travail est divisé en onze parties, que nous allons passer en revue :

Le chapitre I concerne le problème de factorisation proprement dit. Nous envisagerons la question de la façon suivante : soient (Ω, μ) un espace mesuré, et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions de $L^p(\Omega, \mu)$, $0 < p < \infty$. Soient d'autre part $q \geqslant p$ et r donné par $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Nous voudrions trouver une fonction $g \in L^r(\Omega, \mu)$ telle que l'on ait pour tout $i \in I$:

$$\int \left|\frac{f_i}{g}\right|^q d\mu \leqslant 1.$$

La condition nécessaire et suffisante est donnée au théorème 2. Elle s'inspire de la condition donnée dans le théorème 1 de [25].

A partir de là il est facile de donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu d'un espace quasi-normé E dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ admette la factorisation :

$$E \longrightarrow L^q(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega, \mu)$$

ou plus généralement si G est un espace quasi-normé, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega, \mu, G)$ admette la factorisation :

$$E \longrightarrow L^q(\Omega, \mu, G) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega, \mu, G) \qquad \text{(Théorème 8).}$$

Nous étudierons ensuite dans ce premier chapitre le problème "transposé" : si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $L^q(\Omega, \mu), 0 < q < +\infty$, nous voulons trouver une fonction $g \in L^r(\Omega, \mu)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ telle que l'on ait pour tout $i \in I$:

$$\int |g\, f_i|^p \, d\mu \geqslant 1.$$

Cette condition est donnée dans le théorème 10. On en déduit des théorèmes de factorisation pour des opérateurs linéaires continus définis sur un sous-espace S_q d'un espace $L^q(\Omega, \mu)$, et à valeurs dans un espace quasi-normé E (Corollaire 11).

L'objet du chapitre II est identique à celui du chapitre I, mais on travaille maintenant sur des opérateurs à valeurs dans un espace $L^o(\Omega, \mu)$, et les techniques seront un peu différentes (inspirées du théorème 4 de [19]). De plus, on traite un problème un peu plus général que dans le chapitre I : on recherche la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu d'un espace quasi-normé E à valeurs dans un espace $L^o(\Omega, \mu)$ admette la factorisation :

$$E \longrightarrow L^{\Phi}(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^o(\Omega, \mu),$$

où Φ est une fonction de Young telle que l'espace d'Orlicz $L^{\Phi}(\Omega, \mu)$ soit quasi-normable (théorème 17).

Dans les chapitres III (pour $p > 0$) et IV (pour $p = 0$), on fera le lien entre les théorèmes de factorisation pour les opérateurs à valeurs dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ et la théorie des applications radonifiantes. Comme dans [27] et [28] on verra apparaître l'hypothèse d'approximation dans le cas $p < 1$. Les résultats principaux sont le théorème 23 (pour $p > 0$) et le corollaire 34 (pour $p = 0$) : si E est un espace de Banach, tel que E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, les conditions suivantes sont équivalentes, lorsque q est un nombre réel $\geqslant p$:

a) Tout opérateur linéaire continu de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ admet la factorisation :

$$E' \longrightarrow L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega,\mu)$$

(on suppose que μ est une probabilité si $p = 0$)

b) Pour tout espace quasi-normé F, on a :

$$\Pi_q(E,F) = \Pi_p(E,F).$$

Dans le chapitre V, on introduit la notion d'opérateur (p,G)-sommant (G étant un espace quasi-normé). Cette notion généralise celle d'opérateur p-sommant, et permet de formuler l'analogue du théorème 23 dans le cas d'opérateurs à valeurs dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ (Théorème 39).

A partir des théorèmes connus de la forme :

$$\forall F, \quad \Pi_q(E,F) = \Pi_p(E,F) \qquad \text{(cf [9], [26] ou [3])}$$

on déduit par le théorème 23 un certain nombre de théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires continus de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, lorsque E est un espace $L^r(X,\nu)$, pour r convenable ([9] et [26]) ou un espace de Banach quelconque [3]. En fait dans le chapitre VI, nous retrouvons ces résultats par une méthode plus directe, en introduisant la notion d'espace de type q, $0 < q \leqslant 2$. Cette méthode aura l'avantage secondaire de ne pas utiliser l'hypothèse d'approximation. Lorsqu'un espace quasi-normé E est de type q, tout opérateur linéaire continu de E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, $0 \leqslant p \leqslant q$, se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ (Proposition 43). Nous donnerons quelques exemples d'espaces de type q, (essentiellement des espaces $L^r(X,\nu)$ ou $L^r(X,\nu,G)$, pour r et G convenables), et nous résumerons l'essentiel des résultats dans le théorème 50.

Pour finir le chapitre VI, nous appliquerons les théorèmes généraux de factorisation au cas d'opérateurs linéaires invariants par translation de $L^r(K,\chi)$ dans $L^o(K,\chi)$, où K est un groupe compact, et χ sa mesure de Haar. On verra dans ce cas que si un opérateur invariant par translation de $L^r(K,\chi)$ dans $L^o(K,\chi)$ se factorise :

$$L^r(K,\chi) \longrightarrow L^q(K,\chi) \xrightarrow{T_g} (L^o(K,\chi),$$

c'est qu'il opérait déjà de $L^r(K,\chi)$ dans $L^q(K,\chi)$ (Proposition 66, théorème 68).

Le chapitre VII étudie une classe d'espaces quasi-normés que nous appelons espace de cotype 2, dont l'exemple fondamental est fourni par les espaces $L^p(\Omega,\mu)$, pour $0 < p \leqslant 2$. Lorsque E est de cotype 2, tout opérateur linéaire et continu d'un sous-espace S_q d'un espace $L^q(\Omega,\mu)(2 \leqslant q < \infty)$ dans E admet la factorisation :

$$\begin{array}{ccccc} L^q(\Omega,\mu) & \xrightarrow{T_g} & L^2(\Omega,\mu) & & \\ \cup & & \cup & & \\ S_q & \xrightarrow{j_g} & S_2 & \longrightarrow & E \end{array}$$

où T_g est un opérateur de multiplication de $L^q(\Omega,\mu)$ dans $L^2(\Omega,\mu)$, S_2 l'adhérence de $T_g(S_q)$ dans $L^2(\Omega,\mu)$ et j_g l'opérateur induit par T_g sur S_q. On en déduit en particulier que tout opérateur linéaire continu d'un sous-espace S_q d'un espace $L^q(\Omega,\mu)$, $2 \leqslant q < \infty$, dans E admet un prolongement continu à $L^q(\Omega,\mu)$ tout entier (Théorème 76). On retrouve ainsi un résultat de Kadec et Pelczynski [7] : si un sous-espace E de $L^q(\Omega,\mu)$, $2 \leqslant q < \infty$, est hilbertisable, il est complémenté dans $L^q(\Omega,\mu)$. (Corollaire 79).

Dans le chapitre VIII apparaît l'analyse la plus fine, fondée sur le lemme 6 de [25], qui devient pour nous (dans une version convenablement généralisée) le théorème 84. Ce résultat permet d'étudier, lorsque E est un espace de Banach, l'ensemble I_E des réels $p > 0$ tels que l'on ait :

$$\forall F, \quad \Pi_p(E,F) = \Pi_o(E,F).$$

On démontrera par exemple que $1 \notin I_E$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier n, E contient un sous-espace $(1+\varepsilon)$-isomorphe à ℓ_n^∞ (Théorème 92).

A partir de ces résultats, on pourra démontrer le théorème de Grothendieck cité précédemment. En fait, nous trouverons une certaine amélioration, que nous pouvons exprimer sous la forme :

$$L(L^1,L^2) = \Pi_o(L^1,L^2) \qquad \text{(Théorème 94).}$$

On en déduit ensuite un nouveau résultat, qui améliore un théorème de Kwapien et Pelczynski [11] : si ΣX_n est une série inconditionellement convergente dans $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p \leqslant 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{X_n}{\operatorname{Log} n}$ converge presque partout (Théorème 95).

Dans le chapitre IX, nous étudierons les plongements forts d'un espace de Banach E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, c'est-à-dire les plongements u de E dans $L^p(\Omega,\mu)$ tels que sur u(E) les topologies de $L^p(\Omega,\mu)$ et de $L^o(\Omega,\mu)$ coïncident. Nous montrerons essentiellement le résultat suivant : si E est un espace de Banach plongeable dans un espace $L^o(\Omega,\mu)$, vérifiant l'hypothèse d'approximation métrique, et si p est un nombre réel tel que $0 < p \leqslant 2$, les conditions suivantes sont équivalentes : (Théorème 98)

a) E est de type p

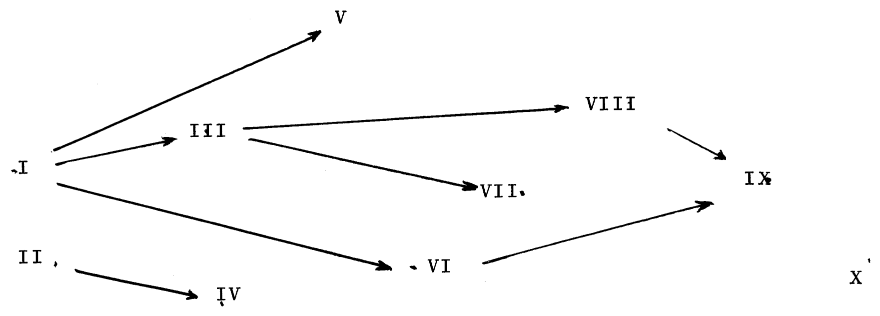
b) E peut se plonger fortement dans $L^p(\Omega,\mu)$

c) $p \in I_{E'}$

Le chapitre X constitue un essai de généralisation des chapitres I et III au cas des espaces d'Orlicz $L^\Phi(\Omega,\mu)$. Nous commencerons par déterminer les opérateurs de multiplication de $L^\psi(\Omega,\mu)$ dans $L^\Phi(\Omega,\mu)$ (Proposition 107). Ensuite nous donnerons au théorème 109 l'analogue du théorème 8, (analogie partielle car nous ignorons si les conditions données sont nécessaires dans ce cas), puis l'analogue du théorème 23 sera prouvé dans le théorème 113.

Pour finir le chapitre XI indique quelques questions et problèmes.

<u>Dépendance logique des chapitres</u>



(Dans ce diagramme, nous considérons qu'un chapitre est indépendant d'un chapitre précédent s'il suffit de se reporter à une ou deux définitions du précédent pour le lire. Par exemple, la définition des espaces de cotype 2 étudiés dans le chapitre VII se trouve dans le chapitre VI, mais c'est la seule chose utilisée de ce chapitre).

*
* *

0. Conventions générales

Nous appellerons espace quasi-normable un espace vectoriel topologique séparé possédant un voisinage de zéro borné. Nous appellerons espace quasi-normé la donnée d'un espace quasi-normable E et d'un voisinage de zéro équilibré et borné V. La quasi-norme sur E sera alors la jauge de V.

Si p est un nombre réel tel que $0 < p \leqslant 1$, on appelle p-norme sur un espace vectoriel E une fonction $x \to \|x\|$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que :

$$\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad ; \quad \|\lambda\, x\| = |\lambda|\ \|x\|$$

$$\forall\ x, y \in E \qquad \|x+ y\|^p \leqslant \|x\|^p + \|y\|^p.$$

On sait [23] que si un evt E est quasi-normable, il existe $p \in]0,1]$ tel que la topologie de E puisse être définie par une p-norme.

Tout au long de ce travail, nous utiliserons les espaces classiques $L^p(\Omega,\mu)$, mais également les espaces d'Orlicz $L^\Phi(\Omega,\mu)$.

Nous nous permettrons constamment l'abus de langage qui consiste à appeler "fonctions" les éléments de $L^p(\Omega,\mu)$ ou de $L^\Phi(\Omega,\mu)$, qui sont en réalité des classes de fonctions.

Rappelons un peu de terminologie au sujet des espaces $L^\Phi(\Omega,\mu)$. Nous appellerons fonction de Young Φ une application de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, non identiquement nulle, croissante et sci (c'est-à-dire croissante et continue à gauche), continue à l'origine, et telle que $\Phi(0) = 0$.

Soient (Ω,μ) un espace mesuré et Φ une fonction de Young. On désigne par $L^\Phi(\Omega,\mu)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables f sur (Ω,μ) telles que l'on ait pour un $a > 0$ (dépendant de f) :

$$\int \Phi\left(\left|\frac{f(\omega)}{a}\right|\right) d\mu(\omega) < +\infty.$$

On définit une topologie d'evts sur $L^\Phi(\Omega,\mu)$, dont un système fondamental de voisinages de zéro est donné par les :

$$V_{\epsilon,C} = \{f \mid \int \Phi(\frac{|f|}{C})\, d\mu \leqslant \epsilon\}, \quad \text{pour tous } \epsilon, C > 0.$$

Si Φ est une fonction de Young, posons pour $u \in \mathbb{R}_+$:

$$B_\Phi(u) = \sup_{x \geqslant 1} \frac{\Phi(x)}{\Phi(\frac{x}{u})} .$$

Il est clair que B_Φ est une fonction croissante. Posons $B_\Phi(0+) = \lim_{u \to 0} B_\Phi(u)$. On sait [24] que si (Ω, μ) est un espace de probabilité sans atome, $L^\Phi(\Omega,\mu)$ est quasi-normable si et seulement si $B_\Phi(0+) = 0$. Dans ce cas nous considérerons $L^\Phi(\Omega,\mu)$ comme un espace quasi-normé par la jauge de $V_{1,1}$, c'est-à-dire :

$$\|f\|_\Phi = \inf \{a \mid \int \Phi(\frac{|f|}{a})\, d\mu \leqslant 1 \}.$$

Lorsque Φ est une fonction convexe, $B_\Phi(0+) = 0$, et $\|f\|_\Phi$ est une norme qui fait de $L^\Phi(\Omega,\mu)$ un espace de Banach. Notons encore que si $\Phi(t) = t^p$, $0 < p < +\infty$, $L^\Phi(\Omega,\mu)$ coïncide avec $L^p(\Omega,\mu)$, et $\|f\|_\Phi = \|f\|_p$.

Si Φ est une fonction de Young, nous dirons que Φ vérifie la condition Δ_2 s'il existe un nombre réel k tel que :

$$\forall\, x \geqslant 1, \qquad \Phi(2x) \leqslant k\, \Phi(x).$$

On en déduit immédiatement que pour tout $M \geqslant 1$, il existe N tel que :

$$\forall\, x \geqslant 1, \qquad \Phi(Mx) \leqslant N\, \Phi(x).$$

Rappelons la notion de distance de deux espaces quasi-normés E et F : on pose $d(E,F) = +\infty$ si E et F ne sont pas isomorphes, et dans le cas contraire :

$$d(E,F) = \inf \{ \|u\|\, \|u^{-1}\| \mid u \text{ isomorphisme de E sur F} \} .$$

Nous appellerons <u>plongement</u> de E dans F un opérateur linéaire u tel que u soit un isomorphisme de E sur u(E).

* * *

I. Théorèmes de factorisation pour $p > 0$

Dans ce premier chapitre, nous examinerons le problème suivant : soient E un espace quasi-normé, (Ω, μ) un espace mesuré quelconque (*), u un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega, \mu)$, $0 < p \leqslant +\infty$, et q un nombre réel tel que $p \leqslant q \leqslant +\infty$. Nous voulons trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur u admette la factorisation :

$$E \xrightarrow{u_1} L^q(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega, \mu),$$

u_1 étant un opérateur linéaire continu et T_g l'opérateur de multiplication par une fonction $g \in L^r(\Omega, \mu)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$. Cela signifie exactement qu'il existe une constante C telle que :

$$\forall x \in E, \qquad \left(\int \left|\frac{u(x)}{g}\right|^q d\mu\right)^{1/q} \leqslant C \, \|x\|.$$

En fait, il est tout aussi simple de résoudre un problème un peu plus général. Soit I un ensemble d'indices quelconque , et soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $L^p(\Omega, \mu)$. Nous rechercherons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $g \in L^r(\Omega, \mu)$ telle que :

$$\forall i \in I \qquad \int \left|\frac{f_i}{g}\right|^q d\mu \leqslant 1.$$

Nous aurons besoin d'un lemme :

<u>Lemme 1</u> : Soient (Ω, μ) un espace mesuré, p et q deux nombres réels, $1 < p < +\infty$ et $0 < q < +\infty$, et désignons par K_p l'ensemble convexe des fonctions f mesurables $\geqslant 0$ telles que $\int f^p \, d\mu \leqslant 1$. L'application $f \to \int f^{-q} \, d\mu$ est convexe s.c.i. sur K_p muni de la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

<u>Démonstration</u> : La convexité résulte immédiatement de la convexité de t^{-q} sur $[0, +\infty[$. Puisque l'application est convexe, il revient au même qu'elle soit sci pour la topologie de la norme ou pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

(*) Nous devrions écrire $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ $\mathcal{C}$ étant une tribu sur Ω. Comme nous n'aurons à considérer qu'une seule tribu sur Ω, nous ne la mentionnerons pas pour alléger l'écriture. Sauf mention du contraire, μ n'est pas supposée finie, ni même σ-finie.

Raisonnons donc pour la topologie de la norme. Soit $f \in K_p$, et soit (f_n) une suite tendant vers f telle que :

$$\liminf_{g \to f} \int \left(\frac{1}{g}\right)^q d\mu = \lim_n \int \left(\frac{1}{f_n}\right)^q d\mu.$$

Il existe une sous-suite f_{n_i} qui converge presque partout vers f. D'après le lemme de Fatou :

$$\int \left(\frac{1}{f}\right)^q d\mu \leqslant \liminf_i \int \left(\frac{1}{f_{n_i}}\right)^q d\mu = \liminf_{g \to f} \int \left(\frac{1}{g}\right)^q d\mu,$$

ce qui démontre le lemme.

Le théorème fondamental qui suit généralise un théorème de H.P. Rosenthal ([25], Théorème 1).

<u>Théorème 2</u> : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, I un ensemble d'indices, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p \leqslant +\infty$, et q, r deux réels tels que $p \leqslant q \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\qquad \forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)} \quad \left(\int \left(\Sigma\, |\alpha_i\, f_i|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\Sigma\, |\alpha_i|^q\right)^{1/q}$,

b) $\qquad$ Il existe une fonction mesurable g telle que $\int |g|^r d\mu \leqslant 1$, et que :

$$\forall\, i \in I \quad \left(\int \left|\frac{f_i}{g}\right|^q d\mu\right)^{1/q} \leqslant 1$$

(Avec la convention $\frac{0}{0} = 0$).

La démonstration utilisera le lemme suivant, classique en analyse convexe, et que nous admettrons :

<u>Lemme 3</u> : Soient K un convexe compact d'un elcs, $\mathcal{H}$ un ensemble convexe de fonctions réelles sur K, s.c.s et ne prenant pas la valeur $+\infty$. On suppose que :

a) Chaque fonction $f \in \mathcal{H}$ est concave sur K.

b) $\forall\, f \in \mathcal{H}, \qquad \exists\, x \in K, \qquad f(x) \geqslant 0.$

Il existe alors un point $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) \geqslant 0$ pour toute $f \in \mathcal{H}$.

Démontrons maintenant a) $\Rightarrow$ b) dans le théorème 2. Le cas $p = q$ est trivial, il suffit de prendre pour g la fonction constante égale à 1. Supposons $p < q$, et $q = +\infty$. Si J est un sous-ensemble fini de I, et (α_i) la suite définie par :

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in J \\ 0 & \text{si } i \notin J \end{cases}$$

la condition a) s'écrit :

$$\int \left(\sup_{i \in J} |f_i| \right)^p d\mu \leqslant 1.$$

La famille des $\sup_{i \in J} |f_i|$ constitue quand J varie un ensemble filtrant croissant dans $L^p(\Omega, \mu)$. Il est classique qu'un ensemble filtrant croissant de fonctions de $L^p(\Omega, \mu)$, $p < +\infty$, admet une borne supérieure si et seulement si il est borné en norme. Posons :

$$g = \sup_{i \in I} |f_i| .$$

On a $\int |g|^p \, d\mu \leqslant 1$, et $|f_i| \leqslant g$ pour chaque i, ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Supposons maintenant $0 < p < q < +\infty$, et posons $s = \frac{q}{p}$, d'où $1 < s < +\infty$ et $s' = r/p$. Désignons par K l'ensemble des fonctions h mesurables $\geqslant 0$ sur K telles que $\int h^{s'} d\mu \leqslant 1$. L'ensemble K est convexe et compact pour la topologie $\sigma(L^{s'}, L^s)$. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^{(I)}$ désignons par μ_α la mesure $(\Sigma |\alpha_i f_i|^q).\mu$, et considérons la fonction F_α sur K définie par :

$$F_\alpha(h) = \Sigma |\alpha_i|^q - \int h^{-s} \, d\mu_\alpha .$$

Il est clair que l'ensemble des F_α est un cône convexe de fonctions sur K. D'autre part, d'après le lemme 1, chaque fonction F_α est concave scs. De plus posons :

$$h_\alpha = C \cdot (\Sigma |\alpha_i f_i|^q)^{1/ss'} \qquad \text{avec} \qquad C = \left(\int (\Sigma |\alpha_i f_i|^q)^{p/q} d\mu\right)^{-1/s'}$$

On vérifie que $\int h_\alpha^{s'} d\mu = 1$, c'est-à-dire $h_\alpha \in K$, et :

$$F_\alpha(h_\alpha) = \Sigma |\alpha_i|^q - C^{-s} \int (\Sigma |\alpha_i f_i|^q)^{1/s} d\mu$$

$$= \Sigma |\alpha_i|^q - (\int (\Sigma |\alpha_i f_i|^q)^{p/q} d\mu)^{q/p} \geqslant 0 \text{ d'après a).}$$

D'après le lemme 3, il existe $h_o \in K$ telle que :

$$\forall i \in I \quad \int \frac{|f_i|^q}{h_o^s} d\mu \leqslant 1, \text{ d'où le résultat avec } g = h_o^{1/p}.$$

Pour finir, montrons b) $\Longrightarrow$ a), qui résulte aisément de l'inégalité de Hölder :

$$(\int (\Sigma |\alpha_i f_i|^q)^{p/q} d\mu)^{1/p} = (\int \left[(\Sigma |\frac{\alpha_i f_i}{g}|^q)^{1/q} g\right]^p d\mu)^{1/p}$$

$$\leqslant (\int \Sigma |\frac{\alpha_i f_i}{g}|^q d\mu)^{1/q} \leqslant (\Sigma |\alpha_i|^q)^{1/q}.$$

<u>Remarque 4</u> : Supposons que la famille $(f_i)_{i \in I}$ du théorème 2 vérifie l'hypothèse :

$$\Sigma |\alpha_i|^q < + \infty \Longrightarrow \int (\Sigma |\alpha_i f_i|^q)^{p/q} d\mu < + \infty.$$

On a alors une application linéaire :

$$(\alpha_i) \to (\alpha_i f_i) \text{ de } \ell^q(I) \text{ dans } L^p(\Omega, \mu, \ell^q(I)),$$

qui est continue de $\ell^q(I)$ dans $(L^p(\Omega,\mu))^I$, donc aussi de $\ell^q(I)$ dans $L^p(\Omega,\mu, \ell^q(I))$ par le théorème du graphe fermé. Il existe donc une constante C telle que :

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)}, \quad (\int (\Sigma |\alpha_i f_i|^q)^{p/q} d\mu)^{1/p} \leqslant C (\Sigma |\alpha_i|^q)^{1/q}.$$

Soient (Ω,μ) un espace mesuré, I un ensemble d'indices, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p \leqslant + \infty$, et q un réel tel que $p \leqslant q \leqslant + \infty$. On désignera par $C_{p,q}((f_i)_{i \in I})$ la plus petite constante C (éventuellement $+ \infty$) telle que l'on ait :

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)}, \quad \left(\int \left(\Sigma \left|\alpha_i f_i\right|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \leqslant C \left(\Sigma \left|\alpha_i\right|^q\right)^{1/q} .$$

Notons que $C_{p,q}\left((f_i)_{i \in I} \right)$ ne dépend que de $|f_i|$, et plus précisément :

$$C_{p,q}\left((f_i) \right) = C_{p,q}\left((|f_i|) \right).$$

Soit maintenant G un espace vectoriel quasi-normé, et supposons que $(f_i)_{i \in I}$ soit une famille d'éléments de $L^p(\Omega,\mu,G)$. Nous poserons :

$$C_{p,q}\left((f_i) \right) = C_{p,q}\left((\|f_i\|) \right).$$

On obtient immédiatement :

<u>Corollaire 5</u> : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, I un ensemble d'indices, G un espace vectoriel quasi-normé, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $L^p(\Omega,\mu,G)$, $0 < p \leqslant +\infty$, et q, r deux nombres réels tels que $p \leqslant q \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\qquad C_{p,q}\left((f_i) \right) \leqslant C$

b) Il existe une fonction mesurable réelle, telle que $\int |g|^r \, d\mu \leqslant 1$ et que :

$$\forall i \in I \quad \left(\int \left\|\frac{f_i}{g}\right\|_G^q d\mu\right)^{1/q} \leqslant C .$$

De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :

a_1) $\qquad \Sigma \left|\alpha_i\right|^q < +\infty \qquad \int \left(\Sigma \left\|\alpha_i f_i\right\|_G^q\right)^{p/q} d\mu < +\infty$

b_1) Il existe une fonction mesurable réelle g, telle que $\int |g|^r \, d\mu < +\infty$, et que :

$$\forall i \in I \qquad \int \left\|\frac{f_i}{g}\right\|_G^q d\mu \leqslant 1.$$

<u>Définition 6</u> : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, E et G deux espaces quasi-normés, p et q deux nombres réels tels que $0 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\mu,G)$. Prenons pour ensemble d'indices I

la quasi-boule unité B de E, et posons pour $x \in I = B$:

$$f_x = u(x) \in L^p(\Omega, \mu, G).$$

Nous dirons que l'opérateur u est <u>q-cylindriquement de type p</u> si $C_{p,q}(\,(f_x)_{x \in I}\,)$ est fini, et nous poserons :

$$C_{p,q}(u) = C_{p,q}(\,(f_x)_{x \in I}\,)\,.$$

Nous allons traduire la définition ci-dessus d'une façon très légèrement différente ; nous allons montrer que $C_{p,q}(u)$ est la plus petite constante C telle que la propriété suivante soit réalisée :

Pour toute suite finie $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de E, on a :

$$\Big(\int (\Sigma\, \|u(x_i)\|^q)^{p/q}\, d\mu\Big)^{1/p} \leqslant C\, (\Sigma\, \|x_i\|^q)^{1/q}\,.$$

Montrons l'équivalence des deux définitions. Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ une suite finie d'éléments. Posons $y_i = x_i/\|x_i\|$, et pour $x \in B = I$:

$$\alpha_x = \Big(\sum_{\substack{i \\ y_i = x}} \|x_i\|^q\Big)^{1/q}\,.$$

Alors : $\displaystyle\Big(\sum_{x \in B} |\alpha_x|^q\Big)^{1/q} = \Big(\sum_i \|x_i\|^q\Big)^{1/q}$, et :

$$\Big(\sum_{x \in B} |\alpha_x\, f_x|^q\Big)^{1/q} = \Big(\sum_i \|u(x_i)\|^q\Big)^{1/q}\,,$$

ce qui prouve l'équivalence voulue.

Nous allons rassembler quelques évidences dans une proposition :

<u>Proposition 7</u> : Soient E et G deux espaces quasi-normés, (Ω, μ) un espace mesuré, p et q deux nombres réels tels que $0 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega, \mu, G)$.

a) Si F est un espace quasi-normé et v un opérateur linéaire continu de F dans E, on a :

$$C_{p,q}(u \circ v) \leqslant \|v\|\, C_{p,q}(u)$$

b) Si u admet la factorisation : $E \xrightarrow{\pi} E/N \xrightarrow{\bar{u}} L^p(\Omega,\mu,G)$, on a :

$$C_{p,q}(\bar{u}) = C_{p,q}(u)$$

<u>Démonstration</u> : Le a) est trivial, et en conséquence, il suffit de prouver $C_{p,q}(\bar{u}) \leqslant C_{p,q}(u)$ dans b). Soient $\epsilon > 0$, et $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ une suite d'éléments de E/N. Choisissons pour chaque i un vecteur $x_i \in E$ tel que $\bar{x}_i = \pi(x_i)$, et $\|x_i\| \leqslant (1+\epsilon)\|\bar{x}_i\|$. On aura alors :

$$\left(\int \left(\Sigma \|\bar{u}(\bar{x}_i)\|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} = \left(\int \left(\Sigma \|u(x_i)\|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \leqslant C_{p,q}(u)\left(\Sigma\|x_i\|^q\right)^{1/q}$$

$$\leqslant (1+\epsilon)\, C_{p,q}(u)\, \left(\Sigma\|\bar{x}_i\|^q\right)^{1/q} ,$$

d'où le résultat puisque ϵ est arbitraire.

On peut se poser la question suivante, dans l'optique de la proposition 7 a) : soient (X,ν) un espace mesuré, w un opérateur linéaire continu de $L^p(\Omega,\mu)$ dans $L^p(X,\nu)$, q un nombre réel $\geqslant p$, et u un opérateur q-cylindriquement de type p de E dans $L^p(\Omega,\mu)$. L'opérateur $w \circ u$ est-il q-cylindriquement de type p ? Cela n'est pas vrai en général, et ce problème sera examiné au chapitre VI.

Soient à nouveau E et G deux espaces quasi-normés, et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\mu,G)$. Nous dirons (de façon abusive mais rapide) que u se factorise par $L^q(\Omega,\mu,G)$ s'il existe un opérateur linéaire continu v de E dans $L^q(\Omega,\mu,G)$, et une fonction $g \in L^r(\Omega,\mu)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, tels que $u = T_g \circ v$, c'est-à-dire encore :

$$\forall\, x \in E, \quad u(x) = g\, v(x).$$

Nous obtenons finalement la condition nécessaire et suffisante de factorisation annoncée au début du chapitre.

<u>Théorème 8</u> : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, E et G deux espaces quasi-normés, p,q,r trois nombres réels tels que : $0 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\mu,G)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\quad C_{p,q}(u) \leqslant C$

b) Il existe une fonction mesurable réelle g telle que $\int |g|^r \, d\mu \leqslant 1$, et un opérateur linéaire continu v de E dans $L^q(\Omega, \mu, G)$ tels que :

$$u = T_g \circ v, \qquad \|v\| \leqslant C$$

De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :

a_1) Pour toute suite (x_n) d'éléments de E :

$$\Sigma \|x_n\|^q < +\infty \implies \int (\Sigma \|u(x_n)\|^q)^{p/q} \, d\mu < +\infty$$

b_1) L'opérateur u se factorise par $L^q(\Omega, \mu, G)$.

<u>Démonstration</u> : Démontrons a) $\Longleftrightarrow$ b). D'après le corollaire 5, l'inégalité $C_{p,q}(u) \leqslant C$ est équivalente à l'existence d'une fonction mesurable réelle g, telle que $\int |g|^r \, d\mu \leqslant 1$, et :

$$\forall\, x \in E \qquad \left(\int \left\|\frac{u(x)}{g}\right\|^q d\mu\right)^{1/q} \leqslant C \|x\|.$$

Il suffit alors de définir un opérateur v de E dans $L^q(\Omega, \mu, G)$ par :

$v(x) = \dfrac{u(x)}{g}$, et a) $\Longleftrightarrow$ b) est démontré.

On démontre de même a_1) $\Longleftrightarrow$ b_1) en se ramenant au corollaire 5.

Nous allons donner un exemple où l'application du théorème 8 est particulièrement simple. Le résultat suivant précise un théorème de Nikishin ([19], théorème 4).

<u>Proposition 9</u> : Soient (X, ν) et (Ω, μ) deux espaces mesurés, u un opérateur linéaire continu <u>positif</u> de $L^q(X, \nu)$ dans $L^p(\Omega, \mu)$, $0 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, et $q \geqslant 1$. L'opérateur u se factorise par $L^q(\Omega, \mu)$, et on a plus précisément : $C_{p,q}(u) = \|u\|$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de voir que $C_{p,q}(u) \leqslant \|u\|$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une suite finie d'éléments de $L^q(X, \nu)$. On a dans l'espace réticulé $L^p(\Omega, \mu)$:

$$(\Sigma\ |u(x_i)|^q)^{1/q} = \sup \{ \Sigma\ \alpha_i\ u(x_i) \mid \Sigma\ |\alpha_i|^{q'} \leqslant 1 \}$$

$$\leqslant u\ (\sup \{ \Sigma\ \alpha_i\ x_i \mid \Sigma\ |\alpha_i|^{q'} \leqslant 1 \}) = u\ ((\Sigma\ |x_i|^q)^{1/q})$$

(L'inégalité ci-dessus résulte de la positivité de u). On a donc :

$$\left(\int (\Sigma\ |u(x_i)|^q)^{p/q}\ d\mu\right)^{1/p} \leqslant \|u\| \ .\ \|(\Sigma\ |x_i|^q)^{1/q}\|_{L^q(X,\nu)} = \|u\| .\ (\Sigma\ \|x_i\|^q)^{1/q} \quad ,$$

d'où le résultat.

<u>Remarque</u> : La restriction $q \geqslant 1$ est nécessaire dans la proposition 9. En effet, si p et q sont tels que $0 < p < q < 1$, il existe [4] un espace de probabilité (Ω, μ) et un opérateur linéaire <u>positif</u> de ℓ^q dans $L^p(\Omega, \mu)$, qui ne se factorise pas par $L^q(\Omega, \mu)$.

Nous allons maintenant étudier le problème transposé du problème posé au début de ce chapitre.

Soient (Ω, μ) un espace mesuré, E un espace quasi-normé, u un opérateur linéaire continu de $L^q(\Omega, \mu)$ dans E, $0 < q \leqslant + \infty$, et p un nombre réel tel que $0 < p \leqslant q \leqslant + \infty$. Nous voulons trouver une condition nécessaire et suffisante pour que u admette la factorisation :

$$L^q(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega, \mu) \xrightarrow{v} E\ .$$

En fait, nous allons résoudre une question un peu plus générale. Soient S_q un sous-espace fermé de $L^q(\Omega, \mu)$, et u un opérateur linéaire continu de S_q dans E. Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que u admette la factorisation :

$$\begin{tikzcd}
L^q(\Omega, \mu) \arrow[r, "T_g"] & L^p(\Omega, \mu) & \\
\bigcup & \bigcup & \\
S_q \arrow[r, "j_g"] & S_p \arrow[r, "v"] & E
\end{tikzcd}$$

où S_p est un sous-espace fermé de $L^p(\Omega, \mu)$, $0 < p \leqslant q < + \infty$, $g \in L^r(\Omega, \mu)$,

$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, et j_g l'opérateur induit par la multiplication T_g. Cela signifie exactement que :

$$\forall f \in S_q \qquad \|u(f)\| \leqslant C \quad \left(\int |g\, f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

Comme au théorème 2, nous sommes conduits à prouver un résultat en apparence plus général :

<u>Théorème 10</u> : Soient (Ω, μ) un espace mesuré, I un ensemble d'indices, p,q et r trois nombres réels tels que $0 < p \leqslant q < +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, et$(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $L^q(\Omega, \mu)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une fonction mesurable g telle que $\int |g|^r \, d\mu \leqslant 1$, et que :

$$\forall\, i \in I \qquad \int |g\, f_i|^p \, d\mu \geqslant 1.$$

b) $\forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)}, \qquad \left(\Sigma\, |\alpha_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int \left(\Sigma\, |\alpha_i\, f_i|^p\right)^{q/p} d\mu\right)^{1/q}$

<u>Démonstration</u> : Montrons b) $\Longrightarrow$ a). Le cas p = q est trivial. Supposons donc $0 < p < q < +\infty$. La démonstration est alors identique à celle du théorème 2. Posons s = q/p, et soit K le convexe compact pour $\sigma(L^{s'}, L^s)$ des fonctions mesurables $\geqslant 0$ h telles que $\int h^{s'} \, d\mu \leqslant 1$. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^{(I)}$ considérons la fonction F_α sur K définie par :

$$F_\alpha(h) = \Sigma \int |\alpha_i\, f_i|^p \cdot h \, d\mu - \Sigma\, |\alpha_i|^p \,.$$

Chaque fonction F_α est affine et continue sur K, et l'ensemble des F_α est convexe. De plus, si nous posons :

$$h_\alpha = C \cdot \left(\Sigma\, |\alpha_i\, f_i|^p\right)^{q/r} \quad , \quad \text{avec } C = \left(\int \left(\Sigma\, |\alpha_i\, f_i|^p\right)^{q/p} d\mu\right)^{-1/s'}$$

nous avons $h_\alpha \in K$, et :

$$F_\alpha(h_\alpha) = C \int \left(\Sigma\, |\alpha_i\, f_i|^p\right)^{q/p} d\mu - \Sigma\, |\alpha_i|^p$$

$$= \left(\int \left(\Sigma\, |\alpha_i\, f_i|^p\right)^{q/p} d\mu\right)^{p/q} - \Sigma\, |\alpha_i|^p \geqslant 0.$$

D'après le lemme 3, il existe $h_o \in K$ telle que :

$$\forall\, i \in I \qquad \int |f_i|^p \, h_o \, d\mu \geqslant 1,$$

d'où le résultat dans ce cas avec $g = h_o^{1/p}$.

Comme au théorème 2, a) $\Longrightarrow$ b) résulte aisément de l'inégalité de Hölder :

$$\Sigma\, |\alpha_i|^p \leqslant \Sigma \int |\alpha_i \, f_i \, g|^p \, d\mu$$

$$= \int \left(\{\Sigma\, |\alpha_i \, f_i|^p\}^{1/p} \cdot g \right)^p d\mu \leqslant \left(\int (\Sigma\, |\alpha_i \, f_i|^p)^{q/p} \, d\mu \right)^{p/q},$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u> : Le résultat ne subsiste pas lorsque $q = +\infty$, car le dual de $L^\infty(\Omega, \mu)$ contient des éléments qui ne s'identifient pas à des fonctions sur (Ω, μ).

On déduit immédiatement du théorème 10 :

<u>Corollaire 11</u> : Soient (Ω, μ) un espace mesuré, E et G deux espaces vectoriels quasi-normés, p, q et r trois nombres réels tels que $0 < p \leqslant q < +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, S_q un sous-espace fermé de $L^q(\Omega, \mu, G)$, u un opérateur linéaire continu de S_q dans E et C un nombre réel $\geqslant 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un sous-espace fermé S_p de $L^p(\Omega, \mu, G)$ tel que u admette la factorisation $u = v \circ j_g$, où v est un opérateur linéaire de S_p dans E, tel que $\|v\| \leqslant C$, où g est une fonction mesurable réelle sur (Ω, μ), telle que $\int |g|^r \, d\mu \leqslant 1$, et j_g l'opérateur induit sur S_q par la multiplication T_g.

b) Pour toute suite $(f_1, \ldots, f_n)$ d'éléments de S_q, on a :

$$(\Sigma\, \|u(f_i)\|^p)^{1/p} \leqslant C \left(\int (\Sigma\, \|f_i\|_G^p)^{q/p} \, d\mu \right)^{1/q} .$$

De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :

a_1) Il existe $g \in L^r(\Omega, \mu)$ et un sous-espace fermé S_p de $L^p(\Omega, \mu, G)$ tels que u admette la factorisation $u = v \circ j_g$, où v est linéaire continu de S_p dans E.

b_1) Pour toute suite (f_n) d'éléments de S_q :

$$\int (\Sigma \|f_n\|^p)^{q/p} \, d\mu < +\infty \Longrightarrow \Sigma \|u(f_n)\|^p < +\infty.$$

<u>Démonstration</u> : Comme précédemment a) $\Longrightarrow$ b) résulte de l'inégalité de Hölder. Inversement (moyennant le changement de notation expliqué après la définition 6), l'hypothèse b) implique, d'après le théorème 10, l'existence d'une fonction mesurable réelle g telle que $\int |g|^r d\mu \leqslant 1$, et que :

$$\forall f \in S_q, \qquad \|u(f)\| \leqslant C \left(\int \|f\, g\|^p \, d\mu\right)^{1/p} .$$

On peut alors définir un opérateur v sur $T_g(S_q)$ par :

$$v\,(f\, g) = u(f).$$

L'inégalité ci-dessus signifie exactement que v est continu lorsqu'on munit $T_g(S_q)$ de la (quasi)-norme de $L^p(\Omega,\mu,G)$, et plus précisément $\|v\| \leqslant C$. Si l'on désigne par S_p l'adhérence de $T_g(S_q)$ dans $L^p(\Omega,\mu,G)$, v se prolonge à S_p avec encore $\|v\| \leqslant C$, et $u = v \circ j_g$, ce qui démontre a).

Démontrons maintenant $a_1) \Longleftrightarrow b_1$). Il suffit de montrer que b_1) implique b) pour une certaine constante C. On peut, lorsque G est complet, utiliser pour cela le théorème du graphe fermé comme à la remarque 4, mais on peut dans tous les cas se contenter d'un raisonnement plus élémentaire : s'il n'existe aucune constante C telle que b) soit réalisée, on peut trouver pour tout entier k une suite $(f_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\left(\int \left(\sum_n \|f_{n,k}\|^p\right)^{q/p} d\mu\right)^{p/q} \leqslant 2^{-k} \quad ; \qquad \sum_n \|u(f_{n,k})\|^p \geqslant 1.$$

On aura alors, puisque $q/p \geqslant 1$, d'après l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\int \left(\sum_{k,n} \|f_{n,k}\|^p\right)^{q/p} d\mu\right)^{p/q} \leqslant \sum_k \left(\int \left(\sum_n \|f_{n,k}\|^p\right)^{q/p} d\mu\right)^{p/q} \leqslant 1.$$

L'hypothèse b_1) appliquée à la suite double $(f_{n,k})$ devrait nous donner $\sum_{k,n} \|u(f_{n,k})\|^p < \infty$, ce qui n'est pas le cas. On obtient donc une contradiction, qui prouve que $b_1) \Longrightarrow$ b) pour un certain C, et ceci termine la démonstration.

Si S_q est un sous-espace fermé de $L^q(\Omega,\mu,G)$, E un espace quasi-normé, u un opérateur linéaire continu de S_q dans E, et p un réel tel que $0 < p \leqslant q < \infty$, on désignera par $C^*_{p,q}(u)$ la plus petite constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(f_1,\dots,f_n)$ d'éléments de S_q :

$$(\Sigma \|u\ (f_i)\|^p)^{1/p} \leqslant C\ (\int (\Sigma \|f_i\|^p)^{q/p}\ d\mu)^{1/q} .$$

D'après le corollaire 11, $C^*_{p,q}(u)$ est égal à l'inf de $\|v\|$ pour les factorisations de u de la forme $u = v.j_g$, avec $\int |g|^r d\mu \leqslant 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

***

II. Théorèmes de factorisation pour $p = 0$

Dans tout ce chapitre, nous supposerons que (Ω, μ) est un espace mesuré avec μ σ-finie. (Nous en verrons la raison plus loin). Nous désignerons par $L^0(\Omega, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables réelles. Nous voulons démontrer l'analogue du théorème 2 : soient I un ensemble d'indices, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $L^0(\Omega,\mu)$, et q un réel tel que $0 < q \leqslant +\infty$. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction mesurable g telle que :

$$\forall i \in I \qquad \int \left|\frac{f_i}{g}\right|^q d\mu \leqslant 1 \ ?$$

En fait, dire que μ est σ-finie équivaut à l'existence d'une fonction $h > 0$ μ-presque partout, et telle que $\int h \, d\mu = 1$. Si nous posons $\nu = h\mu$, $f'_i = h^{-1/q} f_i$, nous sommes ramenés au même problème relativement à la probabilité ν. Nous nous contenterons donc par la suite de considérer le cas où μ est une probabilité.

En fait, dans ce chapitre, nous pourrons sans difficulté supplémentaire résoudre un problème un peu plus général que celui que nous venons de poser : soient I un ensemble d'indices, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $L^0(\Omega, \mu)$, et Φ une fonction de Young (cf. chapitre 0). Nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction mesurable g telle que :

$$\forall i \in I, \qquad \int \Phi\left(\frac{f_i}{g}\right) d\mu \leqslant 1.$$

Nous nous limiterons cependant aux fonctions de Young telles que $B_\Phi(0+) = 0$. Nous commencerons par ramener le problème précédent à un problème étudié par Nikishin [19] : si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $L^0(\Omega, \mu)$, on cherche à savoir si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie mesurable Ω_ε de Ω et un nombre réel M_ε tels que :

$$\mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon, \quad \text{et} \quad : \quad \forall i \in I \quad \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi\left(\frac{f_i}{M_\varepsilon}\right) d\mu \leqslant 1.$$

<u>Proposition 12</u> : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, I un ensemble d'indices, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $L^0(\Omega, \mu)$ et Φ une fonction de Young telle que $B_\Phi(0+) = 0$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une fonction mesurable g telle que :

$$\forall i \in I \qquad \int \Phi(\frac{f_i}{g})\, d\mu \leqslant 1 .$$

b) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie mesurable Ω_ϵ de Ω et un nombre réel M_ϵ tels que :

$$\mu(\Omega - \Omega_\epsilon) \leqslant \epsilon, \qquad \forall i \in I \quad \int_{\Omega_\epsilon} \Phi(\frac{f_i}{M_\epsilon})\, d\mu \leqslant 1.$$

Démonstration : Supposons a) réalisée, et posons $\Omega_R = \{|g| \leqslant R\}$. On a :

$$\int_{\Omega_R} \Phi(\frac{f_i}{R}) \leqslant \int \Phi(\frac{f_i}{g}) \leqslant 1.$$

Maintenant pour tout $\epsilon > 0$ donné il existe R_ϵ tel que $\mu(\Omega - \Omega_{R_\epsilon}) \leqslant \epsilon$, ce qui prouve a) $\Longrightarrow$ b).

Inversement, supposons b) réalisée. Pour chaque entier n, il existe une partie mesurable Ω_n de Ω et un nombre réel M_n tels que :

$$\mu(\Omega - \Omega_n) \leqslant \frac{1}{n} \quad ; \qquad \forall i \in I \quad \int_{\Omega_n} \Phi(\frac{f_i}{M_n})\, d\mu \leqslant 1.$$

Puisque $B_\Phi(0+) = 0$ par hypothèse, on peut trouver pour chaque n un nombre réel c_n tel que :

$$0 < c_n \leqslant 1, \qquad \Phi(c_n) + B_\Phi(c_n) \leqslant 2^{-n} .$$

On a alors par définition de B_Φ, pour $x \geqslant 1$:

$$\Phi(c_n x) \leqslant \Phi(x) \leqslant B_\Phi(c_n)\, \Phi(\frac{x}{c_n}).$$

D'autre part, pour $x \leqslant 1$:

$\Phi(c_n x) \leqslant \Phi(c_n)$, donc finalement pour tout $x \geqslant 0$:

$$\Phi(c_n x) \leqslant \Phi(c_n) + B_\Phi(c_n)\, \Phi(\frac{x}{c_n})$$

Posons maintenant $A_n = \Omega_n - (\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_{n-1})$, et considérons la fonction mesurable g définie par :

$$g = \Sigma \frac{M_n}{c_n^2} \chi_{A_n}$$

Les ensembles (A_n) sont deux à deux disjoints, et leur réunion porte μ. On peut donc écrire :

$$\int \Phi(\frac{f_i}{g})\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} \Phi(\frac{f_i}{g})^q\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} \Phi(c_n \,.\, \frac{c_n f_i}{M_n})\, d\mu$$

$$\leqslant \sum_n (\Phi(c_n) + B_\Phi(c_n) \int_{\Omega_n} \Phi(\frac{f_i}{M_n})\, d\mu)$$

$$\leqslant \sum_n (\Phi(c_n) + B_\Phi(c_n)) \leqslant 1,$$

ce qui achève la démonstration.

Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, f une fonction mesurable réelle sur Ω, et $\alpha \in]0,1[$. Nous poserons :

$$J_\alpha(f, \mu) = \inf \{R \mid \mu\{|f| > R\} \leqslant \alpha\}.$$

Si A est une partie de $L^0(\Omega, \mu)$, nous poserons :

$$J_\alpha(A, \mu) = \sup_{f \in A} J_\alpha(f, \mu).$$

S'il n'y a pas de confusion à craindre, nous notons simplement $J_\alpha(f)$, $J_\alpha(A)$.

L'équivalent du théorème 2 pour p = 0 est donné par le résultat suivant, qui est inspiré de Nikishin ([19], théorème 4).

<u>Théorème 13</u> : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, et C une partie convexe de $L^0(\Omega, \mu)$, formée de fonctions positives. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie mesurable Ω_ϵ de Ω, telle que :

$$\mu(\Omega - \Omega_\epsilon) \leqslant 2\,\epsilon, \quad \text{et} \quad \forall f \in C \int_{\Omega_\epsilon} f\, d\mu \leqslant 2\, J_\epsilon(C).$$

Démonstration : On suppose $J_\varepsilon(C) < \infty$, sinon il n'y a rien à démontrer. Désignons par K l'ensemble des fonctions mesurables φ sur Ω telles que :

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \quad \text{et} \quad \int \varphi \, d\mu \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Il est clair que K est un convexe compact pour $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Pour chaque $f \in C$, définissons une fonction F_f sur K par :

$F_f(\varphi) = J_\varepsilon(C) - \int \varphi \, f \, d\mu$ (l'intégrale étant finie ou non).

Lorsque f varie, nous obtenons un ensemble convexe de fonctions affines s.c.s sur K, ne prenant pas la valeur $+\infty$. De plus, si φ_f désigne la fonction caractéristique de $\{|f| \leqslant J_\varepsilon(C)\}$, on a par définition de $J_\varepsilon(C)$:

$\int \varphi_f \, d\mu \geqslant 1 - \varepsilon$, soit $\varphi_f \in K$ et :

$$F_f(\varphi_f) = J_\varepsilon(C) - \int \varphi_f \, f \, d\mu \geqslant 0.$$

D'après le lemme 3, il existe $\varphi_o \in K$ telle que $F_f(\varphi_o) \geqslant 0$ pour toute $f \in C$. Mais puisque $\varphi_o \in K$, on a :

$$\mu \{ \varphi_o \geqslant 1/2 \} \geqslant 1 - 2\varepsilon.$$

Posons $\Omega_\varepsilon = \{ \varphi_o \geqslant \frac{1}{2} \}$. On aura $\mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon$, et :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f \, d\mu \leqslant 2 \int \varphi_o \, f \, d\mu \leqslant 2 J_\varepsilon(C),$$

ce qui achève la démonstration.

Proposition 14 : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, I un ensemble d'indices, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $L^o(\Omega, \mu)$ et Φ une fonction de Young telle que $B_\Phi(0+) = 0$, et vérifiant la condition Δ_2. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) Il existe une fonction mesurable g sur Ω telle que :

$$\forall i \in I, \qquad \int \Phi \left(\frac{f_i}{g}\right) d\mu \leqslant 1,$$

b) Pour tout $\epsilon \in]0,1[$, il existe une constante C_ϵ telle que :

$$\forall\ (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)}, \qquad J_\epsilon(\Sigma\ |\alpha_i|\ \Phi(f_i),\ \mu) \leqslant C_\epsilon\ \Sigma\ |\alpha_i|.$$

Démonstration : Démontrons tout d'abord b) $\Longrightarrow$ a). Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^{(I)}$ tel que $\Sigma\ |\alpha_i| \leqslant 1$, considérons $f_\alpha = \Sigma\ |\alpha_i|\ \Phi(f_i)$. On obtient de cette manière un ensemble C de fonctions mesurables positives, et C est convexe. D'autre part, b) se traduit exactement par $J_\epsilon(C) \leqslant C_\epsilon$. D'après le théorème 13, il existe pour tout $\epsilon > 0$ une partie mesurable Ω_ϵ de Ω telle que $\mu(\Omega - \Omega_\epsilon) \leqslant 2\ \epsilon$, et :

$$\forall\ i \in I, \qquad \int_{\Omega_\epsilon} \Phi(f_i)\ d\mu \leqslant 2\ C_\epsilon.$$

En raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 12, on peut trouver un nombre réel $c_\epsilon > 0$ tel que :

$$\Phi(c_\epsilon) + 2\ C_\epsilon\ B_\Phi(c_\epsilon) \leqslant 1, \text{ et :}$$

$$\forall\ x \geqslant 0 \qquad \Phi(c_\epsilon\ x) \leqslant \Phi(c_\epsilon) + B_\Phi(c_\epsilon)\ \Phi\left(\frac{x}{c_\epsilon}\right).$$

Alors :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Phi(c_\epsilon^2\ f_i)\ d\mu \leqslant \Phi(c_\epsilon) + B_\Phi(c_\epsilon) \int_{\Omega_\epsilon} \Phi(f_i)\ d\mu \leqslant 1.$$

On en déduit a) d'après la proposition 12.

Inversement montrons que a) $\Longrightarrow$ b). Soit $\epsilon > 0$ donné. D'après la proposition 12, il existe une partie mesurable Ω' de Ω, et un nombre réel M tels que :

$$\forall\ i \in I, \qquad \int_{\Omega'} \Phi\left(\frac{f_i}{M}\right) d\mu \leqslant 1\ ;\quad \mu(\Omega - \Omega') \leqslant \epsilon/2.$$

Puisque Φ vérifie la condition Δ_2, il existe un nombre réel N tel que :

$$\forall\ x \geqslant 1, \qquad \Phi(Mx) \leqslant N\ \Phi(x), \quad \text{donc pour tout } x \geqslant 0 :$$

$$\Phi(Mx) \leqslant M + N\ \Phi(x). \quad \text{On en déduit :}$$

$$\int_{\Omega'} \Phi(f_i)\, d\mu \leqslant M + N \int_{\Omega'} \Phi\left(\frac{f_i}{M}\right) d\mu \leqslant M + N.$$

Par conséquent, si $(\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)}$ est telle que $\Sigma\, |\alpha_i| \leqslant 1$:

$\int_{\Omega'} \Sigma\, |\alpha_i|\, \Phi\,(f_i)\, d\mu \leqslant M + N$, donc :

$$\mu\, \{\omega \in \Omega' \mid \Sigma\, |\alpha_i|\, \Phi(f_i(\omega)) \geqslant \frac{2(M+N)}{\varepsilon}\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

et puisque $\mu(\Omega - \Omega') \leqslant \varepsilon/2$:

$\mu\, \{\, \Sigma|\alpha_i|\, \Phi(f_i) \geqslant \dfrac{2(M+N)}{\varepsilon}\} \leqslant \varepsilon$, soit encore :

$$J_\varepsilon\,(\Sigma|\alpha_i|\, \Phi(f_i),\ \mu) \leqslant \frac{2(M+N)}{\varepsilon}$$

on en déduit b), en utilisant l'homogénéité de J_ε.

Nous allons récrire le résultat précédent dans le cas où $\Phi(t) = t^q$ sous une forme où apparaît mieux l'analogie avec le théorème 2 :

<u>Corollaire 15</u> : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, I un ensemble d'indices $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $L^0(\Omega, \mu)$ et $q \in \left]0, +\infty\right]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une fonction mesurable g sur Ω telle que :

$$\forall\, i \in I \qquad \int \left|\frac{f_i}{g}\right|^q d\mu \leqslant 1.$$

b) Pour tout $\varepsilon \in \left]0,1\right[$, il existe une constante C_ε telle que :

$$\forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)} \quad J_\varepsilon\, ((\Sigma|\alpha_i\, f_i|^q)^{1/q},\ \mu) \leqslant C_\varepsilon\, (\Sigma|\alpha_i|^q)^{1/q}.$$

Pour $q < \infty$, la démonstration est immédiate à partir de la proposition 14 : il suffit de remarquer que $J_\varepsilon\, \{f^{1/q}, \mu\} = (J_\varepsilon(f, \mu))^{1/q}$. Pour $q = +\infty$, on raisonne comme dans le théorème 2.

Remarque 16 : Nous allons voir pourquoi nous nous sommes restreints dans ce chapitre au cas où μ est une mesure σ-finie. En effet, supposons que μ soit une mesure telle que le corollaire 14 soit vrai. Soit I un ensemble quelconque d'indices, et posons $f_i = 1$, fonction constante sur Ω, pour chaque $i \in I$. Dans ce cas, $(\Sigma|\alpha_i f_i|^q)^{1/q}$ est égale à la constante $(\Sigma|\alpha_i|^q)^{1/q}$, donc :

$$J_\varepsilon((\Sigma|\alpha_i f_i|^q)^{1/q}, \mu) = (\Sigma|\alpha_i|^q)^{1/q}.$$

Il doit alors exister une fonction mesurable g sur Ω telle que :

$$\int \left(\frac{1}{g}\right)^q d\mu \leqslant 1.$$

Mais alors g^{-q} est une fonction intégrable, et > 0 μ presque partout, donc μ est nécessairement σ-finie.

Comme dans le cas $p > 0$, on déduit de la proposition 14 un théorème de factorisation :

Théorème 17 : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, E et G deux espaces quasi-normés, u un opérateur linéaire continu de E dans $L^0(\Omega, \mu, G)$, et Φ une fonction de Young telle que $B_\Phi(0+) = 0$, vérifiant la condition Δ_2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une fonction mesurable réelle g sur Ω, et un opérateur linéaire continu v de E dans $L^\Phi(\Omega, \mu, G)$, tels que $u = T_g \circ v$.

b) Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe une constante C_ε telle que pour toute suite $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E et toute suite $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels positifs, on ait :

$$J_\varepsilon(\Sigma\, \alpha_i\, \Phi\,(\|u(x_i)\|, \mu) \leqslant C_\varepsilon\, \Sigma\, \alpha_i.$$

Démonstration : Il est clair que a) équivaut à l'existence d'une fonction mesurable réelle g telle que :

$$\forall x \in E \qquad \int \Phi\left(\frac{\|u(x)\|}{\|x\|\ g}\right) d\mu \leqslant 1.$$

Il est donc immédiat de se ramener à l'application de la proposition 14.

Lorsque $\Phi(t) = t^q$, $0 < q \leqslant \infty$, on peut remplacer b) par :

b') Pour tout $\varepsilon \in \left]0,1\right[$, il existe une constante C_ε telle que pour toute suite $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de E, on ait :

$$J_\varepsilon\left(\left(\Sigma\,\|u(x_i)\|^q\right)^{1/q},\ \mu\right) \leqslant C_\varepsilon\left(\Sigma\,\|x_i\|^q\right)^{1/q}.$$

Nous dirons dans ce cas que l'opérateur u est q-cylindriquement de type zéro.

***

III. Liens avec la théorie des opérateurs p-sommants

Nous adopterons dans ce chapitre la terminologie de [18]. Nous appellerons <u>elcs à dual quasi-normé</u> E la donnée d'un elcs E et d'une quasi-norme sur son dual E', telle que la quasi-boule unité soit bornée pour la topologie $\sigma(E',E)$.

Soient E un elcs à dual quasi-normé, F un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire de E dans F. Nous dirons que u est p-sommant de E dans F, $0 < p \leqslant +\infty$, s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E :

$$(\Sigma \|u(x_i)\|^p)^{1/p} \leqslant C \sup_{\|\xi\|_{E'} \leqslant 1} (\Sigma |< x_i,\xi >|^p)^{1/p} .$$

On notera $\pi_p(u)$ la plus petite constante telle que l'inégalité ci-dessus soit réalisée. On notera $\Pi_p(E,F)$ l'ensemble des opérateurs p-sommants de E dans F.

Soient E un elcs à dual quasi-normé, et $q \in \left]0, +\infty\right]$. Nous désignerons par $N(E,\ell^q)$ l'espace des opérateurs linéaires u de E dans ℓ^q de la forme :

$u(x) = (< x,\xi_n >)_n$, où (ξ_n) est une suite d'éléments de E' telle que $\Sigma \|\xi_n\|^q < +\infty$. Nous poserons $N_q(u) = (\Sigma\|\xi_n\|^q)^{1/q}$. Nous désignerons par $N_o(E,\ell^q)$ le sous-espace de $N(E,\ell^q)$ constitué par les opérateurs de la forme $u(x) = (< x,\xi_n >)$, où la suite (ξ_n) est telle qu'un nombre fini seulement de ses composantes sont non nulles.

On constate facilement que $N(E,\ell^q) \subset \Pi_q(E,\ell^q)$, et plus précisément $\pi_q(u) \leqslant N_q(u)$.

En effet, si u est un élément de $N(E,\ell^q)$, défini par $u(x) = (< x,\xi_n >)$, on peut décomposer u de la façon suivante :

$u = \alpha \circ v$, où v est l'opérateur de E dans ℓ^∞ défini par :

$$v(x) = \left(< x, \frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} >\right)_n ,$$

et où α est l'opérateur diagonal de ℓ^{∞} dans ℓ^{q} défini par la suite $(\|\xi_n\|)$. L'opérateur u est donc q-sommant ([18], exposé II théorème (4,1)).

Soit E un elcs à dual quasi-normé. Nous dirons que le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si l'identité de E' est limite simple (pour la topologie quasi-normée de E') d'un filtre (π_i) d'opérateurs de rang fini, continus pour $\sigma(E',E)$ et tels que $\|\pi_i\| \leq 1$ pour chaque i. Lorsque E est un espace de Banach et E' son dual, il résulte de S. Simmons [29] que l'hypothèse d'approximation ordinaire sur E' implique l'hypothèse d'approximation pour le couple (E,E').

Rappelons brièvement ici la notion de probabilité cylindrique λ sur un espace localement convexe E : c'est la donnée pour chaque application linéaire v de E dans un espace vectoriel de dimension finie F d'une probabilité $v(\lambda)$ sur F, de façon que les $v(\lambda)$ forment un système projectif. [c'est-à-dire que si $v_1 = w \circ v$, $v_1(\lambda) = w(v(\lambda))$].

Si μ est une probabilité de Radon sur un espace quasi-normé, et si $p \in]0, +\infty[$, on dira que μ est d'ordre ~~p~~ si :

$$\|\mu\|_p = \left(\int \|x\|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \quad \text{est fini.}$$

Si E est un elcs à dual quasi-normé, on dira qu'une probabilité cylindrique λ sur E est de type p si :

$$\|\lambda\|_p^* = \sup_{\|\xi\|_{E'} \leq 1} \|\xi(\lambda)\|_p \quad \text{est fini.}$$

Soient E un espace quasi-normé séparé par son dual, (Ω, μ) un espace de probabilité et u un opérateur linéaire de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$. Soient d'autre part G un espace quasi-normé de dimension finie et $\pi \in L(E,G)$. Il existe une fonction $\varphi_{u,\pi}$ unique dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ telle que :

$$\forall \xi \in G' \qquad u({}^t\pi(\xi)) = \xi \circ \varphi_{u,\pi}$$

(La construction de $\varphi_{u,\pi}$ est facile. Si $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de G et $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ la base duale dans G', on prendra :

$$\varphi_{u,\pi} = \sum_{j=1}^{n} u({}^t\pi(\xi_j)) \, x_j \quad . \;)$$

Nous dirons que u est quasi- p-décomposé s'il existe une constante C telle que pour tout espace quasi-normé de dimension finie G et tout $\pi \in L(E,G)$, on ait :

$$\left(\int \|\varphi_{u,\pi}\|_G^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant C \, \|\pi\|.$$

On notera $d_p(u)$ la plus petite constante C telle que la propriété soit réalisée.

<u>Proposition 18</u> : Soient E un elcs à dual quasi-normé, tel que le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, F un espace quasi-normé séparé par son dual, (Ω, μ) un espace de probabilité, u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$, $0 < p \leqslant \infty$, et v un opérateur p-sommant de E dans F. L'opérateur $u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposé, et :

$$d_p(u \circ {}^t v) \leqslant \pi_p(v) \, . \, \|u\|.$$

De plus, l'hypothèse d'approximation est inutile pour $p \geqslant 1$.

<u>Démonstration</u> : Soient G un espace quasi-normé de dimension finie et $\pi \in L(F,G)$. On a $\pi_p(\pi \circ v) \leqslant \|\pi\| \, . \, \pi_p(v)$.

Soit λ la probabilité cylindrique sur E définie par u ([18], exposé IV). D'après [18], exposé III, Th(III,1,1) $\pi \circ v(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur G, et :

$$\|\pi \circ v(\lambda)\|_p \leqslant \pi_p(\pi \circ v) \; \|\lambda\|_p^* \leqslant \|\pi\| \; \pi_p(v) \; \|\lambda\|_p^* = \|\pi\| \; \pi_p(v) \; \|u\|.$$

Posons $w = u \circ {}^t v$. Il est clair que $\pi \circ v(\lambda) = \varphi_{w,\pi}(\mu)$ (car ces deux mesures ont la même image par toute forme linéaire sur G), donc :

$\left(\int \|\varphi_{w,\pi}\|_G^p \, d\mu\right)^{1/p} = \|\pi \circ v(\lambda)\|_p \leqslant \|\pi\| \; \pi_p(v) \; \|u\|$, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u> : On trouve dans [27], exposé 13, la notion d'opérateur p-décomposé qui est beaucoup plus agréable que notre notion d'opérateur quasi-p-décomposé. Si E est un espace quasi-normé séparé par son dual, on dit qu'un opérateur linéaire continu u de E' dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ est p-décomposé s'il existe une fonction mesurable $\varphi \in L^p(\Omega, \mu, E)$ telle que :

$$\forall\, \xi \in E', \qquad u(\xi) = \xi \circ \varphi.$$

Malheureusement, la proposition 18 ne reste pas vraie en général si l'on y remplace quasi-p-décomposé par p-décomposé. (Cela est lié à la nécessité de l'introduction du bidual dans la théorie des applications radonifiantes). On peut remédier à cet inconvénient en introduisant la notion d'opérateur scalairement p-décomposé (cf [9]) c'est-à-dire que la fonction φ ci-dessus est supposée seulement scalairement mesurable, et que $\|\varphi\|$ est majorée par un élément g de $L^p(\Omega,\mu)$. Cependant, pour ce que nous voulons faire, il est aussi simple d'avoir recours aux opérateurs quasi-p-décomposés.

<u>Théorème 19</u> : Soient p et q deux nombres réels tels que $0 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, E un elcs à dual quasi-normé (tel que le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si $q < 1$), (Ω,μ) un espace de probabilité et $u \in L(E', L^p(\Omega,\mu))$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'opérateur u se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$, avec $C_{p,q}(u) \leqslant C$.

b) Pour tout espace quasi-normé F séparé par son dual et tout opérateur q-sommant v de E dans F, $u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposé, et $d_p(u \circ {}^t v) \leqslant C\, \pi_q(v)$.

c) Pour tout opérateur $v \in N_o(E, \ell^q)$, $u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposé, et $d_p(u \circ {}^t v) \leqslant C\, N_q(v)$.

<u>Démonstration</u> : Montrons que a) $\Longrightarrow$ b). On peut écrire $u = T_g \circ u_1$, avec $\int |g|^r\, d\mu \leqslant 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ et $\|u_1\| \leqslant C$ dans $L(E', L^q(\Omega,\mu))$. D'après la proposition 18, $u_1 \circ {}^t v$ est quasi-q-décomposée. Soit G un espace quasi-normé de dimension finie, et $\pi \in L(F,G)$. Posons $w = u \circ {}^t v$, $w_1 = u_1 \circ {}^t v$. On a, d'après la proposition 18 :

$$\left(\int \|\varphi_{w_1,\pi}\|^q\, d\mu\right)^{1/q} \leqslant \|\pi\| \,.\, \|u_1\|\, \pi_q(v) \leqslant C\, \pi_q(v) \,.\, \|\pi\|.$$

Mais il est clair que $\varphi_{w,\pi} = g \,.\, \varphi_{w_1,\pi}$, donc :

$$\left(\int \|\varphi_{w,\pi}\|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \|g\|_{L^r} \left(\int \|\varphi_{w_1,\pi}\|^q\, d\mu\right)^{1/q} \leqslant C\, \pi_q(v)\, \|\pi\|,$$

ce qui montre que $d_p(u \circ {}^t v) \leqslant C\ \pi_q(v)$.

L'implication b) $\Longrightarrow$ c) est évidente puisque $\pi_q(v) \leqslant N_q(v)$.

Montrons que c) $\Longrightarrow$ a). Soit (ξ_k) une suite de vecteurs de E', telle que $\xi_k = 0$ pour $k > n$. Définissons un opérateur $v \in N(E, \ell^q)$ par $v(x) = (< x, \xi_k >)_{k \in \mathbb{N}}$. Désignons par ℓ^q_n le sous-espace de ℓ^q formé des vecteurs dont les coordonnées d'indice $> n$ sont nulles, et par π_n la projection de ℓ^q sur ℓ^q_n.

On a (en posant $w = u \circ {}^t v$) :

$$\left(\int \|\varphi_{w,\pi_n}\|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \|\pi_n\|\ d_p(w) \leqslant d_p(w) \leqslant C\ N_q(v).$$

D'autre part, on a nécessairement :

$$\varphi_{w,\pi_n}(\omega) = (u(\xi_k)(\omega))_{1 \leqslant k \leqslant n}, \text{ donc :}$$

$$\left(\int \left(\sum_{k=1}^{n} |u(\xi_k)|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \leqslant C\ N_q(v) = C\ \left(\sum_{k=1}^{n} \|\xi_k\|^q\right)^{1/q}.$$

On conclut maintenant par l'application du théorème 8.

<u>Remarque 20</u> : Avec les hypothèses du théorème 19, on peut donner l'énoncé suivant : les conditions suivantes sont équivalentes :

a_1) L'opérateur u admet la factorisation $u = T_g \circ u_1$, avec $g \in L^r(\Omega, \mu)$ et $u_1 \in L(E', L^q(\Omega, \mu))$.

b_1) Pour tout espace quasi-normé séparé par son dual et tout opérateur q-sommant v de E dans F, $u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposé.

c_1) Pour tout $v \in N(E, \ell^q)$, $u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposé.

Cet énoncé se démontre de la même façon que le théorème 19 (voir [15]) en utilisant l'équivalence $a_1) \Longleftrightarrow b_1)$ du théorème 8. Dans toute la suite, à tout énoncé comprenant une constante C correspondra un énoncé sans constante. Pour alléger l'exposé, nous ne donnerons pas ces énoncés.

Remarque 21 : Soient E un elcs à dual quasi-normé et λ une probabilité cylindrique de type p sur E, $0 < p \leqslant \infty$. On peut trouver un espace de probabilité (Ω, μ) et un opérateur linéaire continu u de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$ qui représente λ. Si $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est une suite d'éléments de E', désignons par $(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\lambda)$ la mesure sur $\mathbb{R}^n$ image de λ par l'application linéaire $x \to (<x, \xi_1>, \ldots, <x, \xi_n>)$. On a :

$$\int (\Sigma |u(\xi_i)|^q)^{p/q} d\mu = \int (\Sigma |t_i|^q)^{p/q} d(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\lambda).$$

Supposons que u soit q-cylindriquement de type p. D'après l'égalité ci-dessus, cela se traduit de la façon suivante : il existe une constante C telle que l'on ait, pour toute suite finie $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ d'éléments de E' :

$$\left(\int (\Sigma |t_i|^q)^{p/q} d(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\lambda)\right)^{1/p} \leqslant C \left(\Sigma \|\xi_i\|^q\right)^{1/q}.$$

Il est clair sous cette forme qu'il s'agit là d'une propriété intrinsèque de λ, indépendante de la représentation u. Nous parlerons donc de probabilité cylindrique λ q-cylindriquement de type p, et nous désignerons par $C_{p,q}(\lambda)$ la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée (On voit que $C_{p,q}(\lambda) = C_{p,q}(u)$ pour tout opérateur linéaire u qui représente λ.)

Les résultats précédents se traduisent de la façon suivante :

Proposition 22 : Soient p et q deux nombres réels tels que $0 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, E un elcs à dual quasi-normé (tel que le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si $q < 1$), et λ une probabilité cylindrique sur E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $C_{p,q}(\lambda) \leqslant C$

b) Pour tout espace quasi-normé F séparé par son dual et tout opérateur q-sommant v de E dans F, l'image $v(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur $\sigma(F'', F')$, et :

$\|v(\lambda)\|_p \leqslant C\, \pi_q(v)$. De plus, pour $q > 1$, l'image $v(\lambda)$ est de Radon sur F lui-même.

c) Pour tout opérateur $v \in N_o(E, \ell^q)$, on a :

$$\|v(\lambda)\|_p \leqslant C\, N_q(v).$$

$\lfloor$Rappelons la convention adoptée dans $\lfloor 18 \rfloor$, exposé II, ou dans $\lfloor 28 \rfloor$: si F est un espace quasi-normé séparé par son dual, on définit sur F" une quasi-norme [à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$!] égale à la jauge de l'adhérence dans F" de la quasi-boule unité de F pour la topologie $\sigma(F'',F')$. On définit alors l'ordre p d'une probabilité de Radon ν sur $\sigma(F'',F')$ par :

$$\|\nu\|_p = \left(\int_{F''} \|x\|^p \, d\nu(x)\right)^{1/p},$$

où $\|x\|$ désigne la quasi-norme que nous venons de définir].

<u>Démonstration</u> : Introduisons un espace de probabilité (Ω,μ) et un opérateur linéaire u de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$ qui représente la probabilité cylindrique λ. Considérons les énoncés auxiliaires :

b') Pour tout espace quasi-normé F séparé par son dual et tout opérateur q-sommant v de E dans F, l'opérateur $w = u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposé, et :

$$d_p(w) \leqslant C\, \pi_q(v) .$$

c') Pour tout opérateur $v \in N_o(E,\ell^q)$,, l'opérateur $w = u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposé, et :

$$d_p(w) \leqslant C\, N_q(v).$$

D'après le théorème 19 et la remarque 21, a) est équivalent à b') et à c'). Nous allons donc montrer que c) $\Longrightarrow$ c'), puis que b') $\Longrightarrow$ b), ce qui démontrera le résultat, compte tenu de l'implication évidente b) $\Longrightarrow$ c).

Tout d'abord c) $\Longrightarrow$ c'). En effet, soit $v \in N_o(E,\ell^q)$. Soient d'autre part G un espace quasi-normé de dimension finie et π un opérateur linéaire continu de ℓ^q dans G. Posons $w = u \circ {}^t v$. Il est clair que $\varphi_{w,\pi}(\mu) = \pi(v(\lambda))$ (Car ces deux probabilités sur G ont la même image par toute forme linéaire sur G), donc :

$$\left(\int \|\varphi_{w,\pi}\|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \|\pi(v(\lambda))\|_p \leqslant \|\pi\|\, \|v(\lambda)\|_p \leqslant \|\pi\|\, C\, N_q(v),$$

ce qui prouve que $d_p(w) \leqslant C\, N_q(v)$.

Nous avons donc vu que c) $\Longrightarrow$ c').

Démontrons maintenant b') $\Longrightarrow$ b). Soit N un sous-espace de codimension finie de F", fermé pour $\sigma(F'',F')$. Soit $\tilde{\pi}_N$ la surjection canonique de F" sur F"/N. Munissons F"/N de la quasi-norme quotient de celle de F". Puisque F est dense dans $\sigma(F'',F')$ et que $\tilde{\pi}_N$ est continue pour $\sigma(F'',F')$, la restriction π_N de $\tilde{\pi}_N$ à F est surjective. Posons $\nu_N = \tilde{\pi}_N(v(\lambda))$. On a comme précédemment :

$$\varphi_{w,\pi_N}(\mu) = \nu_N, \text{ donc : } \qquad \|\nu_N\|_p = (\int \|\varphi_{w,\pi_N}\|^p \, d\mu)^{1/p} \leqslant C \; \pi_q(v).$$

Pour montrer que $v(\lambda)$ est de Radon sur $\sigma(F'',F')$, il faut et il suffit d'après le théorème de Prokhorov que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie K compacte pour $\sigma(F'',F')$, telle que l'on ait pour tout sous-espace N de codimension finie de F", fermé pour $\sigma(F'',F')$:

$$\nu_N \; (\complement \, \tilde{\pi}_N(K)) \leqslant \epsilon.$$

Or, les quasi-boules de F" sont compactes pour $\sigma(F'',F')$, et en désignant par B_R la quasi-boule fermée de rayon R :

$$\nu_N \; (\complement \, \tilde{\pi}_N(B_R)) \leqslant \nu_N \; \{y \mid \|y\| \geqslant R\} \leqslant \left(\frac{C \; \pi_q(v)}{R}\right)^p,$$

ce qui prouve que $v(\lambda)$ est de Radon sur $\sigma(F'',F')$.

Pour finir, la fonction $x \to \|x\|$ sur F" est le sup filtrant des fonctions continues $x \to \|\pi_N(x)\|$ lorsque N varie. (pour voir cela, il suffit de remarquer que si $\|x\| > 1$, on peut trouver N tel que $\|\tilde{\pi}_N(x)\| > 1$, ce qui est facile puisque l'ensemble $\{\|x\| \leqslant 1\}$ est compact, donc fermé pour $\sigma(F'',F')$.) Finalement, en utilisant la propriété des mesures de Radon pour les sup filtrants de fonctions s.c.i :

$$\|v(\lambda)\|_p = \lim_N \left(\int \|\tilde{\pi}_N(x)\|^p \, d(v(\lambda))(x)\right)^{1/p} = \lim_N \|\nu_N\|_p \leqslant C \; \pi_q(v),$$

ce qui achève la démonstration de b') $\Longrightarrow$ b). La suppression du bidual lorsque $q > 1$ est démontrée dans [27], exposé 12.

Nous allons maintenant démontrer le résultat essentiel de ce chapitre. Dans la théorie des opérateurs p-sommants, un certain nombre de théorèmes de la forme $\Pi_p(E,F) = \Pi_q(E,F)$ ont été démontrés (par exemple [9] et [26]). Nous allons voir que ces théorèmes sont équivalents à des théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires continus de E' dans les espaces $L^p(\Omega,\mu)$.

Si E est un elcs à dual quasi-normé, et si $p \in]0, +\infty]$, nous dirons qu'une suite (x_n) de vecteurs de E est scalairement ℓ^p si :

$$\sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \Sigma |< x_n, \xi >|^p < +\infty.$$

Nous poserons $M_p((x_n)) = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} (\Sigma |< x_n, \xi >|^p)^{1/p}$.

<u>Théorème 23</u> : Soient p, q, r trois nombres réels tels que $0 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, E un elcs à dual quasi-normé (tel que le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si $p < 1$) et C un nombre réel $\geqslant 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout espace quasi-normé F, et tout opérateur $v \in \Pi_q(E,F)$, $\pi_p(v) \leqslant C\, \pi_q(v)$.

b) Pour tout $v \in N(E,\ell^q)$, $\pi_p(v) \leqslant C\, N_q(v)$.

c) Pour tout espace mesuré (Ω,μ) et tout opérateur linéaire continu u de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$, $C_{p,q}(u) \leqslant C\, \|u\|$.

d) Toute suite (x_n) scalairement ℓ^p sur E peut s'écrire $x_n = \alpha_n y_n$, où (y_n) est une suite scalairement ℓ^q sur E et (α_n) une suite numérique telles que :

$$(\Sigma |\alpha_n|^r)^{1/r} \leqslant 1 \quad ; \quad M_q((y_n)) \leqslant C\, M_p((x_n)).$$

e) Pour tous réels s, t tels que $\frac{1}{p} - \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{t} \geqslant 0$, tout espace quasi-normé F et tout $v \in \Pi_{q,t}(E,F)$,

$$\pi_{p,s}(v) \leqslant C\, \pi_{q,t}(v).$$

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord a) $\Longrightarrow$ b) est évident, et lorsque μ est une probabilité, b) $\Longrightarrow$ c) résulte immédiatement du théorème 19 et de la proposition 18. Supposons maintenant μ quelconque, et montrons b) $\Longrightarrow$ c). Soient

$u \in L(E', L^p(\Omega,\mu))$, et $(x_1,\dots,x_n)$ une suite finie d'éléments de E'. On peut trouver une fonction mesurable $h \geqslant 0$ sur (Ω,μ) telle que $\int h\, d\mu = 1$, et que :

$$|u(x_k)|^p \,.\, \mu \ll h\,\mu = \nu, \qquad k = 1,\dots n.$$

Soit $A = \{h > 0\}$. Considérons l'opérateur w de $L^p(\Omega,\mu)$ dans $L^p(\Omega,\nu)$ défini par :

$$w(f) = \chi_A\, f\, h^{-1/p}.$$

On a $\|w\| \leqslant 1$. D'après le début de la démonstration, puisque ν est une probabilité, on a $C_{p,q}(w \circ u) \leqslant C\,\|w \circ u\| \leqslant C\,\|u\|$, donc :

$$\left(\int \left(\Sigma\, |w(u(x_k))|^q\right)^{p/q} d\nu\right)^{1/p} \leqslant C\,\|u\|\, \left(\Sigma\, \|x_k\|^q\right)^{1/q}.$$

Mais puisque $|u(x_k)|^p \mu$ est absolument continue par rapport à ν, on a $\{|u(x_k)| > 0\} \subset A$, donc :

$$w(u(x_k)) = h^{-1/p}\, u(x_k), \text{ donc :}$$

$$\left(\int \left(\Sigma\, |u(x_k)|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \leqslant C\,\|u\|\, \left(\Sigma\, \|x_k\|^q\right)^{1/q},$$

ce qui prouve b) $\Longrightarrow$ c).

Montrons que c) $\Longrightarrow$ d). Soit (x_n) une suite scalairement ℓ^p sur E. Elle définit un opérateur u de E' dans ℓ^p par :

$$u(\xi) = (< x_n, \xi >)_n, \quad \text{et} \quad \|u\| = M_p((x_n)).$$

D'après c), appliqué à $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mu = \Sigma\, \delta_n$, il existe une suite (α_n) de réels telle que $\Sigma |\alpha_n|^r \leqslant 1$, et :

$$\forall\, \xi \in E', \qquad \left(\Sigma\, \left|< \frac{x_n}{\alpha_n}, \xi >\right|^q\right)^{1/q} \leqslant C\,\|u\| \,.\, \|\xi\|,$$

ce qui démontre d), avec $y_n = \dfrac{x_n}{\alpha_n}$.

Montrons que d) $\Longrightarrow$ e). Soient F un espace quasi-normé, $v \in \Pi_{q,t}(E,F)$, et (x_n) une suite scalairement ℓ^p sur E. D'après d), on peut écrire $x_n = \alpha_n y_n$, avec $\Sigma|\alpha_n|^r \leqslant 1$ et $M_q((y_n)) \leqslant C\, M_p((x_n))$. On a alors, en appliquant l'inégalité de Hölder :

$$(\Sigma \|v(x_n)\|^s)^{1/s} \leqslant (\Sigma|\alpha_n|^r)^{1/r} \cdot (\Sigma\|v(y_n)\|^t)^{1/t}$$

$$\leqslant \pi_{q,t}(v)\, M_q((y_n)) \leqslant C\, \pi_{q,t}(v)\, M_p((x_n)),$$

ce qui démontre d) $\Longrightarrow$ e). Enfin, e) $\Longrightarrow$ a) est trivial, et la démonstration est achevée.

<u>Remarque 24</u> : L'équivalence a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ d) $\Longrightarrow$ e) $\Longrightarrow$ a) ne nécessite jamais l'hypothèse d'approximation. Le seul point délicat est b) $\Longrightarrow$ d). Si (x_n) est une suite scalairement ℓ^p sur E, nous devons montrer que l'opérateur u de E' dans ℓ^p défini par $u(\xi) = (<\xi, x_n>)$ est q-cylindriquement de type p. Mais ici la démonstration est absolument directe. Soit $(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ une suite d'éléments de E' et soit v l'élément de $N_o(E,\ell^q)$ défini par :

$v(x) = (< x, \xi_j >)$. Supposons $M_p((x_n)) \leqslant 1$.

D'après l'hypothèse b), $\pi_p(v) \leqslant C\, N_q(v) = C(\Sigma \|\xi_j\|^q)^{1/q}$. Par conséquent :

$$(\sum_i \|v(x_i)\|^p)^{1/p} \leqslant C(\Sigma \|\xi_j\|^q)^{1/q}, \text{ soit encore :}$$

$$(\sum_i (\sum_j |< x_i, \xi_j >|^q)^{p/q})^{1/p} \leqslant C(\Sigma \|\xi_j\|^q)^{1/q},$$

ce qui signifie que u est q-cylindriquement de type p.

Faisons une autre remarque : soient G un espace de Banach, G' son dual. On peut considérer $\sigma(G',G)$ comme un elcs à dual quasi-normé. Mais si (x_i) est une suite finie d'éléments de E', la quantité $M_p((x_i))$ calculée dans $\sigma(G',G)$ ou dans G' est la même, puisque la boule unité de G est dense dans celle de G'' pour la topologie $\sigma(G'',G')$. Par conséquent, on pourra appliquer le théorème 23 avec E = G' (au lieu de $\sigma(G',G)$) et E' = G. Cette remarque sera utilisée implicitement par la suite.

<u>Corollaire 25</u> : Soient p,q,r trois nombres réels tels que $0 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, et E un espace de Banach tel que pour tout espace quasi-normé

F et tout opérateur $v \in \Pi_q(E,F)$, on ait $\pi_p(v) \leqslant C\ \pi_q(v)$. Pour toute suite (x_n) scalairement ℓ^p sur E, on a :

$$(\Sigma \|x_n\|^r)^{1/r} \leqslant C\ M_p((x_n))$$

(Pour p = 1, cela s'applique en particulier aux séries inconditionnellement convergentes.)

Démonstration ; D'après le théorème 23, on peut écrire $x_n = \alpha_n\, y_n$, $\Sigma|\alpha_n|^r \leqslant 1$, et $M_q((y_n)) \leqslant C\ M_p((x_n))$. Mais on a évidemment pour chaque entier k : $\|y_k\| \leqslant M_q((y_n))$, donc :

$$(\Sigma \|x_n\|^r)^{1/r} \leqslant M_q((y_n))\ (\Sigma\ |\alpha_n|^r)^{1/r} \leqslant C\ M_p((x_n)).$$

Soient E un elcs à dual quasi-normé, et G un sous-espace fermé de E. Le dual G' de G s'identifie au quotient E'/G^o, où $G^o = \{\xi \in E' \mid \forall x \in G, < x, \xi > = 0\}$. On munira G d'une structure d'elcs à dual quasi-normé, en munissant $G' = E'/G^o$ de la quasi-norme quotient de celle de E'. Lorsque E est un espace de Banach et G un sous-espace de E, l'espace G' défini ci-dessus est bien le dual de G, muni de la norme de dual.

Corollaire 26 : Soient p et q deux réels, $0 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, et E un elcs à dual quasi-normé tel que pour tout espace quasi-normé F, et tout opérateur $v \in \Pi_q(E,F)$ on ait :

$$\pi_p(v) \leqslant C\ \pi_q(v).$$

Pour tout sous-espace fermé G de E, tout espace quasi-normé F et tout opérateur $v \in \Pi_q(G,F)$, on a encore :

$$\pi_p(v) \leqslant C\ \pi_q(v).$$

Inversement, supposons qu'il existe une constante C telle que l'on ait pour tout sous-espace de dimension finie G de E, tout espace quasi-normé F et tout opérateur linéaire v de G dans F :

$$\pi_p(v) \leqslant C\ \pi_q(v).$$

La même relation reste alors vraie pour tout opérateur v q-sommant de E dans un espace quasi-normé F.

<u>Démonstration</u> : Soient G un sous-espace fermé de E, $(x_1,\dots,x_n)$ une suite d'éléments de G, et $s \in \,]0, +\infty]$. D'après la définition de G' comme espace quasi-normé, il est clair que :

$$\sup_{\|\xi\|_{E'} \leqslant 1} \left(\Sigma\, |< x_k, \xi >|^s\right)^{1/s} = \sup_{\|\eta\|_{G'} \leqslant 1} \left(\Sigma\, |< x_k, \eta >|^s\right)^{1/s}$$

On peut donc parler de $M_s((x_k))$ sans préciser si les (x_k) sont considérés comme éléments de G ou de E.

D'après le théorème 23, on peut écrire en considérant les (x_k) comme des éléments de E :

$$x_k = \alpha_k\, y_k, \quad \Sigma\, |\alpha_k|^r \leqslant 1, \quad M_q((y_k)) \leqslant C\, M_p((x_k)).$$

On en déduit aussitôt le résultat d'après l'implication d) $\Longrightarrow$ a) du théorème 23, appliquée à l'espace G.

Supposons maintenant que tout sous-espace de dimension finie G de E vérifie l'hypothèse a) du théorème 23 (avec une même constante C). Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une suite finie d'éléments de E, et soit G l'espace de dimension finie engendré par cette suite. D'après l'implication a) $\Longrightarrow$ d) du théorème 23, on peut écrire dans G :

$$x_k = \alpha_k y_k, \quad \Sigma\, |\alpha_k|^r \leqslant 1, \quad M_q((y_k)) \leqslant C\, M_p((x_k)).$$

Mais d'après ce que nous avons remarqué précédemment, cela est vrai également dans E. On conclut alors par l'implication d) $\Longrightarrow$ a) du théorème 23.

Nous venons de voir que les théorèmes de la forme : "pour tout F, $\Pi_p(E,F) = \Pi_q(E,F)$" s'interprètent en termes de théorèmes de factorisation pour les opérateurs de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$. Il y a aussi dans la théorie des opérateurs p-sommants des théorèmes de la forme "pour tout F, $\Pi_p(F,E) = \Pi_q(F,E)$" (par exemple si $E = L^r$, $1 \leqslant r \leqslant 2 \leqslant p \leqslant q < +\infty$, voir [22]). Nous allons voir que ces théorèmes s'interprètent également en termes de théorèmes de factorisation.

Nous utiliserons le lemme suivant, qui est évident :

Lemme 27 : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, $q \in]0,+\infty[$, S_q un sous-espace fermé de $L^q(\Omega,\mu)$, T_h l'opérateur de multiplication par h, $h \in L^q(\Omega,\mu)$ $S_\infty = T_h^{-1}(S_q) \cap L^\infty(\Omega,\mu)$, et j_h l'opérateur induit par T_h sur S_∞. On munit S_∞ de la norme induite par $L^\infty(\Omega,\mu)$. L'opérateur j_h est q-sommant de S_∞ dans S_q, avec :

$$\pi_q(j_h) \leqslant \left(\int |h|^q \, d\mu\right)^{1/q}.$$

Faisons deux remarques à propos de la définition des suites scalairement ℓ^p. Soient E un espace de Banach, F un sous-espace fermé de E, et $(x_1,\ldots,x_n)$ un système de vecteurs de F. On a d'après le théorème de Hahn-Banach :

$$\sup_{\substack{\xi \in F' \\ \|\xi\| \leqslant 1}} \left(\Sigma\, |< x_k, \xi >|^p\right)^{1/p} = \sup_{\substack{\eta \in E' \\ \|\eta\| \leqslant 1}} \left(\Sigma\, |< x_k, \eta >|^p\right)^{1/p}.$$

Si maintenant E est le dual d'un espace de Banach G, la boule unité de G est dense dans celle de E' pour la topologie $\sigma(E',E)$, donc :

$$\sup_{\substack{\eta \in E' \\ \|\eta\| \leqslant 1}} \left(\Sigma\, |< x_k, \eta >|^p\right)^{1/p} = \sup_{\substack{\xi \in G \\ \|\xi\| \leqslant 1}} \left(\Sigma\, |< x_k, \xi >|^p\right)^{1/p}$$

Ces deux remarques seront utilisées dans la démonstration du théorème suivant:

Théorème 28 : Soient p et q deux nombres réels tels que $1 \leq p \leqslant q < +\infty$, et E un espace quasi-normé. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout espace de Banach F et tout opérateur $v \in \Pi_q(F,E)$:

$$\pi_p(v) \leqslant C\, \pi_q(v).$$

b) Pour tout espace mesuré (Ω,μ) et tout sous-espace fermé S_q de $L^q(\Omega,\mu)$, tout opérateur linéaire continu u de S_q dans E admet la factorisation :

$$S_q \xrightarrow{j_g} S_p \longrightarrow E, \text{ avec plus précisément : } C^*_{p,q}(u) \leqslant C.\|u\|$$

<u>Démonstration</u> : Démontrons b) $\Longrightarrow$ a). Soient F un espace de Banach et $v \in \Pi_q(F,E)$. D'après [21], v admet la factorisation :

$$\begin{array}{ccccccc} & & L^\infty(\Omega,\mu) & \xrightarrow{j} & L^q(\Omega,\mu) & & \\ & & \cup & & \cup & & \\ F & \xrightarrow{v_1} & S_\infty & \xrightarrow{j_1} & S_q & \xrightarrow{u} & E \end{array}$$

où (Ω,μ) est un espace de probabilité, S_∞ et S_q respectivement des sous-espaces fermés de $L^\infty(\Omega,\mu)$ et $L^q(\Omega,\mu)$, j l'injection canonique de $L^\infty(\Omega,\mu)$ dans $L^q(\Omega,\mu)$, j_1 l'opérateur induit par j sur S_∞, $\|v_1\| \leqslant 1$ et $\|u\| \leqslant \pi_q(v)$.

D'après b), on peut écrire $u = u_1 \circ j_g$, avec $\int |g|^r \, d\mu \leqslant 1$ $(\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r})$ et $\|u_1\| \leqslant C \|u\| \leqslant C \pi_q(v)$.

D'après le lemme 27, $j_g \circ j_1 = j_g$ est p-sommant, avec :

$$\pi_p(j_g) \leqslant (\int |g|^p \, d\mu)^{1/p} \leqslant (\int |g|^r \, d\mu)^{1/r} \leqslant 1, \text{ donc :}$$

$$\pi_p(v) = \pi_p\,(u_1 \circ j_g \circ v_1) \leqslant \|u_1\|\ \pi_p(j_g)\ \|v_1\| \leqslant C\ \pi_q(v).$$

Démontrons maintenant a) $\Longrightarrow$ b). Soient (Ω,μ) un espace mesuré, S_q un sous-espace fermé de $L^q(\Omega,\mu)$, $u \in L(S_q,E)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ une suite finie d'éléments de S_q. Posons :

$$h = (\Sigma\, |f_i|^p)^{1/p}, \quad \text{et} \quad S_\infty = T_h^{-1}(S_q) \cap L^\infty(\Omega,\mu).$$

Posons $k_i = f_i/h$. On a $|k_i| \leqslant 1$, donc $k_i \in S_\infty$. D'après le lemme 27, $u \circ j_h$ est q-sommant, avec :

$$\pi_q(u \circ j_h) \leqslant \|u\|\ \pi_q(j_h) \leqslant \|u\|\ \|h\|_{L^q}$$

Donc d'après a) :

$$\pi_p(u \circ j_h) \leqslant C\ \|u\|\ \|h\|_{L^q}\ .$$

Posons $K = C\ \|u\|\ \|h\|_{L^q}$. On a, en utilisant les remarques qui précèdent le théorème 28 :

$$(\Sigma \|u(f_i)\|^p)^{1/p} = (\Sigma \|u \circ j_h(k_i)\|^p)^{1/p} \leqslant K \sup_{\substack{\varphi \in L^1 \\ \|\varphi\| \leqslant 1}} (\Sigma \mid \int k_i \, \varphi \, d\mu|^p)^{1/p}$$

$$\leqslant K \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} \int (\Sigma \, |k_i|^p)^{1/p} \, |\varphi| \, d\mu.$$

Mais $(\Sigma \, |k_i|^p)^{1/p} \leqslant 1$ (car nous avons fait la convention $\frac{0}{0} = 0$), d'où finalement :

$$(\Sigma \|u(f_i)\|^p)^{1/p} \leqslant C \, \|u\| \, \|h\|_{L^q} = C \, \|u\| \, (\int (\Sigma \, |f_i|^p)^{q/p} \, d\mu)^{1/q},$$

ce qui achève la démonstration d'après le corollaire 11.

***

IV. Théorèmes de factorisation et opérateurs 0-sommants

Dans ce chapitre, nous allons généraliser les résultats du chapitre III (essentiellement le théorème 23) dans le cas $p = 0$. Nous commencerons donc par rappeler les définitions relatives aux opérateurs 0-sommants.

Soient Φ une fonction de Young, $\alpha \in]0, +\infty[$ et μ une mesure de Radon sur un espace quasi-normé. Nous poserons :

$$\Phi_\alpha(\mu) = \inf \left\{ C \;\middle|\; \int \Phi\left(\frac{\|x\|}{C}\right) d\mu \leqslant \alpha \right\}.$$

Lorsque $\Phi(t) = t^p$, $0 < p < +\infty$, nous aurons simplement :

$$\Phi_\alpha(\mu) = \alpha^{-1/p} \|\mu\|_p$$

Si maintenant λ est une probabilité cylindrique sur un elcs à dual quasi-normé E, nous poserons :

$$\Phi^*_\alpha(\lambda) = \sup_{\|\xi\|_{E'} \leqslant 1} \Phi_\alpha(\xi(\lambda)).$$

Nous désignerons par J la fonction de Young définie par $J(t) = 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, et $J(t) = 1$ pour $t > 1$. Les notations $J_\alpha(\mu)$, $J^*_\alpha(\lambda)$ correspondantes coïncident alors avec celles de L. Schwartz [27]. (On pourra également remarquer que l'espace d'Orlicz $L^J(\Omega, \mu)$ coïncide algébriquement et topologiquement avec $L^0(\Omega, \mu)$.)

Rappelons la définition des opérateurs 0-sommants (introduits dans [9]. Ce sont aussi les opérateurs approximativement 0-radonifiants - à valeurs dans un bidual $\sigma(G'', G')$ - de [27]).

Soient E un elcs à dual quasi-normé, F un espace quasi-normé, et u un opérateur linéaire de E dans F. Nous dirons que u est 0-sommant si pour tout $\beta \in]0,1[$, il existe $\alpha \in]0,1[$ et une constante C tels que pour toute probabilité λ à support fini sur E, on ait :

$$J_\beta(u(\lambda)) \leqslant C\, J^*_\alpha(\lambda).$$

On remarquera que contrairement au cas des opérateurs p-sommants, on ne peut pas a priori caractériser un opérateur 0-sommant par un seul nombre qui serait l'analogue de $\pi_p(u)$.

Soient maintenant E un elcs à dual quasi-normé, Φ une fonction de Young, F un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire de E dans F. Nous dirons que u est $(\Phi,0)$-sommant de E dans F s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E, et pour toute suite $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ de nombres réels $\geqslant 0$, telle que $\Sigma\,\lambda_i \neq 0$, on ait :

$$\Sigma\,\lambda_i \leqslant 2 \sup_{\|\xi\|_{E'} \leqslant 1} \Sigma\,\lambda_i\, \Phi\left(\frac{C\,|<x_i,\xi>|}{\|u(x_i)\|}\right)$$

(en convenant que $\frac{0}{0} = 0$).

Nous noterons $\pi_\Phi(u)$ la borne inférieure des constantes C telles que la propriété ci-dessus soit réalisée (contrairement au cas des opérateurs p-sommants, on ne peut pas prendre $C = \pi_\Phi(u)$ en général, mais seulement $C = \pi_\Phi(u) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Cette difficulté disparaît si la fonction Φ est continue).

Notre définition des opérateurs $(\Phi,0)$-sommants est un peu différente de celle de P.Assouad [1], mais elle est équivalente.

Considérons la fonction de Young J définie précédemment. Nous appellerons simplement J-sommants les opérateurs (J,0)-sommants. On peut imaginer qu'il y ait un certain rapport entre les notions d'opérateur J-sommant et 0-sommant, qui font toutes deux intervenir la fonction J. Nous allons effectivement voir que ces deux notions coïncident. L'intérêt de cette coïncidence est que le fait pour un opérateur u d'être 0-sommant sera caractérisé par un nombre unique, à savoir $\pi_J(u)$, ce qui n'était pas évident a priori comme nous l'avons dit.

<u>Proposition 29</u> : Soient E un elcs à dual quasi-normé, F un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire de E dans F.

a) Si u est 0-sommant, il est J-sommant.

b) Si u est $(\Phi,0)$-sommant, on a pour toute probabilité λ à support fini sur E et pour tout $\alpha \in \,]0,1[$:

$$J_\alpha(u(\lambda)) \leqslant \pi_\Phi(u)\ \Phi^*_{\alpha/2}(\lambda).$$

En particulier, un opérateur J-sommant est 0-sommant, et d'après a), il y a identité entre les opérateurs J-sommants et 0-sommants.

Démonstration : Le point a) est implicitement démontré dans [18], exposé IX. D'après le théorème (IX 3,26), l'opérateur u étant 0-sommant, sera p-sommant pour tout p tel que $-1 < p < 0$. (La définition d'un opérateur p-sommant pour $p < 0$ est formellement identique : il existe une constante finie $\pi_p(u)$ telle que l'on ait pour toute suite $(x_1,\ldots x_n)$ d'éléments de E :

$$(\Sigma \|u(x_i)\|^p)^{1/p} \leqslant \pi_p(u) \sup_{\|\xi\|_{E'} \leqslant 1} (\Sigma |< x_i, \xi >|^p)^{1/p} .)$$

Il existe alors d'après le même théorème (IX, 3, 26) une probabilité de Radon ν sur B^* (adhérence dans E^* de la quasi-boule unité de E' pour la topologie $\sigma(E^*,E)$) telle que l'on ait pour tout $\gamma \in]0,1[$:

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant \pi_p(u)\ (1-\gamma)^{1/p}\ J_\gamma(d\nu(\xi),\ |< x,\xi >|).$$

Choisissons $\gamma = \frac{1}{2}$, et soit $\varepsilon > 0$. Nous aurons d'après l'inégalité ci-dessus :

$$\forall x \in E \quad \int J\left(\frac{C\ |< x,\xi >|}{\|u(x)\|}\right) d\nu(\xi) > \frac{1}{2} \quad , \text{ avec } C = (1+\varepsilon)\ \pi_p(u)\ .\ 2^{-1/p}.$$

Soient alors $(x_1,\ldots,x_n)$ une suite de vecteurs de E et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ une suite de réels $\geqslant 0$, non tous nuls. Nous aurons :

$$\begin{aligned} \Sigma \lambda_i &< 2 \int \Sigma \lambda_i\ J\left(\frac{C\ |< x_i,\xi >|}{\|u(x_i)\|}\right) d\nu(\xi) \\ &\leqslant 2 \sup_{\xi \in B^*} \Sigma \lambda_i\ J\left(\frac{C\ |< x_i,\xi >|}{\|u(x_i)\|}\right) \end{aligned}$$

Pour finir, il faut se ramener de B^* à la quasi-boule unité de E' par un argument de densité pour $\sigma(E^*,E)$. La fonction J n'étant pas continue, nous devrons remplacer C par $C + \varepsilon$, et la quantité précédente sera majorée par :

$$2 \sup_{\|\xi\|_{E'} \leqslant 1} \Sigma \lambda_i\ J\left(\frac{(C+\varepsilon)\ |< x_i,\xi >|}{\|u(x_i)\|}\right) ,$$

ce qui achève la démonstration du point a).

Passons maintenant au point b). Soient u un opérateur linéaire $(\Phi,0)$-sommant de E dans F, et λ une probabilité à support fini sur E. Posons $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \, \delta_{x_i}$, avec $x_i \in E$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\Sigma \lambda_i = 1$. Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $t \geqslant 0$ tel que $t < J_\alpha(u(\lambda))$. Nous aurons :

$$\sum_{i \in I_t} \lambda_i > \alpha, \quad \text{en posant } I_t = \{ i \mid \|u(x_i)\| > t \} .$$

Appliquons la définition des opérateurs $(\Phi,0)$-sommants aux suites $(x_i)_{i \in I_t}$ et $(\lambda_i)_{i \in I_t}$:

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in I_t} \lambda_i \leqslant \sup_{\|\xi\|_{E'} \leqslant 1} \sum_{i \in I_t} \lambda_i \, \Phi\left(\frac{C \, |< x_i, \xi >|}{\|u(x_i)\|} \right)$$

(où C est un réel $> \pi_\Phi(u)$.)

On en déduit :

$$\sup_{\|\xi\|_{E'} \leqslant 1} \sum_{i \in I} \lambda_i \, \Phi\left(\frac{C \, |< x_i, \xi >|}{t} \right) \geqslant \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \sum_{i \in I_t} \lambda_i \, \Phi\left(\frac{C \, |< x_i, \xi >|}{t} \right)$$

$$\geqslant \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \sum_{i \in I_t} \lambda_i \, \Phi\left(\frac{C \, |< x_i, \xi >|}{\|u(x_i)\|} \right) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i \in I_t} \lambda_i > \frac{\alpha}{2} .$$

Autrement dit, $t < J_\alpha(u(\lambda))$ et $\pi_\Phi(u) < C$ impliquent $\frac{t}{C} < \Phi^*_{\alpha/2}(\lambda)$. On a donc bien :

$$J_\alpha(u(\lambda)) \leqslant \pi_\Phi(u) \; \Phi^*_{\alpha/2}(\lambda).$$

Après ces préliminaires, nous allons entrer dans le vif du sujet de ce chapitre, c'est-à-dire la généralisation des résultats du chapitre III dans le cas p = 0. Nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 30</u> : Soient $\Omega = \mathbb{N}$, μ une probabilité sur $\mathbb{N}$, E un elcs à dual quasi-normé, (ξ_n) une suite d'éléments de la quasi-boule unité de E', et Φ une fonction de Young telle que $B_\Phi(0+) = 0$. Si v désigne l'opérateur de E dans $L^\Phi(\Omega,\mu)$ défini par $v(x) = (< x, \xi_n >)$, on a :

$$\pi_\Phi(v) \leqslant 1.$$

Démonstration : Posons $\mu = \Sigma\, \alpha_n\, \delta_n$, et soit $a > 1$. Nous aurons pour tout $x \in E$:

$$1 < \int \Phi\left(\frac{a\, v(x)}{\|v(x)\|}\right) d\mu = \Sigma\, \alpha_n\, \Phi\left(\frac{a\,|< x, \xi_n >|}{\|v(x)\|}\right).$$

Soient $(x_1, \ldots, x_m)$ une suite d'éléments de E et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ une suite de réels $\geqslant 0$, $\Sigma \lambda_j \neq 0$. Nous aurons :

$$\Sigma\, \lambda_j < \sum_j \lambda_j \sum_n \alpha_n\, \Phi\left(\frac{a\,|< x_j, \xi_n >|}{\|v(x_j)\|}\right)$$

$$= \sum_n \alpha_n \left(\sum_j \lambda_j\, \Phi\left(\frac{a\,|< x_j, \xi_n >|}{\|v(x_j)\|}\right)\right) \leqslant \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \sum_j \lambda_j\, \Phi\left(\frac{a\,|< x_j, \xi >|}{\|v(x_j)\|}\right)$$

ce qui démontre le lemme.

Si (Ω, μ) est un espace de probabilité, F un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire de F dans $L^0(\Omega, \mu)$, nous poserons :

$$J_\varepsilon(u) = J_\varepsilon\,(u(B)), \quad \text{B étant la quasi-boule unité de F.}$$

Théorème 31 : Soient E un elcs à dual quasi-normé, tel que le couple (E, E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, et Φ une fonction de Young telle que $B_\Phi(0+) = 0$. On suppose qu'il existe une constante C telle que pour tout espace quasi-normé F et pour tout opérateur $v \in \Pi_\Phi(E, F)$, on ait :

$$\pi_J(v) \leqslant C\, \pi_\Phi(v).$$

Alors, pour tout espace de probabilité (Ω, μ), tout opérateur linéaire continu u de E' dans $L^0(\Omega, \mu)$ et tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe une partie mesurable Ω_ε de Ω telle que $\mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leqslant 2\,\varepsilon$ et que :

$$\|\xi\|_{E'} \leqslant 1 \Longrightarrow \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi\left(\frac{|u(\xi)|}{K_\varepsilon}\right) d\mu \leqslant 2, \qquad \text{où } K_\varepsilon = C\, J_{\varepsilon/2}(u).$$

Démonstration : Soient (α_n) une suite de réels $\geqslant 0$, telle que $\Sigma\, \alpha_n = 1$, telle qu'un nombre fini d'entre eux seulement soient non nuls, et (ξ_n) une suite d'éléments de la quasi-boule unité de E'. Considérons la probabilité $\nu = \Sigma\, \alpha_n\, \delta_n$ sur $\mathbb{N}$, et l'opérateur linéaire v de E dans $L^\Phi(\mathbb{N}, \nu)$ défini par :

$$v(x) = (< x, \xi_n >).$$

Soient d'autre part (Ω,μ) un espace de probabilité, $u \in L(E', L^0(\Omega,\mu))$ et $\varepsilon \in]0,1[$. L'opérateur u définit une probabilité cylindrique λ sur E, et :

$$J^*_\alpha(\lambda) = J_\alpha(u) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in]0,1[.$$

Puisque le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, il existe un filtre (λ_j) de probabilités à support fini sur E, tel que (λ_j) converge cylindriquement vers λ, et que :

$$\forall j, \qquad J^*_\alpha(\lambda_j) \leqslant J^*_\alpha(\lambda), \quad \text{pour tout } \alpha \in]0,1[\quad \text{(voir [27] exposé 5).}$$

D'après le lemme 30, on a $\pi_\Phi(v) \leqslant 1$, donc par hypothèse $\pi_J(v) \leqslant C$. On en déduit d'après la proposition 29 :

$$\forall j, \qquad J_\varepsilon(v(\lambda_j)) \leqslant C\ J^*_{\varepsilon/2}(\lambda_j) \leqslant C\ J_{\varepsilon/2}(u) = K_\varepsilon \ .$$

D'autre part, $(v(\lambda_j))$ converge cylindriquement vers $v(\lambda)$. Mais en fait $L^\Phi(\mathbb{N},\nu)$ est de dimension finie, donc $(v(\lambda_j))$ converge étroitement vers $v(\lambda)$, et puisque J_ε est sci pour la topologie étroite ([27], exposé 4) :

$$J_\varepsilon(v(\lambda)) \leqslant K_\varepsilon.$$

On voit facilement que $v(\lambda)$ est l'image de μ par l'application $\omega \to (u(\xi_n)(\omega))_n$, et la relation ci-dessus s'écrit alors :

$$\mu\ \{\ \omega\ |\ \|(u(\xi_n))\| > K_\varepsilon\ \} \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire aussi :

$$\mu\ \{\ \omega\ |\ \Sigma\ \alpha_n\ \Phi(\frac{|u(\xi_n)(\omega)|}{K_\varepsilon}) \geqslant 1\ \} \leqslant \varepsilon\ .$$

Considérons l'ensemble C des fonctions mesurables sur Ω de la forme $\Sigma\ \alpha_n\ \Phi\ (\frac{|u(\xi_n)(\omega)|}{K_\varepsilon})$, avec $\Sigma\ \alpha_n = 1$, $\|\xi_n\| \leqslant 1$. L'ensemble C est convexe, formé de fonctions positives, et $J_\varepsilon(C) \leqslant 1$ d'après la relation ci-dessus. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 13 pour achever la démonstration.

Le théorème 31 admet une réciproque :

Proposition 32 : Soient E un elcs à dual quasi-normé, et Φ une fonction de Young telle que $B_\Phi(0+) = 0$. On suppose que pour tout $\varepsilon \in \left]0,1\right[$, il existe une constante C_ε et $\alpha_\varepsilon \in \left]0,1\right[$ tels que pour tout espace de probabilité (Ω,μ), tout opérateur linéaire continu u de E' dans $L^0(\Omega,\mu)$, il existe une partie mesurable Ω_ε de Ω telle que $\mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leqslant 2\,\varepsilon$, et que :

$$\|\xi\|_{E'} \leqslant 1 \Rightarrow \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi\left(\frac{|u(\xi)|}{K_\varepsilon}\right) d\mu \leqslant 1, \quad \text{où } K_\varepsilon = C_\varepsilon\, J_{\alpha_\varepsilon}(u).$$

Pour tout $\varepsilon \in \left]0,1/3\right[$, il existe une constante D_ε, ne dépendant que de ε et de Φ, telle que pour tout espace quasi-normé F, tout opérateur linéaire v de E dans F et toute probabilité λ à support fini sur E, on ait :

$$J_{3\varepsilon}\,(v(\lambda)) \leqslant \pi_\Phi(v)\; D_\varepsilon\; C_\varepsilon\; J^*_{\alpha_\varepsilon}(\lambda).$$

Autrement dit, tout opérateur $(\Phi,0)$-sommant de E dans F est 0-sommant.

Démonstration : Soit $\varepsilon \in \left]0,1\right[$ donné. Puisque $B_\Phi(0+) = 0$, on peut trouver (cf. démonstration de la proposition 12) un réel $c > 0$ tel que :

$$\forall\, x \geqslant 0 \qquad \Phi(c\,x) \leqslant \Phi(c) + B_\Phi(c)\;\Phi\left(\frac{x}{c}\right)$$

et :

$$\Phi(c) + B_\Phi(c) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Soit $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i\, \delta_{x_i}$ une probabilité à support fini sur E, telle que $J^*_{\alpha_\varepsilon}(\lambda) \leqslant 1$. Considérons l'opérateur u de E' dans $L^0(E,\lambda)$ défini par :

$$u(\xi) = \{\, x \to \langle x, \xi \rangle \,\}.$$

Par hypothèse, il existe un sous-ensemble I_0 de I tel que :

$$\sum_{j \in I_0} \lambda_j \geqslant 1 - 2\,\varepsilon \quad ; \quad \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \sum_{j \in I_0} \lambda_j\;\Phi\left(\frac{|\langle x_j, \xi\rangle|}{C_\varepsilon}\right) \leqslant 1.$$

Alors, d'après le choix de c, on a pour $\|\xi\| \leqslant 1$:

$$\sum_{j \in I_0} \lambda_j\;\Phi\left(\frac{c^2\;|\langle x_j,\xi\rangle|}{C_\varepsilon}\right) \leqslant \Phi(c)\,.\left(\sum_{j \in I_0} \lambda_j\right) + B_\Phi(c)\left(\sum_{j \in I_0} \lambda_j\;\Phi\left(\frac{|\langle x_j,\xi\rangle|}{C_\varepsilon}\right)\right)$$

$$\leqslant \Phi(c) + B_\Phi(c) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Posons $\beta = \sum_{j \in I_o} \lambda_j$, $\lambda' = \sum_{j \in I_o} \lambda_j \, \delta_{x_j} + (1 - \beta)\delta_o$, et $D_\varepsilon = 1/c^2$. L'inégalité précédente peut encore s'écrire :

$$\sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \int \Phi\left(\frac{|< x, \xi >|}{C_\varepsilon \; D_\varepsilon}\right) d\lambda'(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{, soit :}$$

$$\Phi^*_{\varepsilon/2}(\lambda') \leqslant C_\varepsilon \; D_\varepsilon .$$

On en déduit d'après la proposition 29 b) :

$$J_\varepsilon \; (v(\lambda')) \leqslant \pi_\Phi(v) \; C_\varepsilon \; D_\varepsilon$$

Soit encore en posant $M = \pi_\Phi(v) \; C_\varepsilon \; D_\varepsilon$:

$$\sum_{j \in I_o} \lambda_j \; J \left(\frac{\|v(x_j)\|}{M}\right) \leqslant \varepsilon .$$

On en déduit :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \; J \left(\frac{\|v(x_j)\|}{M}\right) \leqslant \sum_{i \notin I_o} \lambda_i + 2\varepsilon \leqslant 3 \; \varepsilon ,$$

soit encore $J_{3\varepsilon}(v(\lambda)) \leqslant M$, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque 33</u> : Les énoncés du théorème 31 et de la proposition 32 sont des énoncés "avec constantes". On peut donner des énoncés sans constantes et se ramener aux énoncés avec constantes en appliquant des théorèmes généraux. Considérons d'abord le cas de la proposition 32. Soient E un elcs à dual quasi-normé et Φ une fonction de Young telle que $B_\Phi(0+) = 0$. Supposons que pour tout espace de probabilité (Ω, μ) et pour tout opérateur linéaire u continu de E' dans $L^o(\Omega, \mu)$, il existe pour tout $\varepsilon \in \,]0,1[$ une constante K_ε (dépendant de u) et une partie mesurable Ω_ε de Ω, telles que :

$$\mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leqslant 2 \; \varepsilon, \quad \text{et} \quad \|\xi\|_{E'} \leqslant 1 \Longrightarrow \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi\left(\frac{|u(\xi)|}{K_\varepsilon}\right) d\mu \leqslant 1.$$

Nous allons montrer qu'il existe α_ε et C_ε tels que la propriété de la proposition 32 soit réalisée.

Si F est un espace quasi-normé, désignons par $L_{\Phi}(F, L^{O}(\Omega,\mu))$ l'espace des opérateurs linéaires u continus de F dans $L^{O}(\Omega,\mu)$, tels que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe une partie mesurable Ω_{ε} de Ω et une constante K_{ε} telles que :

$$\mu(\Omega - \Omega_{\varepsilon}) \leqslant 2\varepsilon, \quad \text{et} \quad \|x\|_F \leqslant 1 \Longrightarrow \int_{\Omega_{\varepsilon}} \Phi\left(\frac{|u(x)|}{K_{\varepsilon}}\right) d\mu \leqslant 1.$$

On peut munir $L_{\Phi}(F, L^{O}(\Omega,\mu))$ d'une topologie d'evt métrisable dont un système fondamental de voisinages de zéro est constitué par les ensembles :

$$V_{\varepsilon,c} = \left\{ u \;\middle|\; \exists\, \Omega_{\varepsilon},\ \mu(\Omega - \Omega_{\varepsilon}) \leqslant 2\,\varepsilon \quad \text{et} \quad \|x\| \leqslant 1 \Rightarrow \int_{\Omega_{\varepsilon}} \Phi\left(\frac{|u(x)|}{c}\right) d\mu \leqslant 1 \right\}$$

On vérifie assez facilement que $L_{\Phi}(F, L^{O}(\Omega,\mu))$, muni de cette topologie, est complet. Or, l'hypothèse que nous avons faite ci-dessus signifie : $L_{\Phi}(E', L^{O}(\Omega,\mu)) = L(E', L^{O}(\Omega,\mu))$. D'après le théorème du graphe fermé, l'application identique est continue de $L(E', L^{O}(\Omega,\mu))$ dans $L_{\Phi}(E',L^{O}(\Omega,\mu))$, donc :

$$\forall\, \varepsilon \in]0,1[, \quad \exists\, \alpha_{\varepsilon} \in]0,1[\quad \text{et} \quad \exists\, a_{\varepsilon} > 0 \quad \text{tels que :}$$

$$J_{\alpha_{\varepsilon}}(u) \leqslant a_{\varepsilon} \Longrightarrow u \in V_{\varepsilon,1} \quad , \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\exists\, \Omega_{\varepsilon} \subset \Omega, \quad \mu(\Omega - \Omega_{\varepsilon}) \leqslant 2\,\varepsilon, \qquad \int_{\Omega_{\varepsilon}} \Phi(|u(\xi)|)\, d\mu \leqslant 1 \quad \text{lorsque } \|\xi\| \leqslant 1.$$

On en déduit par homothétie sur u :

$$\forall\, u, \qquad \Omega_{\varepsilon} \subset \Omega, \qquad \mu(\Omega - \Omega_{\varepsilon}) \leqslant 2\,\varepsilon, \int_{\Omega_{\varepsilon}} \Phi\left(\frac{|u(\xi)|}{\frac{1}{a_{\varepsilon}} J_{\alpha_{\varepsilon}}(u)}\right) d\mu \leqslant 1.$$

Nous n'avons pas exactement démontré le résultat voulu, puisque a_{ε} et α_{ε} dépendent a priori de l'espace de probabilité (Ω,μ). Mais il n'est pas difficile de voir que l'on peut construire un espace de probabilité $(\overline{\Omega},\overline{\mu})$ suffisamment "gros" pour que toute application linéaire u de E' dans un espace $L^{O}(\Omega,\mu)$ soit isonome à une $\overline{u} \in L(E', L^{O}(\overline{\Omega},\overline{\mu}))$. Il suffit donc de démontrer le résultat pour $(\overline{\Omega},\overline{\mu})$, ce que nous avons fait. (On peut décrire $(\overline{\Omega},\overline{\mu})$ de la façon suivante : pour toute probabilité cylindrique λ sur E, il existe un espace compact Ω_λ, une probabilité μ_λ sur Ω_λ et une application linéaire $\mu_\lambda \in L(E', L^o(\Omega_\lambda, \mu_\lambda))$ qui représente λ ([27], exposé 6). Posons :

$$\overline{\Omega} = \prod_{\lambda \in \check{\mathcal{P}}(E)} \Omega_\lambda \quad ; \quad \overline{\mu} = \bigotimes_{\lambda \in \check{\mathcal{P}}(E)} \mu_\lambda$$

où $\check{\mathcal{P}}(E)$ désigne l'ensemble des probabilités cylindriques sur E.

Soit π_λ la projection de $\overline{\Omega}$ sur Ω_λ. Posons si $\xi \in E'$:

$$\overline{u}_\lambda(\xi) = u_\lambda(\xi) \circ \pi_\lambda \in L^o(\overline{\Omega},\overline{\mu}).$$

On voit que $\overline{u}_\lambda$ représente λ. Maintenant, si v est un opérateur linéaire de E' dans un espace $L^o(\Omega,\mu)$, v représente une probabilité cylindrique λ sur E, donc v est isonome à $\overline{u}_\lambda$.

Considérons maintenant le cas du théorème 31. Soient E un elcs à dual quasi-normé, et Φ une fonction de Young telle que $B_\Phi(0+) = 0$. Supposons que pour tout espace quasi-normé F, tout opérateur $(\Phi,0)$-sommant de E dans F soit J-sommant. Nous devons montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout F et tout $v \in \Pi_\Phi(E,F)$, on ait :

$$\pi_J(v) \leqslant C\ \pi_\Phi(v).$$

Supposons pour simplifier $\Phi(t) = t^p$, $0 < p < +\infty$. Supposons que le résultat soit faux. On peut alors trouver pour tout entier n un espace quasi-normé F_n et un opérateur p-sommant v_n de E dans F_n tel que :

$$\pi_p(v_n) \leqslant 1 \quad ; \quad \pi_J(v_n) \geqslant 4^n.$$

D'après Pietsch [21] , l'opérateur v_n admet la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[drr, "\bar{v}_n"'] & C(K) \arrow[r] & L^p(K,\mu_n) \\ & & S_n \arrow[u, hook] \arrow[r, "w_n"'] & F_n \end{tikzcd}$$

où S_n est un sous-espace fermé de $L^p(K,\mu_n)$, donc un espace p-normé, et où $\|w_n\| \leqslant 1$, $\pi_p(\bar{v}_n) \leqslant \pi_p(v_n) \leqslant 1$. On a d'autre part : $\pi_J(v_n) \leqslant \|w_n\|\ \pi_J(\bar{v}_n)$, donc :

$$\pi_p(\bar{v}_n) \leqslant 1 \quad ; \quad \pi_J(\bar{v}_n) \geqslant 4^n.$$

Considérons l'espace $\ell^p((S_n))$ formé des suites (x_n) telles que $\Sigma \|x_n\|^p < +\infty$, et définissons un opérateur $\bar{v}$ de E dans $\ell^p((S_n))$ par :

$$\bar{v}(x) = (\frac{1}{2^n}\ \bar{v}_n(x)).$$

On vérifie immédiatement que $\bar{v}$ est p-sommant. On doit donc avoir par hypothèse $\pi_J(\bar{v}) < +\infty$. Mais cela est impossible. En effet, en désignant par ρ_n la projection naturelle de $\ell^p((S_n))$ sur S_n, on a :

$$\rho_n \circ \bar{v} = \frac{1}{2^n}\,\bar{v}_n \quad \text{, donc :}$$

$$2^n \leqslant \pi_J(\frac{1}{2^n}\,\bar{v}_n) \leqslant \|\rho_n\|\ \pi_J(\bar{v}) = \pi_J(\bar{v})$$

ce qui démontre le résultat.

Dans le cas d'une fonction de Young Φ telle que $B_\Phi(0+) = 0$, on peut adapter la démonstration précédente, avec quelques difficultés techniques supplémentaires.

<u>Corollaire 34</u> : Soient E un elcs à dual quasi-normé, tel que le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, et Φ une fonction de Young telle que $B_\Phi(0+) = 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout espace quasi-normé F, tout opérateur linéaire $(\Phi,0)$-sommant de E dans F est 0-sommant.

b) Pour tout espace de probabilité (Ω, μ), tout opérateur linéaire continu u de E' dans $L^{o}(\Omega, \mu)$ se factorise par $L^{\Phi}(\Omega, \mu)$ et la multiplication par une fonction mesurable.

<u>Démonstration</u> : Montrons que a) $\Longrightarrow$ b). D'après la remarque 33, on peut se ramener à un énoncé "avec constantes". On peut alors appliquer le théorème 31 puis la proposition 12.

Inversement démontrons que b) $\Longrightarrow$ a). D'après la proposition 12, l'hypothèse b) implique que tout opérateur linéaire continu u de E' dans $L^{o}(\Omega, \mu)$ appartient à l'espace $L_{\Phi}(E', L^{o}(\Omega, \mu))$ défini dans la remarque 33. D'après cette remarque, les hypothèses de la proposition 32 sont satisfaites. On achève donc la démonstration en appliquant la proposition 32.

* * *

V. Une généralisation vectorielle : les opérateurs (p,G)-sommants

Les théorèmes de factorisation démontrés dans le premier chapitre sont valables pour des opérateurs linéaires d'un espace quasi-normé E dans un espace $L^p(\Omega,\mu,G)$, où G est également un espace quasi-normé. Lorsque $G = \mathbb{R}$, nous avons montré au chapitre III que les théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ correspondent à des théorèmes sur les opérateurs p-sommants de E dans un espace quasi-normé F. Dans ce chapitre, nous introduirons une nouvelle notion, généralisant celle d'opérateur p-sommant, qui permettra de traduire les théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires de E' dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ où G est un espace quasi-normé.

Cette généralisation est pratiquement triviale, et nous donnerons la plupart des énoncés sans démonstration (les démonstrations sont absolument identiques à celles du chapitre III).

Soient E un elcs à dual quasi-normé et G un espace quasi-normé. Si $z = \Sigma\, x_n \otimes g_n$ est un élément de $E \otimes G$, et ξ un élément de E', nous poserons :

$$< z,\xi > = \Sigma < x_n,\xi > g_n \quad \in G.$$

Soient F un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire de $E \otimes G$ dans F. Nous dirons que u est (p,G)-sommant, $0 < p < +\infty$, s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(z_1,\dots,z_n)$ d'éléments de $E \otimes G$:

$$(\Sigma\, \|u(z_i)\|^p)^{1/p} \leqslant C \sup_{\|\xi\|_{E'} \leqslant 1} (\Sigma\, \|< z_i,\xi >\|_G^p)^{1/p}$$

On notera $\pi_{p,G}(u)$ la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée, et $\Pi_{p,G}(E \otimes G,F)$ l'ensemble des opérateurs (p,G)-sommants de $E \otimes G$ dans F.

Soient λ une probabilité à support fini sur $E \otimes G$, et $\alpha \in \,]0,1[$. Nous poserons :

$$J^*_{\alpha,G}(\lambda) = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} J_\alpha(\xi(\lambda))$$

(où $\xi(\lambda)$ est une probabilité sur G.)

Soient maintenant F un autre espace quasi-normé, et v un opérateur linéaire continu de $E \otimes G$ dans F. Nous dirons que u est (0,G)-sommant si pour tout $\beta \in]0,1[$, il existe $\alpha \in]0,1[$ et C tels que l'on ait pour toute probabilité λ à support fini sur $E \otimes G$:

$$J_\beta(v(\lambda)) \leqslant C\, J^*_{\alpha,G}(\lambda) \text{ .}$$

Soit $q \in]0, +\infty]$. Nous désignerons par $N(E \otimes G, \ell^q(G))$ l'espace des opérateurs linéaires u de $E \otimes G$ dans $\ell^q(G)$ de la forme :

$u(z) = (< z, \xi_n >)$, où (ξ_n) est une suite d'éléments de E' telle que $\Sigma \|\xi_n\|^q < \infty$.

Nous poserons $N_{q,G}(u) = (\Sigma \|\xi_n\|^q)^{1/q}$. Nous désignerons par $N_o(E \otimes G, \ell^q(G))$ le sous-espace de $N(E \otimes G, \ell^q(G))$ formé par les opérateurs u pour lesquels la suite (ξ_n) ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. On obtient immédiatement :

<u>Proposition 35</u> : Soient E un elcs à dual quasi-normé, G un espace quasi-normé, et $q \in]0, + \infty]$. Pour tout $u \in N(E \otimes G, \ell^q(G))$, on a :

$$\pi_{q,G}(u) \leqslant N_{q,G}(u).$$

<u>Définition 36</u> : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, G un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^o(\Omega, \mu, G)$. Il existe une unique application mesurable φ_u de Ω dans $E \otimes G$ telle que :

$$\forall \xi \in E' \qquad \xi \circ \varphi_u = u(\xi).$$

(Il est facile de construire φ_u : si (x_n) est une base de E et (ξ^*_n) la base duale dans E', on posera :

$$\varphi_u(\omega) = \Sigma\, x_n \otimes u(\xi_n^*)(\omega),$$

l'unicité est facile à vérifier.)

<u>Proposition 37</u> : Soient E un elcs à dual quasi-normé, tel que le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, F et G deux espaces quasi-normés, v un opérateur linéaire de E dans F, α une quasi-norme sur $F \otimes G$, telle que $\alpha(x \otimes y) = \|x\| \cdot \|y\|$, (Ω, μ) un espace de probabilité et u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^p(\Omega, \mu, G)$, $0 < p \leqslant \infty$.

On suppose que $\tilde{v} = v \otimes \mathrm{Id}$ est (p,G)-sommante de $E \otimes G$ dans $F \otimes_\alpha G$ et que F est de dimension finie. On a alors, en posant $w = u \circ {}^t v \in L(F', L^p(\Omega, \mu, G))$:

$$\left(\int (\alpha\,(\varphi_w(\omega)))^p\, d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leqslant \pi_{p,G}(\tilde{v}) \cdot \|u\|.$$

La démonstration est standard : on résoud tout d'abord le cas où u est de rang fini, et φ_u finiment étagée ; dans ce cas cela résulte directement de la définition des opérateurs (p,G)-sommants. Ensuite, lorsque u est de rang fini, on l'approche dans $L_s(E', L^p(\Omega, \mu, G))$ par des opérateurs de rang fini h tels que φ_h soit étagée, et l'on conclut par le premier cas.

Finalement, lorsque u est linéaire continue quelconque, on l'approche par des opérateurs (u_i) de rang fini, grâce à la propriété d'approximation sur E'.

On démontre alors par le même raisonnement que dans le théorème 19:

<u>Proposition 38</u> : Soient p et q deux nombres réels tels que $0 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, E un elcs à dual quasi-normé, tel que le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, u un opérateur linéaire continu de E' dans un espace $L^p(\Omega, \mu, G)$ (avec G espace quasi-normé), et C un nombre réel $\geqslant 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'opérateur u se factorise par $L^q(\Omega, \mu, G)$, avec $C_{p,q}(u) \leqslant C$

b) Pour tout opérateur $\tilde{v} = v \otimes \mathrm{Id} \in N_o(E \otimes G, \ell^q(G))$, on a :

$$\|\varphi_u \circ {}^t v\|_{L^p(\Omega,\mu,\ell^q(G))} \leqslant C\, N_{q,G}(\tilde{u}) .$$

Nous pouvons maintenant démontrer l'analogue du théorème 23. Auparavant, nous introduirons l'analogue des suites scalairement ℓ^p : Soient E un elcs à dual quasi-normé, G un espace quasi-normé ; nous définirons une quasi-norme sur $E \otimes G$ par :

$$\varepsilon(z) = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \|<\xi, z>\| .$$

Les applications $z \to <\xi, z>$ se prolongent au complété $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$. Nous dirons qu'une suite (z_n) d'éléments de $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$ est $G\text{-}\ell^p$ s'il existe une constante C telle que :

$$\forall \xi \in E' \qquad (\Sigma \|<\xi, z_n>\|^p)^{1/p} \leqslant C\, \|\xi\| .$$

On posera :

$$M_{p,G}((z_n)) = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} (\sum_n \|<\xi, z_n>\|^p)^{1/p} .$$

Théorème 39 : Soient p, q, r trois nombres réels tels que $0 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, E un elcs à dual quasi-normé tel que le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, G un espace quasi-normé et C un nombre réel $\geqslant 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout espace quasi-normé F et tout opérateur $v \in \Pi_{q,G}(E \otimes G, F)$, $\pi_{p,G}(v) \leqslant C\, \pi_{q,G}(v)$.

b) Pour tout opérateur $v \in N_o(E \otimes G, \ell^q(G))$, $\pi_{p,G}(v) \leqslant C\, N_{q,G}(v)$.

c) Pour tout espace mesuré (Ω, μ) et tout opérateur linéaire continu u de E' dans $L^p(\Omega, \mu, G)$, $C_{p,q}(u) \leqslant C\, \|u\|$.

d) Toute suite (z_n) $G.\ell^p$ sur $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$ peut s'écrire $z_n = \alpha_n y_n$, où (y_n) est une suite $G.\ell^q$ sur $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$ et (α_n) une suite numérique telles que :
$\Sigma |\alpha_n|^r \leqslant 1$; $M_{q,G}((y_n)) \leqslant C\, M_{p,G}((z_n))$.

Démonstration : On va suivre exactement la démonstration du théorème 23. L'implication a) $\Longrightarrow$ b) est immédiate par la proposition 35. Démontrons b) $\Longrightarrow$ c), en supposant d'abord que μ soit une probabilité. Dans ce cas, le résultat provient de la conjonction des propositions 37 et 38. Supposons maintenant μ quelconque. Soient $u \in L(E', L^p(\Omega,\mu,G))$ et $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ une suite finie d'éléments de E'. On peut trouver une fonction mesurable $h \geqslant 0$ sur (Ω,μ) telle que $\int h\, d\mu = 1$, et que :

$$\|u(\xi_k)\|^p\ \mu \ll h\ \mu = \nu, \qquad k = 1,\dots,n.$$

On démontre exactement comme dans le théorème 23, en se ramenant à la probabilité ν, le résultat voulu.

Si (z_n) est une suite $G.\ell^p$ sur $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} G$, elle définit un opérateur u de E' dans $\ell^p(G)$ par $u(\xi) = (\langle z_n, \xi \rangle)$. On en déduit aisément c) $\Longrightarrow$ d). Finalement d) $\Longrightarrow$ a) résulte de l'inégalité de Hölder, tout comme au théorème 23.

Remarque 40 : L'équivalence a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ d) $\Longrightarrow$ a) ne nécessite jamais l'hypothèse d'approximation (cf. remarque 24).

Remarque 41 : Soit E un elcs à dual quasi-normé vérifiant les conditions équivalentes du théorème 39 pour un espace quasi-normé G de dimension $\geqslant 1$. Il est immédiat que E vérifie également les mêmes conditions si on remplace G par un sous-espace G_1 de G, et en particulier si $G_1 = \mathbb{R}$ .Dans ce cas, E vérifie les conditions du théorème 23. Par contre, il n'est pas évident qu'un espace E qui vérifie le théorème 23 c'est-à-dire lorsque $G = \mathbb{R}$, vérifie aussi le théorème 39. Nous démontrons plus loin que cela est vrai lorsque G est un espace de Banach quelconque et $q < 2$. (Corollaire 86)

* * *

VI. Opérateurs et espaces de type et cotype q, $0 < q \leqslant 2$.

Dans ce chapitre, nous introduirons une classe d'espaces E, que nous appellerons espaces de type q, telle que tout opérateur linéaire continu u d'un tel espace E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ soit q-cylindriquement de type p, avec $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$. ($\mu$ étant une probabilité si $p = 0$). Cette classe contient pratiquement tous les exemples que l'on peut obtenir au moyen du théorème 23 à partir des théorèmes connus de la forme $\forall$ F, $\Pi_q(E,F) = \Pi_p(E,F)$.

Soit q un nombre réel tel que $0 < q \leqslant 2$. On sait [18] exposé V, qu'il existe une probabilité γ_q sur $\mathbb{R}$, dont la transformée de Fourier est $\exp(-|t|^q)$. Nous appellerons suite stable d'ordre q toute suite (finie ou infinie) de variables aléatoires indépendantes (f_n) sur un espace de probabilité (Ω,μ) suivant la loi γ_q.

On sait que γ_q admet des moments d'ordre $p < q$ lorsque $q < 2$, et des moments de tout ordre $p < +\infty$ si $q = 2$. En posant $q^* = q$ si $0 < q < 2$, et $2^* = +\infty$, nous retiendrons que γ_q admet des moments d'ordre $p < q^*$. Sauf mention du contraire, q sera supposé $\leqslant 2$ dans tout ce chapitre.

Nous rappellerons dans un lemme la propriété bien connue des suites stables d'ordre q ([18], exposé X-XI lemme 2).

Lemme 42 : Pour tout réel p tel que $-1 < p < q^*$, il existe une constante $A_{p,q}$ telle que l'on ait pour toute suite stable d'ordre q $(f_1,\ldots,f_n)$ et pour toute suite $(c_1,\ldots,c_n)$ de nombres réels :

$$\left(\int |\Sigma\, c_i\, f_i(\omega)|^p\, d\mu(\omega)\right)^{1/p} = A_{p,q}\, (\Sigma\, |c_i|^q)^{1/q} .$$

De plus pour tout $\alpha \in \,]0,1[$ il existe deux constantes A_q^α et B_q^α telles que :

$$B_q^\alpha\, (\Sigma\, |c_i|^q)^{1/q} \leqslant J_\alpha\, (\Sigma\, c_i\, f_i,\ \mu) \leqslant A_q^\alpha\, (\Sigma\, |c_i|^q)^{1/q} .$$

(la valeur de $A_{p,q}$ est donnée par :

$$A_{p,q} = (\int |t|^p \, d\gamma_q(t) \,)^{1/p} = \|\gamma_q\|_p. \,)$$

Soient E et F deux espaces quasi-normés, p et q deux réels tels que $0 < p < q^*$, et u un opérateur linéaire continu de E dans F. Nous dirons que u est de type (p,q) s'il existe une constante K telle que pour toute suite finie $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E et toute suite stable d'ordre q $(f_1,\dots,f_n)$ on ait :

$$(\int \|\Sigma\, u(x_i)\, f_i(\omega)\|^p \, d\mu(\omega)\,)^{1/p} \leqslant K\, (\Sigma\, \|x_i\|^q)^{1/q}.$$

On notera $K_{p,q}(u)$ la plus petite constante K telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Nous aurons besoin de la notion d'opérateur de type (0,q) à valeurs dans $L^0(\Omega,\mu)$, qui n'est pas quasi-normé. Nous dirons qu'un opérateur u d'un espace quasi-normé E dans un evt F est de type (0,q) si pour tout voisinage de zéro équilibré V dans F, et pour tout $\alpha \in \,]0,1[$, il existe une contante $K_{\alpha,V}$ telle que pour toute suite finie $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E, et pour toute suite stable d'ordre q $(f_1,\dots,f_n)$, on ait :

$$J_\alpha\, (j_V\, (\Sigma\, u(x_i)\, f_i),\, \mu) \leqslant K_{\alpha,V}\, (\Sigma\, \|x_i\|^q)^{1/q}.$$

(où j_V désigne la jauge de V).

Notons quelques propriétés immédiates. Si v est un opérateur de type (p,q), et si u et w sont deux opérateurs continus, l'opérateur $w \circ v \circ u$ est de type (p,q) , et pour $p > 0$:

$$K_{p,q}(w \circ v \circ u) \leqslant \|w\|\, \|u\|\, K_{p,q}(v).$$

Supposons que u soit un opérateur de type (p,q) de E dans F, et que u admette la factorisation :

$E \xrightarrow{\pi} E/N \xrightarrow{\bar{u}} F$, où E/N est un quotient de E, muni de la quasi-norme quotient. On vérifie immédiatement que $\bar{u}$ est aussi de type (p,q) avec $K_{p,q}(\bar{u}) = K_{p,q}(u)$.

Soient encore E et F deux espaces quasi-normés, p et q deux nombres réels tels que $0 < p < q^*$, et u un opérateur linéaire continu de E dans F. Nous dirons que u est de cotype (p,q) s'il existe une constante K^* telle que pour toute suite finie $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de E et toute suite stable d'ordre q $(f_1,\ldots,f_n)$ on ait :

$$(\Sigma \|u(x_i)\|^q)^{1/q} \leqslant K^* \left(\int \| \Sigma\, x_i\, f_i(\omega)\|^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} .$$

On notera $K^*_{p,q}(u)$ la plus petite constante K^* telle que la propriété ci-dessus soit réalisée. On voit encore immédiatement que $K^*_{p,q}(w \circ v \circ u) \leqslant \|w\| \cdot \|u\|\, K^*_{p,q}(v)$. Par contre la propriété relative au quotient n'est pas vraie en général.

Soient E un espace quasi-normé, p et q deux nombres réels tels que $0 < p < q^*$. Nous dirons que E est de type (p,q) (resp : de cotype (p,q)) si l'identité de E est un opérateur de type (p,q) (resp : de cotype (p,q)) et nous poserons $K_{p,q}(E) = K_{p,q}(Id_E)$. (resp : $K^*_{p,q}(E) = K^*_{p,q}(Id_E)$). D'après les propriétés des opérateurs de type (p,q), la classe $\mathcal{K}_{p,q}$ des espaces de type (p,q) est stable par isomorphismes, sous-espaces et quotient.

Les résultats démontrés par J. Hoffmann-Jorgensen dans [6] et généralisés par S. Kwapien dans [18] exposé VI, permettent de simplifier considérablement les notions précédentes ! En effet, si p et q sont deux nombres réels tels que $0 < p < q^*$, et si $r \in]0,1]$, il existe $\delta \in]0,1[$ et C, constantes qui ne dépendent que de p, q et r, telles que pour tout espace r-normé E, toute suite finie $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de E et toute suite stable d'ordre q $(f_1,\ldots,f_n)$, on ait :

$$\left(\int \|\Sigma\, x_i\, f_i(\omega)\|^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leqslant C \;\; J_\delta(\| \Sigma\, x_i\, f_i(\omega)\|, \, d\mu(\omega)) .$$

On en déduit, si $p_1 \in]0,p[$, l'inégalité :

$$\left(\int \| \Sigma\, x_i\, f_i(\omega)\|^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leqslant C \;\delta^{-1/p_1} \left(\int \|\Sigma\, x_i\, f_i(\omega)\|^{p_1} \, d\mu(\omega)\right)^{1/p_1} .$$

Par conséquent les différentes notions de type (p,q) ou de cotype (p,q) coïncident toutes lorsque p varie dans $]0,q^*[$!

Nous parlerons donc simplement d'espace ou d'opérateur de type q ou de cotype q. De plus, d'après [18] exposé VII, tout espace quasi-normé est de cotype q pour $q < 2$. Ce résultat sera utilisé à plusieurs reprises par la suite.

Les lois stables permettent une nouvelle interprétation des opérateurs q-cylindriquement de type p, lorsque $q \leqslant 2$.

<u>Proposition 43</u> : Soient E un espace quasi-normé, p et q deux réels tels que $0 \leqslant p < q \leqslant 2$, (Ω, μ) un espace mesuré quelconque et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega, \mu)$. Pour que u soit q-cylindriquement de type p, il faut et il suffit qu'il soit de type q. Plus précisément, on a pour $p > 0$:

$$C_{p,q}(u) = A^{-1}_{p,q}\, K_{p,q}(u).$$

<u>Démonstration</u> : Supposons tout d'abord $p > 0$, et soient $(x_1, \dots, x_n)$ une suite d'éléments de E, et $(f_1, \dots, f_n)$ une suite stable d'ordre q sur un espace de probabilité (X, ν). On a d'après le lemme 42 pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\left(\sum_i |u(x_i)(\omega)|^q\right)^{1/q} = A^{-1}_{p,q} \left(\int \left|\sum_i u(x_i)(\omega)\, f_i(t)\right|^p d\nu(t)\right)^{1/p}$$

donc :

$$\left(\int \left(\sum_i |u(x_i)|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} = A^{-1}_{p,q} \left(\int \left|\sum_i u(x_i)(\omega)\, f_i(t)\right|^p d\nu(t)\, d\mu(\omega)\right)^{1/p}$$

$$= A^{-1}_{p,q} \left(\int \left\|\sum_i u(x_i)\, f_i(t)\right\|^p_{L^p} d\nu(t)\right)^{1/p},$$

d'où l'on déduit immédiatement le résultat.

Dans le cas où $p = 0$*, nous utiliserons "l'inégalité de Fubini" :

$$J_\gamma\,(J_\delta\,(f(x,y),\ d\nu(y)),\ d\mu(x)) \leqslant J_\alpha\,(J_\beta\,(f(x,y),\ d\mu(x)),\ d\nu(y)),$$

lorsque $\alpha + \beta \leqslant \gamma\ \delta$ ([27] proposition XXIV, 2, 4.)

On a d'après le lemme 42 pour tous $\beta,\ \delta \in\ ]0,1[$:

* nous supposerons que μ est une probabilité.

$$B_q^\delta \left(\Sigma\, |u(x_i)(\omega)|^q\right)^{1/q} \leqslant J_\delta \left(\left| \Sigma\, u(x_i)(\omega)\; f_i(t) \right| ,\; d\nu(t)\right)$$

et :

$$J_\beta \left(\left| \Sigma\, u(x_i)(\omega)\; f_i(t) \right|,\; d\nu(t)\right) \leqslant A_q^\beta \left(\Sigma\, | u(x_i)(\omega) |^q\right)^{1/q}.$$

Soient alors α, γ tels que $\alpha + \beta \leqslant \gamma\, \delta$. Nous aurons :

$$B_q^\delta\, J_\gamma \left(\left(\Sigma\, |u(x_i)(\omega)|^q\right)^{1/q},\; d\mu(\omega)\right)$$

$$\leqslant J_\gamma \left(J_\delta \left(\left| \Sigma\, u(x_i)(\omega)\; f_i(t)\right|,\; d\nu(t)\right),\; d\mu(\omega)\right)$$

$$\leqslant J_\alpha \left(J_\beta \left(\left| \Sigma\, u(x_i)(\omega)\; f_i(t)\right|,\; d\mu(\omega)\right),\; d\nu(t)\right) \leqslant A_q^\beta\, J_\alpha \left(\left(\Sigma\, | u(x_i)(\omega) |^q\right)^{1/q},d\mu(\omega)\right)$$

Supposons u de type $(0,q)$, et soit $\gamma \in]0,1[$. Choisissons α, β, δ tels que $\alpha + \beta \leqslant \gamma\, \delta$. Soit V le voisinage de zéro dans $L^0(\Omega,\mu)$ défini par $J_\beta(f,\mu) \leqslant 1$. Puisque u est de type $(0,q)$, il existe $K_{\alpha,\beta}$ telle que :

$J_\alpha \left(J_\beta \left(\left| \Sigma\, u(x_i)\; f_i(t)\right|,\; d\nu(t)\right)\right) \leqslant K_{\alpha,\beta} \left(\Sigma\, \|x_i\|^q\right)^{1/q}$, d'où d'après l'une des inégalités ci-dessus :

$$J_\gamma \left(\left(\Sigma\, |u(x_i)|^q\right)^{1/q},\; \mu\right) \leqslant (B_q^\delta)^{-1}\; K_{\alpha,\beta} \left(\Sigma\, \|x_i\|^q\right)^{1/q},$$

ce qui prouve que u est q-cylindriquement de type zéro. Inversement, supposons que u soit q-cylindriquement de type zéro, et soient $\alpha \in]0,1[$ et V un voisinage de zéro équilibré dans $L^0(\Omega,\mu)$. On peut supposer que V est de la forme $\{f \mid J_\beta\, (f,\mu) \leqslant 1\}$. Alors :

$$J_\alpha \left(J_\beta \left(\left| \Sigma\, u(x_i)\; f_i(t)\right|,\; d\mu\right),\; d\nu(t)\right) \leqslant A_q^\beta\; J_\alpha \left(\left(\Sigma\, |u(x_i)|^q\right)^{1/q},\; d\mu\right)$$

$$\leqslant C_\alpha\; A_q^\beta \left(\Sigma\, \|x_i\|^q\right)^{1/q},$$

ce qui achève la démonstration.

A priori le résultat précédent ne reste pas valable si on considère un opérateur linéaire continu u de E quasi-normé dans $L^p(\Omega,\mu,G)$, G étant aussi un espace quasi-normé. Nous allons voir que si G est de cotype q, l'implication u de type q $\Rightarrow$ u q-cylindriquement de type p reste vraie pour les opérateurs linéaires de E dans $L^p(\Omega,\mu,G)$. (En fait, tout espace quasi-normé étant de cotype q pour $q < 2$, cette hypothèse concerne uniquement le cas $q = 2$.)

Proposition 44 : Soient E et G deux espaces quasi-normés, p et q deux réels tels que $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$, (Ω,μ) un espace mesuré quelconque* et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\mu,G)$. Si $q = 2$, on suppose G de cotype 2. Si l'opérateur u est de type q, il est q-cylindriquement de type p, avec plus précisément pour $p > 0$:

$$C_{p,q}(u) \leqslant K^*_{p,q}(G)\ K_{p,q}(u).$$

Démonstration : Il suffit de recopier la démonstration de la proposition 43, en partant de l'inégalité de définition du cotype (p,q) : si $(x_1,\dots,x_n)$ est une suite de vecteurs de E, on a :

$$\left(\Sigma\ \|u(x_i)(\omega)\|^q\right)^{1/q} \leqslant K^*_{p,q}(G)\ \left(\int \|\ \Sigma\ u(x_i)(\omega) f_i(t)\|^p d\nu(t)\right)^{1/p}$$

d'où :

$$\left(\int \left(\Sigma\ \|u(x_i)\|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \leqslant K^*_{p,q}(G)\ \left(\int \|\ \Sigma\ u(x_i)\ f_i(t)\|^p_{L^p}\ d\nu(t)\right)^{1/p}$$
$$\leqslant K^*_{p,q}(G)\ K_{p,q}(u)\left(\Sigma\ \|x_i\|^q\right)^{1/q}.$$

Pour $p = 0$, on répète également l'argument de la proposition 43, en écrivant l'inégalité du cotype q sous la forme :

$$\left(\Sigma\ \|u(x_i)(\omega)\|^q\right)^{1/q} \leqslant C\ \ J_\delta\left(\ \|\ \Sigma\ u(x_i)(\omega)\ f_i(t)\ \|,\ d\nu(t)\right),$$

où δ est celui de la page 67 .

Nous allons donner maintenant un certain nombre d'exemples d'espaces de type q, pour différentes valeurs de q. Ces exemples sont fournis par les espaces $L^p(\Omega,\mu)$, pour des valeurs de p convenables, ou par des espaces $L^p(\Omega,\mu,E)$, lorsque l'espace E lui-même a une propriété convenable de type.

* pour $p = 0$, nous supposerons que μ est une probabilité.

Proposition 45 : Soient E un espace quasi-normé, (Ω,μ) un espace mesuré et r un réel tel que $2 \leqslant r < +\infty$. Si E est de type 2, il en est de même de $L^r(\Omega,\mu,E)$, et plus précisément :

$$K_{r,2}(L^r(\Omega,\mu,E)) = K_{r,2}(E),$$

en particulier $K_{r,2}(L^r(\Omega,\mu)) = A_{r,2}$.

Démonstration : Puisque E s'identifie à un sous-espace de $L^r(\Omega,\mu,E)$ (le sous-espace des fonctions constantes), on a $K_{r,2}(E) \leqslant K_{r,2}(L^r(\Omega,\mu,E))$. Il suffit donc de voir que $K_{r,2}(L^r(\Omega,\mu,E)) \leqslant K_{r,2}(E)$.

Soient $(X_1,\dots,X_n)$ une suite d'éléments de $L^r(\Omega,\mu,E)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ une suite stable d'ordre 2. On a :

$$\left(\int \|\Sigma X_i\, f_i(t)\|^r\, d\nu(t)\right)^{1/r} = \left(\int \|\Sigma X_i(\omega)\, f_i(t)\|^r\, d\nu(t)\, d\mu(\omega)\right)^{1/r}$$

$$\leqslant K_{r,2}(E) \left(\int (\Sigma \|X_i(\omega)\|^2)^{r/2}\, d\mu(\omega)\right)^{1/r} \leqslant K_{r,2}(E)\, (\Sigma \|X_i\|^2)^{1/2}.$$

La deuxième affirmation résulte de $K_{r,2}(\mathbb{R}) = A_{r,2}$.

Théorème 46 : Soient (Ω,μ) un espace mesuré quelconque, et S un sous-espace d'un quotient de $L^r(\Omega,\mu)$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$.

a) Supposons $1 \leqslant r \leqslant 2$, et soient $0 < p < q < r$. L'espace S est de type q, et $K_{p,q}(S) \leqslant A_{p,r}^{-1}\, A_{p,q}\, A_{q,r}$.

b) Supposons $2 \leqslant r < +\infty$. L'espace S est alors de type 2, et $K_{r,2}(S) \leqslant A_{r,2}$ (et a fortiori $K_{p,2}(S) \leqslant A_{r,2}$ pour $0 < p \leqslant r$).

c) Supposons $0 < r \leqslant 1$, et soient $0 < p < q < r$.

Tout espace r-normé E est de type q, et $K_{p,q}(E) \leqslant A_{p,r}^{-1}\, A_{p,q}\, A_{q,r}$.

Démonstration : D'après les propriétés de stabilité des espaces de type (p,q), il suffit de prendre $S = L^r(\Omega,\mu)$ dans a) et b). Alors b) est simplement donné par la proposition 45. D'autre part, lorsque $0 < r \leqslant 1$, on sait que tout espace r-normé est le quotient d'un espace $\ell^r(I)$ pour un ensemble d'indices I convenable. Finalement, pour montrer a) et c) il suffit de considérer l'espace $L^r(\Omega,\mu)$, $0 < r \leqslant 2$. Soient p et q donnés, $0 < p < q < r$. On sait ([18] exposé V, remarque 2), qu'il existe un espace de probabilité (Y,λ) et un opérateur linéaire u de $L^r(\Omega,\mu)$ dans $L^o(Y,\lambda)$ tel que :

$$\|u(x)\|_{L^p} = A_{p,r} \|x\|$$

$$\|u(x)\|_{L^q} = A_{q,r} \|x\|.$$

Désignons par j l'injection de $L^q(Y,\lambda)$ dans $L^p(Y,\lambda)$. On a $C_{p,q}(j) = 1$, donc $K_{p,q}(j) = A_{p,q}$ d'après la proposition 43. Considérons l'opérateur $v = A^{-1}_{p,r}(j \circ u)$ (en considérant u comme opérateur de $L^r(\Omega,\mu)$ dans $L^q(Y,\lambda)$.) D'après la première égalité ci-dessus, v est un plongement isométrique de $L^r(\Omega,\mu)$ dans $L^p(Y,\lambda)$, donc :

$$K_{p,q}(L^r(\Omega,\mu)) = K_{p,q}(v) = A^{-1}_{p,r} K_{p,q}(j \circ u)$$

$$\leqslant A^{-1}_{p,r} \|u\| K_{p,q}(j) = A^{-1}_{p,r} A_{q,r} A_{p,q} ,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 47 : Si l'on examine la démonstration du théorème 46, on voit que l'on a démontré le résultat suivant : soient (Ω,μ) un espace mesuré, p,q deux réels tels que $0 \leqslant p < q \leqslant 2$. Si S est un sous-espace fermé de $L^q(\Omega,\mu)$ sur lequel les topologies de $L^q(\Omega,\mu)$ et de $L^p(\Omega,\mu)$ coïncident, S est de type q (Nous verrons une réciproque de ce résultat au théorème 98 et au corollaire 99 a). Nous emploierons encore le même type d'argument dans la proposition qui suit :

Proposition 48 : Soient q et q_1 deux nombres réels tels que $0 < q_1 < q < 2$, et E un espace quasi-normé de type q et de type q_1♦. L'espace $\ell^q(E)$ est de type q_1, avec pour $p_1 \in]0,q_1[$:

$$K_{p_1,q_1}(\ell^q(E)) \leqslant K^*_{p_1,q}(E)\, K_{p_1,q_1}(E)\, K_{q_1,q}(E).$$

Démonstration : Comme on a supposé $q < 2$, l'espace E est automatiquement de cotype q. Soit (f_n) une suite stable d'ordre q sur un espace de probabilité

♦ **il suffit pour cela qu'il soit de type q, cf. Addendum.**

(X,ν). Considérons l'opérateur u de $\ell^q(E)$ dans $L^o(X,\nu,E)$ défini par :

$$u((x_n)) = \Sigma\, x_n\, f_n \;.$$

Soit $p_1 < q_1 < q$. Puisque E est de cotype (p_1,q) et de type (q_1,q), on a pour toute suite $x = (x_n) \in \ell^q(E)$:

$$\|x\| \leqslant K^*_{p_1,q}(E)\ \left(\int \|u(x)\|^{p_1}\, d\nu\right)^{1/p_1}, \text{ et :}$$

$$\left(\int \|u(x)\|^{q_1}\, d\nu\right)^{1/q_1} \leqslant K_{q_1,q}(E)\ .\ \|x\|\ .$$

Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ une suite d'éléments de $\ell^q(E)$ et $(g_1,\ldots,g_n)$ une suite stable d'ordre q_1 sur un espace de probabilité (Y,λ). On aura :

$$\left(\int \|\Sigma\, x_i\, g_i(s)\|^{p_1}\, d\lambda(s)\right)^{1/p_1} \leqslant K^*_{p_1,q}(E)\ \left(\int \|\Sigma\, u(x_i)\, g_i(s)\|^{p_1}_{L^{p_1}}\, d\lambda(s)\right)^{1/p_1}$$

$$= K^*_{p_1,q}(E)\ \left(\int \|\Sigma\, u(x_i)(t)\, g_i(s)\|^{p_1}\, d\lambda(s)\, d\nu(t)\ \right)^{1/p_1}$$

$$\leqslant K_{p_1,q_1}(E)\ .\ K^*_{p_1,q}(E)\ \left(\ \int \left(\Sigma\, \|u(x_i)(t)\|^{q_1}\ \right)^{p_1/q_1} d\nu(t)\ \right)^{1/p_1}$$

$$\leqslant K_{p_1,q_1}(E)\ K^*_{p_1,q}(E)\ \left(\int \Sigma\, \|u(x_i)\|^{q_1}\, d\nu\right)^{1/q_1}$$

$$\leqslant K_{q_1,q}(E)\ K_{p_1,q_1}(E)\ K^*_{p_1,q}(E)\ \left(\Sigma\, \|x_i\|^{q_1}\ \right)^{1/q_1}\ ,\quad \text{c.q.f.d.}$$

Remarque 49 : Soit E un espace quasi-normé, et soit $q \in\ ]0,+\infty[$. Nous dirons qu'un espace quasi-normé F est un espace $\mathscr{L}_{q,\lambda}(E)$, $1 \leqslant \lambda < +\infty$, si pour tout sous-espace de dimension finie G de F, il existe un entier n et un sous-espace $\widetilde{G}$ de $\ell^q_n(E)$ tel que $d(G,\widetilde{G}) \leqslant \lambda$. Il est bien clair que la proposition 48 reste vraie si l'on remplace $\ell^q(E)$ par un espace $\mathscr{L}_{q,\lambda}(E)$ (avec la majoration $K_{p_1,q_1} \leqslant \lambda\, K^*_{p_1,q}(E)\, K_{p_1,q_1}(E)\, K_{q_1,q}(E)$), en particulier par un espace $L^q(\Omega,\mu,E)$.

Théorème 50 : Soient p, q, r trois nombres réels, $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant r$, (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés quelconques (sauf si $p = 0$: nous supposerons alors que μ est une probabilité, cf. chapitre II), S un sous-espace d'un quotient de $L^r(X,\nu)$, et G un espace quasi-normé. Nous supposerons G de cotype 2 si $q = 2$.

a) Supposons $1 \leqslant r \leqslant 2$, et $0 \leqslant p \leqslant q < r$. Tout opérateur linéaire continu u de S dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ est q-cylindriquement de type p, et plus précisément pour $0 < p < q$:

$$C_{p,q}(u) \leqslant K^*_{p,q}(G)\ A^{-1}_{p,r}\ A_{p,q}\ A_{q,r}\ \|u\|.$$

b) Supposons $2 \leqslant r < +\infty$, $q = 2$, et $0 \leqslant p \leqslant 2$. Tout opérateur linéaire continu u de S dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ est 2-cylindriquement de type p, avec pour $p > 0$: $C_{p,2}(u) \leqslant K^*_{p,2}(G)\ A_{r,2}\ \|u\|$.

c) Supposons $0 \leqslant p \leqslant q < r \leqslant 1$, et soit E un espace r-normé. Tout opérateur linéaire continu u de E dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ est q-cylindriquement de type p, avec pour $p > 0$:

$$C_{p,q}(u) \leqslant K^*_{p,q}(G)\ A^{-1}_{p,r}\ A_{p,q}\ A_{q,r}\ \|u\|.$$

Démonstration : Démontrons a). D'après le théorème 46, on a :

$$K_{p,q}(S) \leqslant A^{-1}_{p,r}\ A_{p,q}\ A_{q,r} \quad \text{donc :}$$

$$K_{p,q}(u) \leqslant \|u\|\ K_{p,q}(S) \leqslant \|u\|\ A^{-1}_{p,r}\ A_{p,q}\ A_{q,r}\ ,$$

donc d'après la proposition 44 :

$$C_{p,q}(u) \leqslant K^*_{p,q}(G)\ K_{p,q}(u) \leqslant K^*_{p,q}(G)\ A^{-1}_{p,r}\ A_{p,q}\ A_{q,r} \cdot \|u\|\ .$$

La démonstration des autres cas est identique.

Remarque 51 : Supposons que $G = \mathbb{R}$ dans le théorème 50. En appliquant le théorème 23 à a) et b), on retrouve les résultats de S. Kwapien [9] : et P. Saphar [26] :

$$\forall F, \quad \Pi_q(L^{r'},F) = \Pi_o(L^{r'},F) \ , \qquad 0 \leqslant q < r \leqslant 2, \text{ ou } 0 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant r < +\infty.$$

En appliquant le théorème 23 à c), on retrouve la "conjecture de Pietsch" : si E est un espace de Banach :

$$\forall F, \quad \Pi_q(E,F) = \Pi_o(E,F) \ , \qquad 0 \leqslant q < 1.$$

Si on considère maintenant un espace quasi-normé G, et si on applique le théorème 39 (et sa généralisation - non écrite, mais triviale dans cette direction - à $p = 0$) au c) du théorème 50, on obtient la généralisation vectorielle de ce qui précède : si E est un espace de Banach, F et G deux espaces quasi-normés, on a :

$$\forall q \in [0,1[, \qquad \Pi_{q,G}(E \otimes G,\ F) = \Pi_{o,G}(E \otimes G,\ F) \ .$$

D'autre part, on remarque que l'hypothèse d'approximation et le "bidual" sont inutiles pour les opérateurs p-radonifiants d'un sous-espace d'un quotient de $L^r(X,\nu)$, $1 < r < +\infty$, dans un Banach F. Plus précisément, si E est un sous-espace d'un quotient d'un espace $L^r(X,\nu)$, et F un espace de Banach, tout opérateur p-sommant de E dans F est p-radonifiant de E dans F, $0 \leqslant p \leqslant \infty$.

Soient en effet v un opérateur linéaire p-sommant de E dans un espace de Banach F. Le résultat annoncé est connu pour $p > 1$, [27], nous supposerons donc $p \leqslant 1$. Soient alors λ une probabilité cylindrique de type p sur E, et q un nombre réel tel que $1 < q < r$. La probabilité cylindrique λ est q-cylindriquement de type p d'après le théorème 50. L'opérateur v est a fortiori q-sommant, donc $v(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur F d'après la proposition 22, ce qui démontre le résultat.

Nous étudierons maintenant le problème suivant : soient (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés, E un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire q-cylindriquement de type p_1 de E dans $L^{p_1}(X,\nu)$. Si w est un opérateur linéaire continu de $L^{p_1}(X,\nu)$ dans $L^{p_2}(\Omega,\mu)$, l'opérateur $w \circ u$ est-il q-cylindriquement de type p_2 ?

Dans le cas $q \leqslant 2$, la réponse est fournie immédiatement par la notion d'opérateur de type (p,q) :

Proposition 52 : Soient p_1, p_2, q trois réels, tels que $0 \leqslant p_1, p_2 < q \leqslant 2$, (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés quelconques (sauf si $p_1 = 0$, nous supposerons alors que ν est une probabilité, ou si $p_2 = 0$, auquel cas nous supposerons que μ est une probabilité), E un espace quasi-normé et u un opérateur q-cylindriquement de type p_1 de E dans $L^{p_1}(X,\nu)$. Si w est un opérateur linéaire continu de $L^{p_1}(X,\nu)$ dans $L^{p_2}(\Omega,\mu)$ $w \circ u$ est q-cylindriquement de type p_2 de E dans $L^{p_2}(\Omega,\mu)$, avec pour $p > 0$:

$$C_{p_2,q}(w \circ u) \leqslant A^{-1}_{p_2,q}\, A_{p,q}\, \|w\|\, C_{p_1,q}(u), \text{ avec } p = \sup(p_1, p_2).$$

Démonstration : Si u est un opérateur q-cylindriquement de type p_1, avec $p_1 < q$, il est de type q d'après la proposition 43. Par conséquent, l'opérateur $w \circ u$ est encore de type q, donc q-cylindriquement de type p_2 par une nouvelle application de la proposition 43.

Nous laissons l'inégalité exacte de l'énoncé au soin du lecteur méfiant.

Remarque 53 : Le résultat précédent est faux si $p_1 = q < 2$.

Nous allons traduire la proposition 52 en termes d'opérateurs sommants. Rappelons que si E et F sont deux espaces de Banach et v un opérateur p-sommant de E dans F, v admet un prolongement v'' à E'' (par densité de E dans $\sigma(E'',E')$) qui opère de E'' dans F (pour $p < \infty$!), avec $\pi_p(v'') = \pi_p(v)$.

Proposition 54 : Soient p et q deux réels tels que $1 \leqslant p < q \leqslant 2$, E un espace de Banach, (Ω,μ) un espace mesuré quelconque et u un opérateur linéaire de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout espace de Banach F et tout opérateur $v \in \Pi_q(E,F)$, $v'' \circ {}^t u$ est r-sommant pour tout $r \geqslant 0$, et pour $r > 0$:

$$\pi_r(v'' \circ {}^t u) \leqslant C \cdot A_{r,q}^{-1} \cdot A_{p,q}\, \pi_q(v).$$

b) Pour tout $v \in N_o(E, \ell^q)$, $v'' \circ {}^t u \in \Pi_p(L^{p'}(\Omega,\mu), \ell^q)$, et :

$$\pi_p(v'' \circ {}^t u) \leqslant C\, N_q(v).$$

c) L'opérateur u est q-cylindriquement de type p, avec :

$$C_{p,q}(u) \leqslant C.$$

<u>Démonstration</u> : a) $\Longrightarrow$ b) est évident. Montrons que b) $\Longrightarrow$ c) ; supposons que μ soit une probabilité. L'opérateur u définit une probabilité cylindrique λ sur E ou sur $\sigma(E'',E')$. Nous devons montrer que λ est q-cylindriquement de type p.

L'identité de $L^p(\Omega,\mu)$ définit une probabilité cylindrique $\tilde{\lambda}$ sur $L^{p'}(\Omega,\mu)$, telle que $\|\tilde{\lambda}\|_p^* \leqslant 1$, et telle que $\lambda = {}^t u(\tilde{\lambda})$. Pour prouver que λ est q-cylindriquement de type p, il suffit d'après la proposition 22 de montrer que l'on a pour tout opérateur $v \in N_o(E,\ell^q)$:

$$\|v(\lambda)\|_p \leqslant C\, N_q(v).$$

Mais :

$$v(\lambda) = v'' \circ {}^t u(\tilde{\lambda}), \text{ donc :}$$

$$\|v(\lambda)\|_p = \|v'' \circ {}^t u(\tilde{\lambda})\|_p \leqslant \pi_p\, (v'' \circ {}^t u)\, \|\tilde{\lambda}\|_p^* \leqslant C\, N_q(v),$$

ce qui prouve que $C_{p,q}(u) = C_{p,q}(\lambda) \leqslant C$.

Lorsque (Ω,μ) est un espace mesuré quelconque, on utilise l'argument que nous avons employé à plusieurs reprises pour se ramener à une probabilité, et l'on démontre ainsi que b) $\Longrightarrow$ c).

Finalement démontrons que c) $\Longrightarrow$ a). Il suffit de démontrer le résultat pour $r > 0$, d'après la "conjecture de Pietsch". Soit (x_n) une suite scalairement ℓ^r sur $L^{p'}(\Omega,\mu)$. Elle définit un opérateur w de $L^p(\Omega,\mu)$ dans ℓ^r par :

$$w(\xi) = (< x_n, \xi >), \qquad \|w\| = M_r((x_n)).$$

D'après la proposition 52, on a :

$$C_{r,q}(w \circ u) \leqslant A_{r,q}^{-1} A_{p,q} \|w\| C_{p,q}(u) \leqslant C A_{r,q}^{-1} A_{p,q} M_r(x_n).$$

L'opérateur $w \circ u$ de E' dans ℓ^r est défini par la suite $({}^t u(x_n))$ d'éléments de E''. L'inégalité ci-dessus signifie que l'on peut écrire ${}^t u(x_n) = \alpha_n y_n$, avec $\Sigma |\alpha_n|^s \leqslant 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$, et $M_q((y_n)) \leqslant C_{r,q}(w \circ u)$ $\leqslant C A_{r,q}^{-1} A_{p,q} M_r((x_n))$. Finalement, en utilisant $\pi_q(v) = \pi_q(v'')$ et l'inégalité de Hölder, nous aurons :

$$(\Sigma \|v'' \circ {}^t u(x_n)\|^r)^{1/r} \leqslant (\Sigma \|v''(y_n)\|^q)^{1/q} \leqslant \pi_q(v) M_q((y_n)), \quad \text{d'où :}$$

$$\pi_r(v'' \circ {}^t u) \leqslant C A_{r,q}^{-1} A_{p,q} \pi_q(v),$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire 55</u> : Soient K un espace compact, (Ω,μ) un espace mesuré quelconque, E un espace de Banach, p et q deux réels tels que $1 \leqslant p < q \leqslant 2$ et u un opérateur linéaire q-cylindriquement de type p de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$. Pour tout opérateur linéaire continu $v \in L\,(C(K),\ L^{p'}(\Omega,\mu))$, ${}^t u \circ v$ est q'-sommant, et $\pi_{q'}({}^t u \circ v) \leqslant A_{1,q}^{-1} A_{p,q} C_{p,q}(u) \|v\|$.

<u>Démonstration</u> : D'après [25] proposition 3, il suffit de montrer que pour tout opérateur $w \in N(E,\ell^q)$, on a :

$$\pi_1(w \circ {}^t u \circ v) \leqslant (A_{1,q}^{-1} A_{p,q} C_{p,q}(u) \|v\|) \cdot \pi_q(w).$$

Or, d'après la proposition 54 :

$$\pi_1(w \circ {}^t u \circ v) \leqslant \|v\| \pi_1(w \circ {}^t u) \leqslant \|v\| A_{1,q}^{-1} A_{p,q} C_{p,q}(u) \pi_q(w),$$

d'où le résultat.

Contre-exemple 56 : Nous allons montrer que dans le cas $p > 1$, la restriction $q \leqslant 2$ est nécessaire dans la proposition 54. Soient en effet p et q deux réels tels que $1 < p < q < +\infty$, et $q > 2$. Soit $(\mathcal{Z}_n)$ une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes sur un espace de probabilité (Ω, μ). Considérons l'opérateur linéaire j de ℓ^2 dans $L^p(\Omega, \mu)$ défini par :

$$(c_n) \to \Sigma\, c_n\, \mathcal{Z}_n$$

On sait que j opère en fait de ℓ^2 dans $L^q(\Omega, \mu)$, donc j est q-cylindriquement de type p. D'autre part, en identifiant ℓ^2 et son dual, l'opérateur ${}^t j$ est donné par :

$$g \in L^{p'}(\Omega, \mu) \quad \to \quad \left(\int g\, \mathcal{Z}_n\, d\mu\right)_n .$$

On voit alors que ${}^t j \circ j$ est l'identité de ℓ^2. Si la proposition 54 était vraie dans ce cas, nous devrions avoir :

$$\forall F, \quad \Pi_q(\ell^2, F) = \Pi_o(\ell^2, F),$$

ce qui est faux pour $q > 2$ (par exemple, un opérateur diagonal α de ℓ^2 dans ℓ^∞ est 2-sommant si et seulement si $\alpha \in \ell^2$ ([27], exposé 26), alors qu'il est q-sommant dès que $\alpha \in \ell^q$. Voir aussi la remarque 89).

Nous avons montré que $w \circ u$ est q-cylindriquement de type p, lorsque u est un opérateur q-cylindriquement de type p de E dans $L^p(X, \nu)$ et w un opérateur linéaire continu de $L^p(X, \nu)$ dans $L^p(\Omega, \mu)$, sous l'hypothèse $0 \leqslant p < q \leqslant 2$. Nous allons maintenant examiner le cas $0 < p \leqslant 1$. Dans le cas $p = 1$, la solution est immédiate en utilisant la norme tensorielle projective de Grothendieck, et l'égalité $L^1(\Omega, \mu, G) = L^1(\Omega, \mu) \hat{\otimes} G$, lorsque G est un espace de Banach. Pour traiter également le cas $0 < p < 1$, nous introduirons la définition suivante :

Définition 57 : Soient E et F deux espaces quasi-normés, et $p \in \,]0, 1[$. Nous désignerons par $E \otimes_p F$ l'espace $E \otimes F$ muni de la quasi-semi-norme :

$$\|z\|_p = \inf \left(\Sigma\, \|x_i\|^p\, \|y_i\|^p\right)^{1/p} ,$$

l'inf étant pris sur l'ensemble des représentations de z de la forme $z = \Sigma\, x_i \otimes y_i$.

<u>Remarque 58</u> : Lorsque E ou F est séparé par son dual, $\|z\|_p$ est une quasi-norme (c'est-à-dire que $\|z\|_p = 0 \Longrightarrow z = 0$). Lorsque E et F sont p-normés, $\|z\|_p$ est une p-semi-norme. Lorsque E et F sont normés, et p = 1, $\|z\|_1$ est la norme projective de Grothendieck. Enfin, E et F étant fixés, $p \to \|z\|_p$ est décroissante.

<u>Proposition 59</u> : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, $p \in \left]0,1\right]$ et G un espace p-normé complet. On a un isomorphisme isométrique :

$$L^p(\Omega,\mu,G) = L^p(\Omega,\mu)\, \hat{\otimes}_p\, G\ .$$

<u>Démonstration</u> : Soit ξ le sous-espace des fonctions étagées sur (Ω,μ), à valeurs dans G. Il suffit de montrer que les quasi-normes induites sur ξ par $L^p(\Omega,\mu,G)$ et $L^p(\Omega,\mu) \otimes_p G$ coïncident, puisque ξ est dense dans chacun de ces espaces. Soit $\varphi = \Sigma\, f_i \otimes x_i$. Nous aurons, puisque G est p-normé :

$$\|\varphi\|^p_{L^p(\Omega,\mu,G)} = \int \|\, \Sigma\, f_i(\omega)\ x_i\, \|^p\, d\mu(\omega) \leqslant \Sigma\, \|f_i\|^p\ \|x_i\|^p, \qquad \text{donc :}$$

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega,\mu,G)} \leqslant \|\varphi\|_p .$$

Inversement, considérons une représentation de φ de la forme $\varphi = \Sigma\, \chi_{A_i} \otimes x_i$, où les (A_i) sont des parties deux à deux disjointes de (Ω,μ) :

$$\|\varphi\|_p^p \leqslant \Sigma\, \|\chi_{A_i}\|^p\ \|x_i\|^p = \Sigma\, \mu(A_i)\ \|x_i\|^p = \|\varphi\|^p_{L^p(\Omega,\mu,G)} ,$$

d'où le résultat.

On en tire immédiatement :

<u>Corollaire 60</u> : Soient (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés, $p \in \left]0,1\right]$, F et G deux espaces p-normés complets. Si u est un opérateur linéaire continu de

$L^p(X,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$, et v un opérateur linéaire continu de F dans G, l'opérateur $u \otimes v$ de $L^p(X,\nu) \otimes F$ dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ se prolonge en un opérateur continu $u \mathbin{\hat{\otimes}} v$ de $L^p(X,\nu,F)$ dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ et :

$$\|u \mathbin{\hat{\otimes}} v\| \leqslant \|u\| \, \|v\|.$$

Remarque 61 : Le corollaire 60 subsiste si u est continu de $L^{p_1}(X,\nu)$ dans $L^{p_2}(\Omega,\mu)$, avec $0 < p_1 \leqslant 1$, $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$.

Théorème 62 : Soient p et q deux nombres réels tels que $0 \leqslant p \leqslant 1$, $p \leqslant q \leqslant +\infty$, (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés quelconques (sauf si $p = 0$: nous supposerons alors que ce sont des espaces de probabilité), E un espace quasi-normé et u un opérateur q-cylindriquement de type p de E dans $L^p(X,\nu)$. Si w est un opérateur linéaire continu de $L^p(X,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$, l'opérateur $w \circ u$ est q-cylindriquement de type p, et l'on a pour $p > 0$:

$$C_{p,q}(w \circ u) \leqslant \|w\| \, C_{p,q}(u).$$

Démonstration : Supposons d'abord $p > 0$. Comme nous l'avons signalé à la remarque 4, dire qu'un opérateur linéaire v de F dans $L^p(Y,\lambda)$ est q-cylindriquement de type p équivaut à dire que l'opérateur $\tilde{v}$ défini par $(x_n) \to (v(x_n))$ est continu de $\ell^q(F)$ dans $L^p(Y,\lambda,\ell^q)$, et :

$$C_{p,q}(v) = \|\tilde{v}\|.$$

Considérons la situation de l'énoncé. L'opérateur $\widetilde{w \circ u}$ de $\ell^q(E)$ dans $L^p(\Omega,\mu,\ell^q)$ s'obtient en composant $\tilde{u}$ avec l'opérateur $w \mathbin{\hat{\otimes}} \mathrm{Id}$, qui est continu et de norme $\leqslant \|w\|$ de $L^p(X,\nu,\ell^q)$ dans $L^p(\Omega,\mu,\ell^q)$ d'après le corollaire 60. On a donc :

$$C_{p,q}(w \circ u) = \|\widetilde{w \circ u}\| \leqslant \|w\| \, \|\tilde{u}\| = \|w\| \, C_{p,q}(u),$$

ce qui règle le cas $p > 0$.

Supposons maintenant $p = 0$. Dans le cas $q \leqslant 2$, le résultat est donné par la proposition 52. Supposons maintenant $q > 2$, et soit u q-cylindriquement de type zéro de E dans $L^o(X,\nu)$. On peut écrire $u = T_g \circ u_1$, où u_1 est un opérateur linéaire continu de E dans $L^q(X,\nu)$. Ecrivons $g = g_1 . g_2$ de façon que T_{g_1} opère de $L^q(X,\nu)$ dans $L^1(X,\nu)$. Soit w un opérateur linéaire continu de $L^o(X,\nu)$ dans $L^o(\Omega,\mu)$. Considérons T_{g_2} comme opérateur de $L^1(X,\nu)$ dans $L^o(X,\nu)$; c'est un opérateur 1-cylindriquement de type zéro, donc $w \circ T_{g_2}$ est 1-cylindriquement de type zéro de $L^1(X,\nu)$ dans $L^o(\Omega,\mu)$ d'après le cas $q \leqslant 2$. On peut donc écrire $w \circ T_{g_2} = T_{h_2} \circ w_1$, où w_1 est linéaire continu de $L^1(X,\nu)$ dans $L^1(\Omega,\mu)$. Alors :

$$w \circ u = w \circ T_g \circ u_1 = (w \circ T_{g_2}) \circ (T_{g_1} \circ u) = T_{h_2} \circ (w_1 \circ T_{g_1} \circ u).$$

Maintenant $T_{g_1} \circ u$ est q-cylindriquement de type 1, donc $w_1 \circ T_{g_1} \circ u$ est q-cylindriquement de type 1 d'après la première partie, donc on peut écrire $w_1 \circ T_{g_1} \circ u = T_{h_1} \circ u_2$, où u_2 est un opérateur lineaire continu de E dans $L^q(\Omega,\mu)$. Finalement $w \circ u = T_{h_2} \circ (T_{h_1} \circ u_2) = T_{h_2 h_1} \circ u_2$, donc $w \circ u$ est q-cylindriquement de type zéro, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque 63</u> : Dans la proposition 52, on considérait un opérateur u q-cylindriquement de type p_1 de E dans $L^{p_1}(X,\nu)$ et w un opérateur linéaire de $L^{p_1}(X,\nu)$ dans $L^{p_2}(\Omega,\mu)$, avec éventuellement $p_2 < p_1$. Cela n'est pas possible ici si $p_1 = 1$, et $q = +\infty$. Soit en effet α un opérateur diagonal de ℓ^∞ dans ℓ^1 qui ne soit pas 0-sommant ([27] exposé 26). Dire que pour tout opérateur linéaire w de ℓ^1 dans $L^o(\Omega,\mu)$ $w \circ {}^t\alpha$ est ∞-cylindriquement de type zéro signifierait exactement que α serait 0-sommant, ce qui n'est donc pas le cas.

Cependant, en employant exactement la même technique que pour le cas $p = 0$ dans le théorème 62, on obtient le résultat suivant : soient p_1, p_2, q trois nombres réels tels que $0 \leqslant p_1$, $p_2 < 1$, $p_1 < q \leqslant +\infty$, E un espace quasi-normé, u un opérateur q-cylindriquement de type p_1 de E dans $L^{p_1}(X,\nu)$. Si w est un opérateur linéaire continu de $L^{p_1}(X,\nu)$ dans $L^{p_2}(\Omega,\mu)$, l'opérateur $w \circ u$ est q-cylindriquement de type p_2.

Remarque 64 : Le théorème 62 est une sorte de théorème "d'extrapolation". Soient (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces de probabilité et w un opérateur linéaire continu de $L^p(X,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$, $0 \leqslant p \leqslant 1$. Alors la restriction de w à $L^q(X,\nu)$, $p \leqslant q \leqslant +\infty$ est "presque" continue de $L^q(X,\nu)$ dans $L^q(\Omega,\mu)$, en ce sens qu'elle se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction. En utilisant la proposition 12, on peut dire également pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie mesurable Ω_ε de Ω, avec $\mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, telle que la restriction de w à $L^q(X,\nu)$ soit continue de $L^q(X,\nu)$ dans $L^q(\Omega_\varepsilon,\mu)$.

Remarque 65 : Nous aurions pu démontrer la proposition 52 par la même technique de normes tensorielles. En effet, d'après Saphar, on a lorsque G est un sous-espace d'un L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

$$L^p(\Omega,\mu,G) = L^p(\Omega,\mu) \otimes_{d_p} G \qquad ([18], \text{ exposé XIV}),$$

où d_p est une norme tensorielle (au sens de Grothendieck). Or, dans le cas $q \leqslant 2$, ℓ^q s'identifie à un sous-espace d'un L^p, lorsque $0 \leqslant p \leqslant q$.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous allons appliquer (d'après une suggestion de S. Kwapien) les théorèmes généraux de factorisation à la situation suivante : soient K un groupe compact, χ la probabilité de Haar sur K, et A un opérateur linéaire continu de $L^r(K,\chi)$ dans $L^p(K,\chi)$, invariant par translation à droite. Nous allons voir que si A peut s'écrire $A = T_g \circ B$, avec B linéaire continu de $L^r(K,\chi)$ dans $L^q(K,\chi)$, on peut en fait choisir g constante, c'est-à-dire que A lui-même opère de $L^r(K,\chi)$ dans $L^q(K,\chi)$.

Proposition 66 : Soient K un groupe compact, χ la probabilité de Haar sur K, et A un opérateur linéaire continu invariant par translation à droite de $L^r(K,\chi)$ dans $L^p(K,\chi)$, $0 \leqslant p < +\infty$, $0 < r \leqslant +\infty$. Si A est q-cylindriquement de type p, $p \leqslant q \leqslant +\infty$, il est continu de $L^r(K,\chi)$ dans $L^q(K,\chi)$, avec plus précisément pour $p > 0$:

$$\|A\|_{r,q} \leqslant C_{p,q}(A) \; \|A\|_{r,p}$$

(où $\|A\|_{s,t}$ désigne la norme de A comme opérateur de L^s dans L^t).

<u>Démonstration</u> : Soit A un opérateur q-cylindriquement de type p de $L^r(K,\chi)$ dans $L^p(K,\chi)$, invariant par translation à droite. Si j désigne l'injection de $L^p(K,\chi)$ dans $L^o(K,\chi)$, l'opérateur $j \circ A$ est q-cylindriquement de type zéro. Il suffit donc de démontrer le résultat lorsque p = 0. (Cependant, nous ne prouverons pas de cette façon le résultat précis $\|A\|_{r,q} \leqslant C_{p,q}(A)\ \|A\|_{r,p}$, que nous laissons au lecteur).

Considérons A comme un opérateur q-cylindriquement de type zéro de $L^r(K,\chi)$ dans $L^o(K,\chi)$. D'après le corollaire 14 et la proposition 12, il existe une partie mesurable $H \subset K$, et une constante M telles que :

$$\chi(H) \geqslant \frac{1}{2}\ ; \qquad \forall\, x \in L^r \quad \int_H |A(x)|^q\, d\chi \leqslant M\, \|x\|^q$$

soit encore en désignant par h la fonction caractéristique de H :

$$(1) \qquad \int h\, |A(x)|^q\, d\chi \leqslant M\, \|x\|^q\ .$$

Si g est une fonction sur K, et $a \in K$, nous définirons une fonction g_a par $g_a(b) = g(ba^{-1})$.

L'invariance de A par translation se traduit par $A(x_a) = (A(x))_a$, et on obtient puisque χ est invariante par translation :

$$(1_a) \qquad \int h_a\, |A(x)|^q\, d\chi = \int h\, |A(x_{a^{-1}})|^q\, d\chi \leqslant M\, \|x_{a^{-1}}\|^q = M\, \|x\|^q .$$

Autrement dit, la relation (1) reste vraie lorsqu'on remplace h par h_a, pour tout $a \in K$. On obtient donc, en intégrant les relations (1_a) :

$$\int d\chi(a) \int h_a\, |A(x)|^q\, d\chi \leqslant M\, \|x\|^q .$$

Or : $\int d\chi(a) \int h_a\, |A(x)|^q\, d\chi = \int d\chi(b)\, |A(x)(b)|^q \int h(ba^{-1})\, d\chi(a)$.

Mais : $\int h(ba^{-1})\, d\chi(a) = \int h\, d\chi = \chi(H) \geqslant \frac{1}{2}$, d'où :

$$\forall\, x \in L^r \qquad \int |A(x)|^q\, d\chi \leqslant 2\ M\, \|x\|^q ,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 67 : La démonstration précédente reste valable si on remplace l'espace de départ $L^r(K,\chi)$ par un espace E de fonctions réelles ou vectorielles sur K, tel que : $\forall a \in K$, $f \in E$, $\Longrightarrow f_a \in E$ et $\|f_a\| = \|f\|$. (c'est par exemple le cas pour un espace d'Orlicz $L^\Phi(K,\chi,G)$). De même on peut remplacer l'espace d'arrivée par un espace $L^p(K,\chi,G)$. Notons pour finir que l'on utilise un peu moins que l'invariance par translation, à savoir :
$|A(x_a)| = |A(x)|_a$, pour tout $a \in K$.

Nous allons maintenant appliquer les théorèmes généraux du chapitre VI au cas des opérateurs invariants par translation.

Théorème 68 : Soient K un groupe compact, χ la probabilité de Haar de K, et r un nombre réel tel que : $0 < r \leqslant 2$. Supposons que A soit un opérateur linéaire continu de $L^r(K,\chi)$ dans $L^0(K,\chi)$, invariant par translation. On a alors :

1) L'opérateur A est continu de L^r dans $L^{r-\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$,

2) L'opérateur A est continu de L^q dans L^q pour tout réel q tel que $r < q \leqslant 2$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 50, l'opérateur A est $(r-\varepsilon)$-cylindriquement de type zéro, d'où 1) en appliquant la proposition 66. Soit maintenant q un nombre réel tel que $r < q \leqslant 2$. Soit j l'injection de $L^q(K,\chi)$ dans $L^r(K,\chi)$. L'opérateur j est q-cylindriquement de type r, donc $A \circ j$ est q-cylindriquement de type zéro d'après la proposition 52, d'où l'on déduit 2) par une nouvelle application de la proposition 66.

Lorsque K est abélien, on voit par transposition que A est encore continu de L^q dans L^q, lorsque $2 \leqslant q < r'$. Nous ignorons si cela subsiste lorsque K n'est plus abélien.

Remarque 69 : Une des méthodes habituelles pour démontrer des résultats du type du théorème 68 est de prouver que l'opérateur A est de type faible (1, 1), puis, par exemple, de type faible (2, 2). On applique ensuite le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz. On voit ainsi que dans une certaine mesure, le théorème 68 remplace dans le cas des opérateurs de convolution sur un groupe compact ce théorème d'interpolation. En effet, dès que A est de type faible (1, 1), il définit un opérateur continu de $L^1(K,\chi)$ dans $L^o(K,\chi)$ (et même dans $L^p(K,\chi)$ pour tout $p < 1$.)

D'autre part, avec des hypothèses convenables de type et de cotype sur G, on peut généraliser en partie le théorème 68 pour des opérateurs de $L^r(K,\chi,G)$ dans $L^o(K,\chi,G)$.

***

VII. Espaces de cotype 2 et théorèmes de prolongement.

Nous avons signalé dans le chapitre précédent que tout espace quasi-normé est de cotype q pour $q < 2$. Par contre, nous verrons dans ce chapitre que les espaces de cotype 2 ont des propriétés très spéciales, et en particulier la propriété suivante : si (Ω,μ) est un espace mesuré quelconque, E un espace de cotype 2, S_q un sous-espace fermé de $L^q(\Omega,\mu)$, $2 \le q < +\infty$, et u un opérateur linéaire continu de S_q dans E, l'opérateur u admet la factorisation (cf. chapitre I) :

$$S_q \xrightarrow{j_g} S_2 \xrightarrow{\bar{u}} E \quad ,$$

où j_g est l'opérateur induit par la multiplication T_g de $L^q(\Omega,\mu)$ dans $L^2(\Omega,\mu)$, avec $g \in L^r(\Omega,\mu)$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

En particulier, l'opérateur u admettra un prolongement linéaire et continu v à $L^q(\Omega,\mu)$ tout entier : il suffira de prendre $v = \bar{u} \circ \pi \circ T_g$, où π désignera la projection orthogonale de $L^2(\Omega,\mu)$ sur S_2.

Par transposition, nous obtiendrons que tout opérateur linéaire continu de E' dans un quotient d'un espace $L^p(\Omega,\mu)$, $1 < p \le 2$, admet un relèvement linéaire et continu (E étant de cotype 2). C'est ce résultat que nous avons donné dans [16] par une méthode différente.

Nous commencerons par établir quelques propriétés générales des espaces de cotype 2, et nous donnerons quelques exemples.

Proposition 70 : Soient E et F deux espaces de Banach. Si u est un opérateur linéaire de type 2 de E dans F, l'opérateur transposé ${}^t u$ est de cotype 2, avec plus précisément :

$$K^*_{p,2}({}^t u) \le 1/(A_{2,2})^2 \quad K_{p',2}(u) .$$

En particulier, si E est un espace de Banach de type 2, son dual est de cotype 2, avec

$$K^*_{p,2}(E') \le 1/(A_{2,2})^2 \quad K_{p',2}(E) \quad .$$

Démonstration : Soient $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ une suite d'éléments de F', $(f_1,\dots,f_n)$ une suite stable d'ordre 2 sur (Ω,μ), et $\varepsilon > 0$. On peut trouver une suite $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E telle que :

$$(\Sigma \|{}^t u(\xi_i)\|^2)^{1/2} - \varepsilon \le \Sigma < x_i, {}^t u(\xi_i) > = \Sigma < u(x_i), \xi_i >$$

et $$\Sigma \|x_i\|^2 \le 1 .$$

On a alors, en utilisant l'orthogonalité des (f_i), et en posant

$$C = \int f_1^2 \, d\mu = (A_{2,2})^2$$

$$(\Sigma \|{}^t u(\xi_i)\|^2)^{1/2} - \varepsilon \le \Sigma < u(x_i), \xi_i > = \frac{1}{C} \int < \sum_j u(x_j)\, f_j, \sum_i \xi_i\, f_i > d\mu$$

$$\le \frac{1}{C} \left(\int \|\Sigma u(x_j)\, f_j\|^{p'} d\mu\right)^{1/p'} . \left(\int \|\Sigma \xi_i\, f_i\|^p \, d\mu\right)^{1/p} \le \frac{1}{C} K_{p',2}(u) \left(\int \| \Sigma \xi_i f_i \|^p d\mu\right)^{1/p},$$

d'où le résultat puisque ε est arbitraire.

<u>Exemple 71</u> : Soient E et F deux espaces de Banach. Si u est un opérateur q-sommant de E dans F, $q < +\infty$, l'opérateur transposé ${}^t u$ est de cotype 2. En effet, posons $r = \sup(q,2)$. L'opérateur u est a fortiori r-sommant, donc se factorise par un sous-espace S d'un espace $L^r(\Omega,\mu)$, qui est de type 2 d'après la proposition 45, donc u est de type 2, d'où le résultat par la proposition 70.

<u>Proposition 72</u> : Soient (X,ν) un espace mesuré quelconque, et r un réel tel que $0 < r \leq 2$. L'espace $L^r(X,\nu)$ est de cotype 2, avec plus précisément :

$$K^*_{r,2}\,(L^r(X,\nu)) \leq A^{-1}_{r,2}\ .$$

Plus généralement, si G est un espace quasi-normé de cotype 2, $L^r(X,\nu,G)$ est de cotype 2, avec :

$$K^*_{r,2}(L^r(X,\nu,G)) \leq K^*_{r,2}(G)\ .$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit évidemment de démontrer la deuxième assertion. Soient donc $(x_1,\dots,x_n)$ une suite d'éléments de $L^r(X,\nu,G)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ une suite stable d'ordre 2 sur (Ω,μ).

On aura, puisque $r \leq 2$:

$$\begin{aligned}
(\Sigma \|x_i\|^2_{L^r})^{1/2} &\leq \left(\int (\Sigma \|x_i(t)\|^2_G)^{r/2}\, d\nu(t)\right)^{1/r} \\
&\leq K^*_{r,2}(G)\,\left(\int \|\Sigma x_i(t)\, f_i(\omega)\|^r_G\, d\nu(t)\, d\mu(\omega)\right)^{1/r} \\
&= K^*_{r,2}(G)\,\left(\int \|\Sigma x_i\, f_i(\omega)\|^r_{L^r}\, d\mu(\omega)\right)^{1/r}\ ,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Nous récapitulerons les conséquences des résultats précédents dans une proposition.

Proposition 73 : Les espaces suivants sont de cotype 2 :

a) Tout espace quasi-normé plongeable dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$.

b) Tout sous-espace d'un quotient d'un espace $L^p(X,\nu)$, $1 < p \leq 2$.

c) Tout sous-espace de $L^r(X,\nu,G)$, $0 < r \leq 2$, G de cotype 2.

Démonstration : Démontrons a). Soient E un espace quasi-normé, et u un plongement de E dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$. Il existe un $r \in]0,1]$ tel que E soit r-normable. Soit p un réel tel que $0 < p < r$. D'après le théorème 50 c), l'opérateur u peut se factoriser sous la forme $u = T_g \circ v$, où v est un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\mu)$. Mais nécessairement v est un plongement de E dans $L^p(\Omega,\mu)$, c'est-à-dire que E est isomorphe à un sous-espace de $L^p(\Omega,\mu)$, donc E est de cotype 2 d'après la proposition 72.

Démontrons b). Si E est un sous-espace d'un quotient de $L^p(X,\nu)$, $1 < p \leq 2$, il est réflexif, et son dual E' est un quotient d'un sous-espace de $L^{p'}(X,\nu)$, $2 \leq p' < \infty$, donc est de type 2 d'après la proposition 45. Alors $E = (E')'$ est de cotype 2 d'après la proposition 70.

Enfin c) est contenu dans la proposition 72.

Proposition 74 : Soient E,F deux espaces quasi-normés, G elcs à dual quasi-normé, u et v deux opérateurs linéaires continus respectivement de E dans F et de G dans E. Si v est q-sommant, $q < +\infty$, et u de cotype 2, l'opérateur $u \circ v$ est 2-sommant de G dans F, et :

$$\pi_2(u \circ v) \leq A_{q,2}\, K^*_{q,2}(u)\, \pi_q(v) .$$

En particulier si E est de cotype 2, tout opérateur q-sommant v de G dans E ($q < +\infty$) est 2-sommant, et :

$$\pi_2(v) \quad \leq \quad A_{q,2}\, K^*_{q,2}(E)\ \pi_q(v) \quad .$$

Démonstration : Il suffit évidemment de montrer le premier résultat. Soient B^* l'adhérence dans $\sigma(G^*,G)$ de la quasi-boule unité de G', et v un opérateur q-sommant de G dans E. On sait ([21]) qu'il existe une probabilité ν sur B^* telle que :

$$\forall\, x \in G \qquad \|v(x)\| \leq \pi_q(v)\left(\int |<x,\xi>|^q\, d\nu\ (\xi)\right)^{1/q} .$$

Soit alors u de cotype 2 de E dans F, et soient $(x_1,\ldots,x_n)$ une suite d'éléments de G, et $(f_1,\ldots,f_n)$ une suite stable d'ordre 2 sur un espace de probabilité (Ω,μ). On aura

$$(\Sigma\ \|u.v(x_i)\|^2)^{1/2} \quad \leq \quad K^*_{q,2}(u)\ \left(\int \|\Sigma\ v(x_i)\ f_i(\omega)\|^q\ d\mu(\omega)\right)^{1/q}$$

$$= K^*_{q,2}(u)\left(\int \|v(\Sigma x_i\ f_i(\omega))\|^q\ d\mu(\omega)\right)^{1/q} \leq K^*_{q,2}(u)\pi_q(v)\left(\int|<\Sigma x_i f_i(\omega),\xi>|^q d\nu(\xi)\, d\mu(\omega)\right)^{1/q}$$

$$= A_{q,2}\ K^*_{q,2}(u)\ \pi_q(v)\left(\int (\Sigma|<x_i,\xi>|^2)^{q/2} d\nu(\xi)\right)^{1/q}$$

$$\leq A_{q,2}\ K^*_{q,2}(u)\ \pi_q(v) \qquad \sup_{\|\xi\|\leq 1} \quad (\Sigma|<x_i,\xi>|^2)^{1/2} .$$

Corollaire 75 : Soit E un espace de Banach de cotype 2. Pour tout espace de Banach F et tout p tel que $1 < p \leq 2$, on a $\prod_2(E,F) = \prod_p(E,F)$. Plus précisément, on a pour tout opérateur 2-sommant v de E dans F :

$$\pi_p(v) \quad \leq \quad A_{q,2}\ K^*_{q,2}(E)\ \pi_2(v) \ , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad .$$

(Ce résultat sera amélioré par la suite : nous verrons qu'en fait $\prod_2(E,F) = \prod_o(E,F)$ (théorème 93)).

Démonstration : D'après le corollaire 26 il suffit de démontrer le résultat pour tout sous-espace de dimension finie G de E. D'après Pietsch et Persson [20], le résultat demandé équivaut au fait que tout opérateur q-intégral d'un espace de Banach F dans G est 2-intégral, avec :

$$i_2(v) \leq A_{q,2} \ K^*_{q,2}(E) \ i_q(v) .$$

Or, d'après [20] et la proposition 74 :

$$i_2(v) = \pi_2(v) \leq A_{q,2} \ K^*_{q,2}(E) \ \pi_q(v) \leq A_{q,2} \ K^*_{q,2}(E) \ i_q(v) ,$$

ce qui démontre le corollaire.

Nous allons maintenant démontrer le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 76 : Soient E un espace quasi-normé de cotype 2, (Ω,μ) un espace mesuré quelconque, S_q un sous-espace fermé de $L^q(\Omega,\mu)$, $2 \leq q < +\infty$, et r tel que $\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

Tout opérateur linéaire continu u de S_q dans E admet la factorisation :

$$S_q \xrightarrow{j_g} S_2 \xrightarrow{u_1} E ,$$

où S_2 est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega,\mu)$, j_g l'opérateur induit par une multiplication T_g, $\int |g|^r \, d\mu \leq 1$, et où u_1 est linéaire continu de S_2 dans

E, avec $\|u_1\| \leq A_{q,2} \quad K^*_{q,2}(E) \quad \|u\|$.

En particulier, tout opérateur linéaire continu u de S_q dans E admet un prolongement linéaire continu v de $L^q(\Omega,\mu)$ dans E, avec $\|v\| \leq A_{q,2} K^*_{q,2}(E) \|u\|$.

<u>Démonstration</u> : Le premier résultat découle immédiatement du théorème 28 et de la proposition 74. Soit alors $u = u_1 \circ j_g$ la factorisation de u donnée par le premier résultat, et soit π la projection orthogonale de $L^2(\Omega,\mu)$ sur S_2. Considérons l'opérateur v de $L^q(\Omega,\mu)$ dans E défini par $v = u_1 \circ \pi \circ T_g$. Il est clair que v prolonge u, et $\|v\| \leq \|u_1\| \leq A_{q,2} \quad K^*_{q,2}(E) \quad \|u\|$.

<u>Remarque 77</u> : Pour démontrer le théorème 76 il n'est pas nécessaire que E soit de cotype 2 : il suffit de savoir que tout opérateur q-sommant d'un espace de Banach F dans E est 2-sommant. Mais pratiquement, les exemples de cette situation sont donnés par des espaces de cotype 2.

<u>Corollaire 78</u> : Soient p et q deux réels tels que $0 \leq p \leq 2 \leq q < +\infty$, (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés quelconques (sauf si $p = 0$, auquel cas on supposera que μ est une probabilité), S_q un sous-espace fermé de $L^q(X,\nu)$ et π la projection canonique de

$$L^{q'}(X,\nu) \quad \text{sur} \quad S'_q = L^{q'}(X,\nu)/S^o_q \quad .$$

a) Tout opérateur linéaire u de S_q dans $L^p(\Omega,\mu)$ admet un prolongement linéaire continu v de $L^q(X,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$.

b) Pour toute probabilité cylindrique λ de type p sur S'_q, il existe une probabilité cylindrique $\tilde{\lambda}$ de type p sur $L^{q'}(X,\nu)$ telle que $\pi(\tilde{\lambda}) = \lambda$.

c) Pour toute suite (x_n) scalairement l^p sur S'_q $(p > 0)$ il existe une suite (y_n) scalairement l^p sur $L^{q'}(\Omega,\mu)$ telle que $\pi(y_n) = x_n$.

d) Pour qu'un opérateur linéaire v de S'_q dans un espace quasi-normé F soit p-sommant, il faut et il suffit que $v \circ \pi$ soit p-sommant de $L^{q'}(X,\nu)$ dans F.

e) Pour toute probabilité cylindrique λ de type p sur $L^{q'}(X,\nu)$, il existe $g \in L^r(X,\nu)$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, et une probabilité cylindrique $\tilde{\lambda}$ sur $L^2(X,\nu)$ telles que $\lambda = T_g(\tilde{\lambda})$.

f) Pour qu'un opérateur linéaire v de $L^{q'}(X,\nu)$ dans un espace quasi-normé F soit p-sommant, il faut et il suffit que $v \circ T_g$ soit p-sommant de $L^2(X,\nu)$ dans F pour toute fonction $g \in L^r(X,\nu)$.

Démonstration : Démontrons a). Dans le cas $p > 0$, cela résulte immédiatement du théorème 76, puisque $L^p(\Omega,\mu)$ est de cotype 2 lorsque $0 < p \leq 2$. (Proposition 72). Lorsque $p = 0$, tout opérateur linéaire continu u de S_q dans $L^0(\Omega,\mu)$ est 2-cylindriquement de type zéro d'après le théorème 50, donc u admet la factorisation $u = T_g \circ u_1$, où u_1 est un opérateur linéaire continu de S_q dans $L^2(\Omega,\mu)$. D'après ce qui précède, u_1 admet un prolongement v_1, donc u admet un prolongement $v = T_g \circ v_1$.

Le b) résulte immédiatement du a) : si λ est une probabilité cylindrique de type p sur S'_q, on peut la représenter par un opérateur linéaire continu u de S_q dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$. Soit v un prolongement de u : il représente une probabilité cylindrique $\tilde{\lambda}$ sur $L^{q'}(X,\nu)$, de type p et telle que $\pi(\tilde{\lambda}) = \lambda$.

Le point c) se démontre comme b) à partir de a), en prolongeant les opérateurs de S_q dans l^p. Il est alors clair que c) $\Rightarrow$ d) : soit

v un opérateur linéaire de S'_q dans un espace quasi-normé F, tel que $v \circ \pi$ soit p-sommant. Soit (x_n) une suite scalairement l^p sur S'_q, et (y_n) un relèvement scalairement l^p sur $L^{q'}(X,\nu)$. Puisque $v \circ \pi$ est p-sommant,

$$\Sigma \| v \circ \pi(y_n) \|^p = \Sigma \| v(x_n) \|^p < +\infty ,$$

ce qui prouve que v est p-sommant.

Soient maintenant λ une probabilité cylindrique de type p sur $L^{q'}(X,\nu)$, et u un opérateur linéaire continu de $L^q(X,\nu)$ dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ qui représente λ. D'après le théorème 76 (pour $p > 0$. Si $p = 0$, on procède comme au début de cette démonstration), l'**opérateur** u admet la factorisation $u = u_1 \circ T_g$, où $g \in L^r(X,\nu)$, et où u_1 est un opérateur linéaire continu de $L^2(X,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$. L'opérateur u_1 représente une probabilité cylindrique $\tilde{\lambda}$ sur $L^2(X,\nu)$, de type p et $T_g(\tilde{\lambda}) = \lambda$, ce qui démontre e).

Pour finir, on démontre e) $\Rightarrow$ f) comme on a montré c) $\Rightarrow$ d).

<u>Remarque 79</u> : On pourrait aussi traduire a) et b) en disant que toute fonction continue et de type positif sur S_q admet un prolongement continu et de type positif sur $L^q(X,\nu)$.

D'autre part, on obtient de façon évidente de nouveaux énoncés en groupant b) et e), ou d) et f).

Nous trouvons comme corollaire un théorème de Kadec et Pelczynski : si un sous-espace E de $L^q(X,\nu)$, $2 \leq q < \infty$, est hilbertisable, il est complémenté dans $L^q(X,\nu)$ [7].

<u>Corollaire 80</u> : Soient (X,ν) un espace mesuré quelconque, q un réel tel

que $2 \leq q < \infty$, et E un sous-espace fermé de $L^q(X,\nu)$. Si E est de cotype 2, il est hilbertisable et il est complémenté dans $L^q(\Omega,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Appliquons le théorème 76 à $S_q = E$, et $u = Id_E$. L'identité de E admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{j_g} S_2 \xrightarrow{u_1} E$$

Nécessairement j_g est un plongement, donc E est hilbertisable. D'autre part, $u = Id_E$ admet un prolongement v de $L^q(X,\nu)$ dans E : l'opérateur v est une projection de $L^q(X,\nu)$ sur E, donc E est complémenté dans $L^q(X,\nu)$.

<u>Remarque 81</u> : Désignons par QSL^p la classe des espaces qui sont isomorphes à un quotient d'un sous-espace d'un espace $L^p(X,\nu)$. Si un espace appartient à la fois à QSL^p, avec $1 < p \leq 2$, et à QSL^q, $2 \leq q < +\infty$, il est hilbertisable : en effet, il est alors de type 2 et de cotype 2, et on applique [10].

<u>Corollaire 82</u> : Soient (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés quelconques, p et q deux réels tels que $2 \leq p,q < +\infty$, E et F respectivement des sous-espaces fermés de $L^p(X,\nu)$ et $L^q(\Omega,\mu)$. Toute forme bilinéaire continue sur $E \times F$ admet un prolongement bilinéaire et continu sur $L^p(X,\nu) \times L^q(\Omega,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Soit f une forme bilinéaire continue sur $E \times F$; elle définit un opérateur linéaire et continu u de E dans F'. L'espace F' est de cotype 2 comme quotient de $L^{q'}(\Omega,\mu)$, $1 < q' \leq 2$. (Proposition 73). D'après le théorème 76, u admet un prolongement v de $L^p(X,\nu)$ dans F'. Considérons l'opérateur transposé ${}^t v$ de F dans $L^{p'}(X,\nu)$. D'après le même théorème 76,

${}^t v$ admet un prolongement w de $L^q(\Omega,\mu)$ dans $L^{p'}(X,\nu)$. Finalement f admet le prolongement :

$$\tilde{f}(x,y) = < x,w(y) > \quad .$$

Remarque 83 : On pourrait donner un énoncé plus précis faisant intervenir la factorisation par un S_2 : il existe $g \in L^r(X,\nu)$, $h \in L^s(\Omega,\mu)$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$, et une forme bilinéaire k sur $L^2(X,\nu) \times L^2(\Omega,\mu)$, telles que f soit prolongée par :

$$\tilde{f}(x,y) = k(gx,hy) \quad .$$

D'autre part, l'énoncé s'étend aux formes multilinéaires sur $E_1 \times \ldots \times E_n$, E_i sous-espace de $L^{p_i}(\Omega_i,\mu_i)$, $2 \leq p_i < +\infty$.

VIII. Conséquences d'un lemme de H.P. Rosenthal.

Les résultats de ce chapitre sont des conséquences du théorème 84 qui suit. Ce théorème est une généralisation immédiate d'un lemme très puissant de H.P. Rosenthal, [25], lemme 6. A partir de ce résultat, nous déduirons un certain nombre de conséquences, dont les plus marquantes sont les suivantes :

a) Soient E et G deux espaces de Banach, et $q < 2$. Si tout opérateur q-sommant de E dans un espace quasi-normé F est 0-sommant, tout opérateur (q,G)-sommant de $E \otimes G$ dans F est (0,G)-sommant (Corollaire 86).

b) Soit E un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe un espace quasi-normé F tel que :

$$\Pi_1(E,F) \neq \Pi_0(E,F) .$$

2) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n, il existe un sous-espace G de E qui est $(1+\varepsilon)$.isomorphe à l_n^∞ . (Théorème 92).

c) Si E est un espace de Banach de cotype 2, tout opérateur 2-sommant de E dans un espace quasi-normé F est 0-sommant. (Théorème 93).

Ce dernier résultat permet de donner une nouvelle démonstration du théorème de Grothendieck :

$$\mathcal{L}(L^1,L^2) = \Pi_1(L^1,L^2) \qquad \text{(cf. [5] ou [12]).}$$

En fait, on trouve une amélioration de ce théorème, puisque l'on démontre :

$$\mathcal{L}(L^1, L^2) = \Pi_o(L^1, L^2) \ , \quad \text{(Théorème 94).}$$

ce qui répond à une question de S. Kwapien (problèmes posés dans Studia Math. 38 (1970)).

A partir de ce résultat, on améliore un résultat de Kwapien et Pelczynski [11]. Le résultat peut se traduire ainsi : soit (Ω, μ) un espace de probabilité. Si (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles telle que $\Sigma\, c_n X_n$ converge en probabilité pour toute suite $(c_n) \in l^\infty$, la série $\Sigma\, X_n/(1 + \mathrm{Log}\, n)$ converge p.s (Corollaire 96).

Soit E un elcs à dual quasi-normé. Nous désignerons par I_E l'ensemble des réels $p > 0$ tels que l'on ait pour tout espace quasi-normé F :

$$\Pi_p(E,F) = \Pi_o(E,F) \ .$$

Par exemple, si E est un espace de Banach, la "conjecture de Pietsch" se traduit par $]0,1[\subset I_E$. Par conséquent si E est un espace de Banach et $p \in]0,1[$, dire que $q \in I_E$ équivaut à : $\forall$ F, $\Pi_q(E,F) = \Pi_p(E,F)$. Cette remarque sera utilisée à plusieurs reprises dans la suite.

Si maintenant G est un espace quasi-normé, nous désignerons par $I_{E,G}$ l'ensemble des réels $p > 0$ tels que l'on ait pour tout espace quasi-normé F :

$$\Pi_{p,G}(E \otimes G, F) = \Pi_{o,G}(E \otimes G, F) \ .$$

D'après le théorème 50 c) et la remarque 51, on a encore, lorsque E est un espace de Banach, $]0,1[\subset I_{E,G}$ pour tout espace quasi-normé G. On peut donc faire la même remarque que ci-dessus : $I_{E,G}$ est l'ensemble des réels $q > 0$ tels que l'on ait pour un $p \in]0,1[$:

$$\forall F, \qquad \Pi_{q,G}(E \otimes G,F) = \Pi_{p,G}(E \otimes G,F) \quad .$$

Par un raisonnement identique à celui de la remarque 33, l'égalité :

$$\forall F, \qquad \Pi_{q,G}(E \otimes G,F) = \Pi_{p,G}(E \otimes G,F)$$

implique l'existence d'une constante C, indépendante de F, telle que l'on ait pour tout opérateur $v \in \Pi_{q,G}(E \otimes G,F)$:

$$\pi_{p,G}(v) \leq C\ \pi_{q,G}(v).$$

Par conséquent, pour récapituler, si E est un espace de Banach et p un nombre réel tel que $0 < p < 1$, dire que $q \notin I_{E,G}$ signifie qu'il existe pour toute constante C un espace quasi-normé F et un opérateur linéaire v de $E \otimes G$ dans F tel que :

$$\pi_q(v) \leq 1 \quad ; \quad \pi_p(v) \geq C.$$

<u>Théorème 84</u> : Soient E et G deux espaces de Banach, et q un nombre réel tel que $1 \leq q < +\infty$.
Supposons que $q \notin I_{E,G}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n il existe un opérateur linéaire w de E' dans l_n^q, continu pour $\sigma(E',E)$, et une suite de vecteurs $(y_1,\dots,y_n)$ de norme 1 dans E', tels que l'on ait en désignant par $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de l_n^q :

$$\|w\| \le 1+\varepsilon \quad ; \quad w(y_i) = e_i \qquad i = 1,\dots,n\ .$$

Démonstration : Soient $\varepsilon > 0$ et n entier donnés. Puisque l'espace l_n^q est de dimension finie, il est clair qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

(1) Si (e_i) désigne la base canonique de l_n^q et si (x_i) est un système de vecteurs de l_n^q tel que $\|x_i - e_i\| \le \alpha$ pour chaque i, l'opérateur σ de l_n^q dans lui-même défini par $\sigma(e_i) = x_i$ est inversible, et $\|\sigma^{-1}\| \le 1+\varepsilon$.

Soit p un nombre réel tel que $0 < p < 1$. Posons $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, et soient $\overline{\varepsilon}$, $\delta \in]0,1[$ tels que :

(2) $$[(n-1)(1-\delta^q) + (1-\delta)^q]^{1/q} \le \alpha$$

(3) $$\delta < (1-\overline{\varepsilon})^{1/r}\ .$$

D'après (3), on peut trouver K et $\overline{N} \ge K$ tels que l'on ait pour tout réel $N \ge \overline{N}$:

(4) $$\frac{\overline{\varepsilon}}{n} K^p \ge 1$$

(5) $$(1-\overline{\varepsilon})^{q/r} \left[1 - \left(\frac{n}{\overline{\varepsilon}}\right)^{q/r} \left(\frac{1}{K}\right)^{pq/r}\right] N^q - K^{q-p} \ge \delta^q N^q\ .$$

D'après les remarques que nous avons faites, puisque $q \notin I_{E,G}$, il existe un espace quasi-normé F et un opérateur $v \in \Pi_{q,G}(E \otimes G, F)$ tel que $\pi_{q,G}(v) \le 1$, et $\pi_{p,G}(v) > \overline{N}$. Il existe alors une suite $(z_1,\dots,z_m)$ d'éléments de $E \otimes G$ telle que :

$$(\Sigma \|v(z_j)\|^p)^{1/p} \geq \overline{N} \ M_{p,G}((z_j)) .$$

On peut trouver un sous-espace de dimension finie X de E tel que $(z_1,\ldots,z_m)$ appartiennent au sous-espace $X \otimes G$ de $E \otimes G$. En désignant par v_1 la restriction de v à $X \otimes G$, on aura donc :

$$\pi_{q,G}(v_1) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \pi_{p,G}(v_1) \geq \overline{N}$$

En appliquant le théorème 39 à X, on voit qu'il existe un espace mesuré (Ω,μ) et un opérateur linéaire u du dual Y de X dans $L^p(\Omega,\mu,G)$, tel que $\|u\| \leq 1$, et $C_{p,q}(u) \geq \overline{N}$. Nous poserons $C_{p,q}(u) = N$. Désignons par π la projection de E' sur Y, et notons que :

(7) π est continue pour $\sigma(E',E)$, et $\|\pi\| \leq 1$.

D'après le corollaire 5, il existe une fonction mesurable réelle g telle que :

(8) $\int |g|^r \, d\mu = 1 \quad ; \quad \forall\, y \in Y \quad \int \left\| \dfrac{u(y)}{g} \right\|^q d\mu \leq N^q \|y\|^q$

(et en particulier $\{\|u(y)\| > 0\} \subset \{|g| > 0\}$.)

Définissons une probabilité ν par $\nu = |g|^r \mu$, et soit w_o l'opérateur de $L^p(\Omega,\mu,G)$ dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ défini par :

$$w_o(f) = \chi_A \, |g|^{-r/p} f, \text{ où } A = \{|g| > 0\} .$$

On a $\|w_o\| \leq 1$, et en posant $u_1 = w_o \circ u \in L(Y, L^p(\Omega,\mu,G))$:

(9) $\quad C_{p,q}(u_1) = C_{p,q}(u) = N \quad ; \quad \|u_1\| \le 1$ et d'après (8) :

$$\forall\, y \in Y \qquad \int \|u_1(y)\|^q \, d\nu \le N^q \, \|y\|^q \; .$$

On a d'autre part, puisque $C_{p,q}(u_1) = N$:

(10) Pour toute fonction mesurable réelle h telle que $\int |h|^r \, d\nu = 1$, il existe $y \in Y$, tel que $\|y\| = 1$ et :

$$\int \left\| \frac{u_1(y)}{h} \right\|^q d\nu \;\ge\; N^q \; .$$

Comme dans Rosenthal [25], nous utiliserons un lemme intermédiaire, dont les données sont celles que nous venons d'introduire.

<u>Lemme</u> : Il existe n sous-ensembles (A_i) de Ω deux à deux disjoints et n vecteurs (y_i) dans Y tels que $\|y_i\| = 1$ pour chaque i, et en posant $f_i = u_1(y_i)$:

$$\int_{A_i} \|f_i\|^q \, d\nu \;\ge\; \delta^q \, N^q \; .$$

Démontrons le lemme. D'après (10), appliqué à $h = 1$, il existe $y_1 \in Y$ tel que $\|y_1\| = 1$, et en posant $f_1 = u_1(y_1)$: $\int \|f_1\|^q \, d\nu \ge N^q$, d'où d'après (9) : $\int \|f_1\|^q \, d\nu = N^q$.

Posons $A_1 = \{ \|f_1\| > K\}$. On a d'après (9) : $\nu(A_i) \le \dfrac{1}{K^p}$, et en désignant par A^c le complémentaire d'une partie A dans Ω :

$$\int_{A_1^c} \|f_1\|^q \, d\nu \;\le\; K^{q-p} \int \|f_1\|^p \, d\nu \;\le\; K^{q-p} \; ,$$

donc :

$$\int_{A_1} \|f_1\|^q \, d\nu \geq N^q - K^{q-p} \geq \delta^q N^q \quad \text{d'après (5).}$$

Supposons $y_1, \ldots, y_j$, $A_i, \ldots, A_j$ déterminés, $f_k = u_1(y_k)$, avec :

$$\nu(A_k) \leq \frac{1}{K^p} \ , \quad \|f_k\| > K \text{ sur } A_k, \quad k = 1, \ldots, j \ . \quad (j \leq n).$$

Posons $B = \cup A_k$. On a $\nu(B) \leq \frac{n}{K^p} < 1$ d'après (4).

Posons :

$$h = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{n}\right)^{1/r} \sum \|f_k\|^{p/r} \chi_{A_k} + c^{1/r} \chi_{B^c} \ ,$$

avec

$$c = \frac{1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{n} \sum \int_{A_k} \|f_k\|^p \, d\nu}{\nu(B^c)} \ .$$

On a $\int |h|^r \, d\nu = 1$, et :

(11) $$c \geq (1 - \bar{\varepsilon}).$$

D'après (10), on peut trouver $y_{j+1} \in Y$, tel que $\|y_{j+1}\| = 1$, et :

(12) $$\int \left\|\frac{f_{j+1}}{h}\right\|^q d\nu \geq N^q \ , \text{ où } f_{j+1} = u_1(y_{j+1}).$$

On a sur B :

$$\left|\frac{1}{h}\right|^q \leq \left(\frac{n}{\bar{\varepsilon}}\right)^{q/r} \left(\frac{1}{K}\right)^{pq/r} \ ,$$

d'où d'après (9) :

$$\int_B \left\|\frac{f_{j+1}}{h}\right\|^q d\nu \leq \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^{q/r} \left(\frac{1}{K}\right)^{pq/r} \int \|f_{j+1}\|^q d\nu \leq \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^{q/r} \left(\frac{1}{K}\right)^{pq/r} N^q .$$

On en déduit d'après (12) :

$$(13) \qquad \int_{B^c} \left\|\frac{f_{j+1}}{h}\right\|^q d\nu = c^{-q/r} \int_{B^c} \|f_{j+1}\|^q d\nu \geq N^q \left[1 - \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^{q/r} \left(\frac{1}{K}\right)^{pq/r}\right]$$

soit d'après (11) :

$$(14) \qquad \int_{B^c} \|f_{j+1}\|^q d\nu \geq (1-\varepsilon)^{q/r} \left[1 - \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^{q/r} \left(\frac{1}{K}\right)^{pq/r}\right] N^q .$$

Posons $A_{j+1} = \{ \|f_{j+1}\| > K\} \cap B^c$. On aura $\nu(A_{j+1}) \leq \frac{1}{K^p}$, et :

$$\int_{A^c_{j+1} \cap B^c} \|f_{j+1}\|^q d\nu \leq K^{q-p} \int \|f_{j+1}\|^p d\nu \leq K^{q-p} .$$

D'où finalement, d'après (14) et (5) :

$$\int_{A_{j+1}} \|f_{j+1}\|^q d\nu \geq (1-\varepsilon)^{q/r} \left[1 - \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^{q/r} \left(\frac{1}{K}\right)^{pq/r}\right] N^q - K^{q-p} \geq \delta^q N^q,$$

et le lemme est démontré par récurrence.

Achevons maintenant la démonstration du théorème, $(y_1,\ldots,y_n)$, $(f_1,\ldots,f_n)$ étant comme dans le lemme.

On peut trouver pour chaque i une fonction $h_i \in L^{q'}(\Omega,\nu,G')$, nulle hors de A_i, et telle que :

(15) $\quad \|h_i\| = 1, \quad \delta N \leq \int \langle f_i, h_i \rangle \, d\nu \leq N .$

Soit v l'opérateur de $L^q(\Omega, \nu, G)$ dans l^q_n défini par :

$$v(f) = \left(\frac{1}{N} \langle h_i, f \rangle \right)_{1 \leq i \leq n} .$$

On a $$|\langle h_i, f \rangle| \leq \left(\int_{A_i} \|f\|^q \, d\nu \right)^{1/q} ,$$

donc $$\sum |\langle h_i, f \rangle|^q \leq \int \|f\|^q \, d\nu ,$$

soit :

(16) $$\|v\| \leq \frac{1}{N} .$$

D'autre part, en désignant par (e_i) la base canonique de l^q_n, on a :

$$\|v(f_i) - e_i\| = \frac{1}{N} \left[\sum_{j \neq i} |\langle h_j, f_i \rangle|^q + |\langle h_i, f_i \rangle - N|^q \right]^{1/q} .$$

On a d'après le lemme $\int_{A_i^c} \|f_i\|^q \, d\nu \leq (1 - \delta^q) N^q$, donc :

$$j \neq i \qquad |\langle h_j, f_i \rangle|^q \leq (1 - \delta^q) N^q,$$

et d'après (15) :

$$|\langle h_i, f_i \rangle - N| \leq (1 - \delta) N .$$

Finalement, en utilisant (2) :

$$(17) \qquad \|v(f_i) - e_i\| \leq [(n-1)(1-\delta^q) + (1-\delta)^q]^{1/q} \leq \alpha.$$

Reprenons l'opérateur π de (7) et les vecteurs (y_i) du lemme. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe des éléments $(\tilde{y}_i)$ de E' tels que $\|\tilde{y}_i\| = 1$ pour chaque i, et $\pi(\tilde{y}_i) = y_i$. Considérons l'opérateur $w_1 = v \circ u_1 \circ \pi$. On a $\|w_1\| \leq 1$ d'après (7) , (9) et (16) (en considérant u_1 comme opérateur de Y dans $L^q(\Omega,\nu,G)$.) De plus :

$$w_1(\tilde{y}_i) = v(f_i),$$

soit par (17) :

$$\|w_1(\tilde{y}_i) - e_i\| \leq \alpha.$$

Soit σ l'opérateur de l_n^q dans lui-même défini par $\sigma(e_i) = w_1(\tilde{y}_i)$. On a $\|\sigma^{-1}\| \leq 1+\varepsilon$ d'après (1), d'où finalement en posant $w = \sigma^{-1} \circ w_1$:

$$\|w\| \leq 1 + \varepsilon \qquad , \qquad w(\tilde{y}_i) = e_i \qquad ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Nous allons démontrer la réciproque du théorème 84 lorsque $q < 2$:

<u>Proposition 85</u> : Soient E un espace de Banach et q un nombre réel tel que $1 \leq q < 2$. On suppose qu'il existe pour tout entier n un opérateur linéaire w_n de E' dans l_n^q, continu pour $\sigma(E',E)$, et une suite $(y_1^n,\ldots,y_n^n)$ de vecteurs

de norme 1 dans E' tels que l'on ait :

$$\|w_n\| \leq 2 \quad ; \quad w_n(y_i^n) = e_i \qquad i = 1,\dots,n.$$

Dans ce cas, $q \notin I_E$.

<u>Démonstration</u> : Soit v_n le transposé de w_n. Puisque w_n est continu pour $\sigma(E',E)$, v_n opère de $l_n^{q'}$ dans E. Définissons d'autre part un opérateur u_n de E dans l_n^∞ par :

$$u_n(x) = (< x, y_i^n >).$$

L'opérateur $u_n \circ v_n$ est alors l'injection de $l_n^{q'}$ dans l_n^∞.
En effet :

$$u_n \circ v_n\ (e_j) = (< v_n(e_j),\ y_i^n >) = (e_j,\ w_n(y_i^n)\ >) = (< e_j,\ e_i >) \quad .$$

Soit (α_i) une suite de réels tels que :

$$\sum |\alpha_i|^q < +\infty \qquad ; \qquad \sum |\alpha_i|^q \left(1 + \mathrm{Log}\ \frac{1}{|\alpha_i|}\right) = +\infty .$$

Soit δ_n l'opérateur diagonal de l_n^∞ dans l_n^q défini par les n premiers termes de la suite (α_i). On sait d'après L. Schwartz [27] exposé 26 que l'opérateur diagonal défini par la suite (α_i) n'est pas p-sommant de $l^{q'}$ dans l^q pour $0 \leq p < 1$. On aura donc nécessairement :

$$\lim_n \ \pi_p(\delta_n \circ u_n \circ v_n) = +\infty ,$$

d'où a fortiori :

$$\lim_n \ \pi_p(\delta_n \circ u_n) = +\infty .$$

Mais par ailleurs, $\pi_q(\delta_n \circ u_n) \leq (\sum|\alpha_i|^q)^{1/q}$.

Si l'on avait $\Pi_q(E,l^q) = \Pi_p(E,l^q)$, il existerait une constante C telle que l'on **ait** pour tout n :

$$\pi_p(\delta_n \circ u_n) \leq C\,\pi_q(\delta_n \circ u_n),$$

ce qui est impossible ici, donc $q \notin I_E$.

<u>Corollaire 86</u> : Soient E et G deux espaces de Banach, dim G ≥ 1, et q un nombre réel tel que $1 \leq q < 2$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $q \notin I_E$.

b) $q \notin I_{E,G}$.

c) Pour tout entier n, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur linéaire w de E' dans l_n^q, continu pour $\sigma(E',E)$, et une suite $(y_1,\dots,y_n)$ de vecteurs de norme 1 dans E', tels que l'on ait :

$$\|w\| < 1+\varepsilon \ , \quad \text{et} \quad w(y_i) = e_i \qquad i = 1,\dots,n$$

((e_i) désignant la base canonique de l_n^q).

<u>Démonstration</u> : Nous avons déjà b) ⇒ c) d'après le théorème 84 et c) ⇒ a) d'après la proposition 85. Il reste à prouver que a) ⇒ b), ou de façon équivalente :

$$q \in I_{E,G} \quad \Rightarrow \quad q \in I_E \ .$$

Pour montrer que $q \in I_E$, il suffit de prouver d'après le théorème 23 que l'on a pour tout opérateur $v \in N(E,l^q)$:

Démonstration : Nous démontrerons d'abord un lemme.

Lemme 88 : Soit E un espace de Banach tel que $q \notin I_E$, $1 \leq q \leq \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n il existe une suite $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs de norme 1 dans E telle que l'on ait pour toute suite $(c_1,\dots,c_n)$ de réels :

$$\|\Sigma\, c_i x_i\| \leq (1+\varepsilon)\ (\Sigma\, |c_i|^{q'})^{1/q'}$$

soit $$M_q((x_i)) \leq 1+\varepsilon.$$

Démontrons le lemme. Soient $\varepsilon > 0$ et n entier donnés. D'après le théorème 84, il existe un opérateur w de E' dans l_n^q et une suite $(y_1,\dots,y_n)$ de vecteurs de norme 1 dans E' tels que :

$$\|w\| \leq 1+\varepsilon \quad , \ w(y_i) = e_i \quad , \ w \text{ continu pour } \sigma(E',E).$$

Soit v le transposé de w, qui opère de $l_n^{q'}$ dans E.

Posons $x_i = v(e_i)$. On a :

$$< x_i, y_i > \ = \ < v(e_i), y_i > \ = \ < e_i, w(y_i) > \ = 1, \text{ donc } \|x_i\| \geq 1.$$

D'autre part :

$$\|\Sigma\, c_i x_i\| = \|v((c_i))\| \leq (1+\varepsilon)\ (\Sigma\, |c_i|^{q'})^{1/q'}.$$

Le résultat sera vrai a fortiori si on remplace x_i par $\dfrac{x_i}{\|x_i\|}$, ce qui démontre le lemme.

Montrons maintenant le corollaire 87. Soit (α_i) une suite de réels ≥ 0 telle que $\Sigma|\alpha_i|^{q'} < \infty$. On peut trouver une suite croissante d'entiers (N_k) tendant vers l'infini telle que :

$$\left(\sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} |\alpha_i|^{q'}\right)^{1/q'} \leq 2^{-k} .$$

Pour chaque k soit $(z_{N_k+1},\ldots,z_{N_{k+1}})$ une suite de vecteurs de norme 1 dans E vérifiant la propriété du lemme 88. Posons $x_i = \alpha_i z_i$, et montrons que la série Σx_i est inconditionnellement convergente. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe une constante M telle que l'on ait pour toute suite (c_i), dont un nombre fini de termes seulement sont non nuls, et $|c_i| \leq 1$ pour chaque i :

$$\|\Sigma c_i x_i\| \leq M .$$

Or :

$$\|\Sigma c_i x_i\| \leq \sum_k \left\|\sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} c_i x_i\right\|$$

$$= \sum_k \left\|\sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} c_i\alpha_i z_i\right\| \leq (1+\varepsilon) \sum_k \Big(\sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} |c_i\alpha_i|^{q'}\Big)^{1/q'}$$

$$\leq (1+\varepsilon) \sum_k \Big(\sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} |\alpha_i|^{q'}\Big)^{1/q'} \leq 2(1+\varepsilon),$$

ce qui démontre la première assertion du corollaire. La deuxième est alors immédiate : si $q = 1$, cela résulte de la "conjecture de Pietsch". Sinon soit $p < q$. On peut supposer $1 \leq p < q$. Soit (α_i) une suite de réels ≥ 0 telle que :

$$\Sigma|\alpha_i|^{p'} < \infty \qquad ; \qquad \Sigma|\alpha_i|^{q'} = +\infty .$$

Si $p \notin I_E$, on peut trouver une suite (x_i) dans E inconditionnellement convergente, telle que $\|x_i\| = \alpha_i$, donc $\Sigma \|x_i\|^{q'} = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse.

<u>Remarque 89</u> : Inversement si $p \in I_E$, $1 \leq p \leq \infty$, toute série $\Sigma\, x_i$ inconditionnellement convergente dans E vérifie $\Sigma \|x_i\|^{p'} < \infty$. En effet, (x_i) est en particulier une suite scalairement l^1, donc d'après le corollaire 25 on a $\Sigma \|x_i\|^{p'} < \infty$. Cela prouve, compte tenu du théorème de Dvoretzky-Rogers, que l'on a toujours pour un espace de Banach E de dimension infinie :

$$I_E \subset [0,2].$$

En effet si $p > 2$, on peut trouver une suite (α_i) de réels ≥ 0 telle que :

$$\Sigma\, |\alpha_i|^2 < \infty \quad , \quad \Sigma\, |\alpha_i|^{p'} = +\infty .$$

Si $p \in I_E$, toute suite (x_i) inconditionnellement convergente doit vérifier $\Sigma \|x_i\|^{p'} < \infty$, ce qui contredit le théorème de Dvoretzky-Rogers, puisqu'il existe une série (x_i) inconditionnellement convergente telle que $\|x_i\| = |\alpha_i|$.

<u>Corollaire 90</u> : Soit E un espace de Banach de dimension infinie. L'ensemble I_E est un segment ouvert $]0,q[$, $q \leq 2$, ou le segment $[0,2]$.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que I_E est un segment de la forme $]0,q[$ ou

$]0,q]$, et avec $q \leq 2$ d'après la remarque 89. Supposons $q < 2$, et $I_E =]0,q]$. Soient $\varepsilon > 0$ et n entier donnés. Choisissons $\varepsilon_1 > 0$ tel que $(1+\varepsilon_1)^2 \leq 1+\varepsilon$, et $\alpha > 0$ tel que l'injection i de $l_n^{q+\alpha}$ dans l_n^q ait une norme $\leq 1+\varepsilon_1$. Par hypothèse $q+\alpha \notin I_E$.

Il existe par conséquent un opérateur linéaire w de E' dans $l_n^{q+\alpha}$, continu pour $\sigma(E',E)$, et une suite $(y_1,\ldots,y_n)$ de vecteurs de norme 1 dans E' tels que :

$$\|w\| \leq 1+\varepsilon_1 \qquad , \qquad w(y_i) = e_i \ .$$

Mais alors $w_1 = i \circ w$ est un opérateur de E' dans l_n^q vérifiant $w_1(y_i) = e_i$ pour chaque i, et $\|w_1\| \leq 1+\varepsilon$, et on peut trouver un tel w_1 pour tout entier n. D'après la proposition 85, $q \notin I_E$, d'où une contradiction qui achève la démonstration.

Nous avons défini l'ensemble I_E comme l'ensemble des réels $q > 0$ tels que $\forall F$, $\Pi_q(E,F) = \Pi_o(E,F)$. A priori, nous pourrions définir pour tout $p > 0$ l'ensemble $I_{p,E}$ des réels $q > p$ tels que $\Pi_q(E,F) = \Pi_p(E,F)$ pour tout espace quasi-normé F. En fait cela est inutile car nous allons montrer que $I_{p,E} \subset I_E$.

<u>Corollaire 91</u> : Soient E un espace de Banach, q et q_1 deux nombres réels tels que $1 \leq q < q_1$. Si on a pour tout espace de Banach F :

$$\Pi_{q_1}(E,F) = \Pi_q(E,F) \ ,$$

on a en fait :

$$\Pi_{q_1}(E,F) = \Pi_o(E,F), \quad \text{i.e. } q_1 \in I_E \ .$$

<u>Démonstration</u> : Si l'on a $\Pi_{q_1}(E,F) = \Pi_q(E,F)$ pour tout espace de Banach F, il existe une constante C telle que l'on ait pour tout F et tout opérateur $v \in \Pi_{q_1}(E,F)$:

$$\pi_q(v) \leq C\, \pi_{q_1}(v) .$$

Soit n un entier. Si $q \notin I_E$, on peut trouver d'après le lemme 88 une suite $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs de norme 1 dans E telle que $M_q((x_i)) \leq 2$.

Mais d'autre part, d'après le théorème 23, on peut écrire $x_i = \alpha_i y_i$, où $\Sigma|\alpha_i|^r \leq 1$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r}$, et $M_{q_1}((y_i)) \leq C\, M_q((x_i))$, d'où $\sup_i \|y_i\| \leq 2C$, et :

$$(\Sigma \|x_i\|^r)^{1/r} \leq 2C .$$

Or $\|x_i\| = 1$, donc $n^{1/r} \leq 2C$, d'où une contradiction puisque n est arbitraire et $r < +\infty$. Donc $q \in I_E$ et aussi $q_1 \in I_E$.

Nous allons maintenant voir que les espaces tels que $1 \notin I_E$ admettent une caractérisation assez simple. Rappelons deux points de terminologie : on dit que deux espaces de Banach E et F sont λ-isomorphes si $d(E,F) \leq \lambda$ (cf. chapitre 0) ; on dit qu'un sous-espace G de E est λ-complémenté dans E s'il existe une projection π de E sur G, de norme $\|\pi\| \leq \lambda$.

<u>Théorème 92</u> : Soit E un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $1 \notin I_E$

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n, E contient un sous-espace $(1+\varepsilon)$-isomorphe à l_n^∞ (donc $(1+\varepsilon)$-complémenté dans E).

Démonstration : L'implication b) $\Rightarrow$ a) résulte immédiatement de la proposition 85. Inversement, si $1 \notin I_E$, on peut trouver d'après le théorème 84 pour tout entier n et tout $\varepsilon > 0$ un opérateur w de E' dans l_n^1 et une suite de vecteurs de norme 1 dans E' $(y_1,\dots,y_n)$ tels que :

$$\|w\| \leq 1+\varepsilon \quad ; \quad w(y_i) = e_i \quad , \quad w \text{ est continu pour } \sigma(E',E).$$

Considérons l'opérateur σ de l_n^1 dans E' défini par :

$$\sigma((c_i)) = \Sigma\, c_i y_i \ .$$

On a $\|\sigma\| \leq 1$, et $w \circ \sigma = \mathrm{Id}$. Par conséquent, le sous-espace F de E' engendré par $(y_1,\dots,y_n)$ est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à l_n^1, et $\sigma \circ w$ est une projection de norme $\leq (1+\varepsilon)$ de E' sur F, continue pour $\sigma(E',E)$. On en déduit le résultat par transposition.

Théorème 93 : Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Si E est de cotype 2, on a :

$$I_E =]0,2] \ .$$

Démonstration : D'après le corollaire 91, il suffit de montrer qu'il existe un réel $q < 2$ tel que l'on ait pour tout espace de Banach F :

$$\Pi_2(E,F) = \Pi_q(E,F) \ .$$

Or, c'est précisément ce que nous avons démontré dans le corollaire 75.

Nous allons maintenant retrouver le théorème de Grothendieck :

$$\mathcal{L}(L^1,L^2) = \Pi_1(L^1,L^2) \ .$$

En fait, nous trouverons une amélioration puisque nous allons démontrer

$$\mathcal{L}(L^1,L^2) = \prod_0(L^1,L^2) .$$

Théorème 94 : Soient (X,ν) un espace mesuré quelconque et H un espace de Hilbert. Tout opérateur linéaire continu de $L^1(X,\nu)$ dans H est 0-sommant.

Démonstration : On sait que tout espace de Hilbert H peut se plonger isométriquement dans un espace $L^1(\Omega,\mu)$, donc par dualité H s'identifie à un quotient de $L^\infty(\Omega,\mu)$ par un sous-espace X fermé pour $\sigma(L^\infty,L^1)$. D'autre part, tout opérateur linéaire continu u d'un espace $L^1(X,\nu)$ dans un quotient $G = E'/X$ d'un dual E' par un sous-espace X fermé pour $\sigma(E',E)$ admet un relèvement linéaire et continu, c'est-à-dire un opérateur v de $L^1(X,\nu)$ dans E' tel que $u = \pi \circ v$, en désignant par π la projection de E' sur G. Par conséquent, si u est un opérateur linéaire continu de $L^1(X,\nu)$ dans H, il admettra la factorisation :

$$L^1(X,\nu) \xrightarrow{v} L^\infty(\Omega,\mu) \xrightarrow{\pi} H .$$

Or, tout opérateur d'un espace L^∞ dans un espace de Hilbert est 2-sommant d'après [27] exposé X, théorème 4, donc u est 2-sommant. D'autre part, $L^1(X,\nu)$ est de cotype 2 d'après la proposition 72, donc u est 0-sommant par le théorème 93.

Nous allons voir comment le résultat précédent permet d'améliorer un un théorème de Kwapien et Pelczynski [11]. A partir de ce résultat, on a caractérisé complètement dans [17] les opérateurs diagonaux p-radonifiants de l^q dans S définis par une suite décroissante, $0 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, S désignant l'espace des séries convergentes. Rappelons le résultat de [11] : si α est un opérateur diagonal de l^1 dans S tel que la suite $|\alpha_n|$ $(\text{Log } n)^{1+\delta}$ soit bornée pour un $\delta > 0$, l'opérateur α est 1-sommant.

<u>Théorème 95</u> : Soit α un opérateur diagonal de l^1 dans l'espace S des séries convergentes. Si la suite $|\alpha_n|$ Log n est bornée, l'opérateur α est 0-sommant de l^1 dans S, et plus précisément 0-radonifiant de l^1 dans S.

<u>Démonstration</u> : Montrons tout d'abord que α est 0-sommant. L'espace l^1 est de cotype 2, donc $2 \in I_{l^1}$ d'après le théorème 93. Il suffit donc de montrer que α est 2-sommant.

Soit (x_n) une suite d'éléments de l^1, dont un nombre fini seulement est non nul. Considérons l'opérateur w de l^2 dans l^1 défini par :

$$w((c_n)) = \sum c_n x_n .$$

D'après le théorème 50, il existe une constante universelle K telle que w admette la factorisation :

$$l^2 \xrightarrow{w_1} l^2 \xrightarrow{\beta} l^1$$

où β est un opérateur diagonal, $\|\beta\| \leq 1$, et $\|w_1\| \leq K \|w\| = K\, M_2((x_n))$.

Autrement dit, il existe une suite (y_n) d'éléments de l^2 (où $y_n = w_1(e_n)$, (e_n) désignant la base canonique) telle que :

$$\beta(y_n) = x_n \quad ; \quad M_2((y_n)) = \|w_1\| \leq K\, M_2((x_n)).$$

D'après la forme du théorème de Menchov donnée par L. Schwartz dans [28], il existe une constante universelle M telle que :

$$\pi_2(\alpha \circ \beta) \leq M \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \beta_n \operatorname{Log}(n+1))^2 \right)^{1/2} .$$

Or :

$$\left(\sum (\alpha_n \beta_n \operatorname{Log}(n+1))^2\right)^{1/2} \leq \sup_n |\alpha_n \operatorname{Log}(n+1)| \quad \left(\sum |\beta_n|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \sup_n |\alpha_n \operatorname{Log}(n+1)| .$$

On a par conséquent :

$$\left(\sum \|\alpha(x_n)\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum \alpha \circ \beta(y_n)^2\right)^{1/2} \leq \pi_2(\alpha \circ \beta)\, M_2((y_n))$$

$$\leq K\, M \sup_n |\alpha_n \operatorname{Log}(n+1)| .\ M_2((x_n)),$$

ce qui prouve que α est 0-sommant. Il reste à voir que α est 0-radonifiant de l^1 dans S : le problème est la suppression du bidual $\sigma(S'',S')$ [on supprime "approximativement" car l^∞ vérifie l'hypothèse d'approximation].

Soit λ une probabilité cylindrique de type zéro sur l^1. D'après le théorème 93 et le corollaire 34, λ est 2-cylindriquement de type zéro, donc $\alpha(\lambda)$ est de Radon sur S d'après la proposition 22.

On voit que le raisonnement ci-dessus prouve le résultat suivant, analogue au corollaire 78 f) : pour qu'un opérateur linéaire continu v de l^1 dans un espace quasi-normé F soit p-sommant, $0 \leq p \leq 2$, il faut et il suffit que pour tout opérateur diagonal β de l^2 dans l^1 l'opérateur $v \circ \beta$ soit p-sommant de l^2 dans F.

Corollaire 96 : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité et (X_n) une suite de variables aléatoires réelles telle que pour toute suite de réels $(c_n) \in l^\infty$, la série $\Sigma\, c_n X_n$ converge en probabilité.♦ La série $\Sigma\, X_n/\mathrm{Log}(n+1)$ converge presque sûrement.

Démonstration : L'opérateur $(c_n) \to \Sigma\, c_n X_n$ de l^∞ dans $L^0(\Omega,\mu)$ est continu d'après le théorème de Banach-Steinhaus, et définit donc une probabilité cylindrique λ de type zéro sur l^1. D'après le théorème 95, l'opérateur diagonal α défini par la suite $(1/\mathrm{Log}(n+1))$ est 0-radonifiant, donc $\alpha(\lambda)$ est de Radon sur S. Mais $\alpha(\lambda)$ est évidemment décomposée par :

$$\omega \longrightarrow (X_n(\omega)/\mathrm{Log}\ (n+1)).$$

Par conséquent, la suite ci-dessus est presque sûrementdans S, ce qui est le résultat demandé.

♦ Il suffit pour cela que la série $\Sigma\, X_n$ soit inconditionnellement convergente en probabilité, cf. problème 128 et addendum.

IX. Application aux plongements dans les espaces L^p.

Dans ce chapitre nous allons appliquer les résultats des sections précédentes à certaines questions concernant les plongements d'un espace de Banach, ou plus généralement d'un espace quasi-normé, dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, $0 \leq p \leq 2$.

Nous distinguerons une classe spéciale de plongements, que nous appellerons plongements forts : si E est un espace quasi-normé, (Ω,μ) un espace de probabilité, et u un plongement de E dans $L^p(\Omega,\mu)$. $0 < p \leq 2$, nous dirons que u est plongement fort si les topologies de $L^p(\Omega,\mu)$ et de $L^o(\Omega,\mu)$ coïncident sur l'image u(E). Plus généralement, soit (Ω,μ) un espace mesuré quelconque, et h une fonction ≥ 0 telle que $\int h\, d\mu = 1$. Posons $A = \{ h > 0 \}$, et définissons un opérateur w_h de $L^p(\Omega,\mu)$ dans $L^p(\Omega,h\mu)$ par :

$$w_h(f) = \chi_A\, h^{-1/p}\, f \; .$$

Nous dirons alors qu'un plongement u d'un espace quasi-normé E dans $L^p(\Omega,\mu)$ est un plongement fort s'il existe une fonction h comme ci-dessus telle que $w_h \circ u$ soit un plongement fort de E dans $L^p(\Omega,h\mu)$.

Nous désignerons par J_E l'ensemble des $p > 0$ tels que E admette un plongement fort dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$. (Naturellement, une condition nécessaire pour que J_E soit non vide est que E soit plongeable dans un espace $L^o(\Omega,\mu)$.).

Nous désignerons par K_E l'ensemble des réels $p \in \,]0,2]$ tels que E soit de type p.

<u>Proposition 97</u> : Soient E un espace quasi-normé, (Ω,μ) un espace mesuré, p un réel > 0 et u un plongement de E dans $L^p(\Omega,\mu)$. S'il existe un nombre réel $q > p$ tel que $C_{p,q}(u)$ soit fini, u est un plongement fort.

<u>Démonstration</u> : Posons $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Si l'on a $C_{p,q}(u) < \infty$, il existe une fonction mesurable g telle que $\int |g|^r d\mu = 1$, et une constante M telle que l'on ait pour tout $x \in E$:

$$\left(\int \left|\frac{u(x)}{g}\right|^q d\mu\right)^{1/q} \leq M \|x\| .$$

Posons $A = \{|g| > 0\}$, $\nu = |g|^r \mu$, $w(f) = \chi_A |g|^{-r/p} f$, $u_1 = w \circ u$. L'opérateur u_1 est linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\nu)$, et l'inégalité ci-dessus devient :

$$\left(\int |u_1(x)|^q d\nu\right)^{1/q} \leq M \|x\| .$$

D'autre part $\int |u_1(x)|^p d\nu = \int |u(x)|^p d\mu$, donc u_1 est encore un plongement de E dans $L^p(\Omega,\nu)$. Soit $c > 0$, et posons $a_p = \sup\{1, 2^{1/p-1}\}$. On a si $x \in E$:

$$\begin{aligned}\left(\int |u_1(x)|^p d\nu\right)^{1/p} &\leq a_p\left[\left(\int_{|u_1(x)| \leq c} |u_1(x)|^p d\nu\right)^{1/p} + \left(\int_{|u_1(x)| > c} |u_1(x)|^p d\nu\right)^{1/p}\right] \\ &\leq a_p\left[c + \left(\int |u_1(x)|^q d\nu\right)^{1/q} (\nu\{|u_1(x)| > c\})^{1/r}\right] \\ &\leq a_p\left[c + M\|x\| (\nu\{|u_1(x)| > c\})^{1/r}\right].\end{aligned}$$

Puisque u_1 est un plongement, il existe $m > 0$ tel que l'on ait pour tout $x \in E$:

$$m\,\|x\| \leq \left(\int |u_1(x)|^p \, d\nu\right)^{1/p} .$$

On en déduit :

$$\|x\| < c\, a_p \left[m - M(\nu\{|u_1(x)| > c\})^{1/r}\right]^{-1} .$$

Par conséquent si $(u_1(x_n))$ tend vers zéro dans $L^o(\Omega,\nu)$, on obtient pour tout $c > 0$:

$$\limsup \|x_n\| < c\, a_p\, m^{-1} ,$$

donc :

$$\lim \|x_n\| = 0,$$

ce qui prouve que u_1, donc aussi u, est un plongement fort.

<u>Théorème 98</u> : Soit (Ω,μ) un espace de probabilité. Si E est un espace de Banach de dimension infinie plongeable dans $L^o(\Omega,\mu)$, on a :

$$J_E \cap \left]0,2\right] = K_E.$$

De plus, si E vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, ou si E est plongeable dans $L^1(\Omega,\mu)$:

$$J_E \cap \left]0,2\right] = K_E = I_{E'} .$$

Démonstration : Soit $p \in J_E \cap \left]0,2\right]$. Par hypothèse, il existe un espace de probabilité (X,ν) et un plongement u de E dans $L^p(X,\nu)$, tel que les topologies de $L^p(X,\nu)$ et $L^q(X,\nu)$, $0 \leq q \leq p$ coïncident sur $u(E)$. L'espace E est alors de type p d'après la remarque 47.

Supposons maintenant $p \in K_E$, c'est-à-dire E de type p.

Soit $r \in]0,1[$. D'après la proposition 43, tout opérateur linéaire continu de E dans l^r est p-cylindriquement de type r, donc :

$$\forall F, \quad \Pi_p(E',F) = \Pi_r(E',F)$$

d'après le théorème 23 et le deuxième point de la remarque 24. On a donc bien $p \in I_{E'}$.

Nous avons montré dans le cas général :

$$J_E \cap]0,2] \subset K_E \subset I_{E'} .$$

Il nous reste à montrer que $K_E \subset J_E$ dans le cas général, et que $I_{E'} \subset J_E$ sous les conditions de l'énoncé.

Supposons donc maintenant que $p \in K_E$, ou bien que $p \in I_{E'}$ et que E vérifie l'approximation métrique. Soit u un plongement de E dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$. Dans chacun des deux cas, u est p-cylindriquement de type zéro : dans le premier cas d'après la proposition 43, et dans le second cas d'après le corollaire 34. On peut donc écrire $u = T_g \circ u_1$, où u_1 est un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\mu)$. Nécessairement u_1 est un plongement de E dans $L^p(\Omega,\mu)$. Montrons que c'est un plongement fort : soit (x_n) une suite d'éléments de E, telle que $u_1(x_n)$ tende vers zéro dans $L^0(\Omega,\mu)$. L'opérateur T_g est continu de $L^0(\Omega,\mu)$ dans lui-même, donc $T_g(u_1(x_n)) = u(x_n)$ tend vers zéro dans $L^0(\Omega,\mu)$. Mais puisque u était un plongement de E dans $L^0(\Omega,\mu)$, la suite (x_n) tend vers zéro dans E, ce qui prouve que u_1 est un plongement fort, et donc $p \in J_E$.

Supposons pour finir que $p \in I_{E'}$, et soit u un plongement de E dans un espace $L^1(\Omega,\mu)$. Dans le cas $p < 1$, on a $p \in J_E$, car l'espace $L^1(\Omega,\mu)$ lui-même se plonge fortement dans un espace L^p. Dans le cas $p > 1$, l'opérateur u est p-cylindriquement de type 1 d'après le théorème 23, et on raisonne comme précédemment. Enfin si $p = 1$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $1+\varepsilon \in I_{E'}$ d'après le corollaire 90, donc $(1+\varepsilon) \in J_E$ d'après ce qui précède, donc à fortiori $1 \in J_E$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 99 : Soient E un espace de Banach, et p un réel tel que $0 < p < 2$,

a) Si $p \in J_E$, tout plongement u de E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ est un plongement fort.

b) Si u est un plongement fort de E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, il existe un réel $q > p$ tel que u soit q-cylindriquement de type p.

Démonstration : Pour prouver à la fois a) et b), il suffit, compte tenu de la proposition 97, de démontrer l'énoncé suivant : si $p \in J_E$, et si u est un plongement de E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, il existe un réel $q > p$ tel que u soit q-cylindriquement de type p. Dans le cas $p < 1$, cela résulte simplement du théorème 50 c).

On peut supposer alors $p \geq 1$, donc E est plongeable dans un espace $L^1(\Omega,\mu)$, donc d'après le théorème 98 :

$$I_{E'} = K_E = J_E \cap \left]0,2\right] .$$

D'après le corollaire 90, il existe un réel $q > p$ tel que $q \in I_{E'}$, donc $q \in K_E$. L'opérateur u est donc q-cylindriquement de type p d'après la proposition 43.

<u>Remarque 100</u> : Le corollaire 99 a) est évidemment faux lorsque $p = 2$. Supposons que E soit un espace $L^2(\Omega,\mu)$. On a alors $2 \in J_E$, mais le plongement de E dans $L^2(\Omega,\mu)$ fourni par l'identité n'est pas un plongement fort. Par contre, 99 a) reste vrai pour $p > 2$: si $p \in J_E$ avec $p > 2$, E est isomorphe à un espace de Hilbert, et tout plongement d'un espace de Hilbert dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, $p > 2$, est un plongement fort, d'après Kadec et Pelczynski [7].

Le corollaire 99 b) est faux pour tout $p \geq 2$. (cf. H. P. Rosenthal [25]).

Si E et F sont deux espaces de Banach, posons :

$$\Delta(E,F) = \inf \{ d(E,G) \mid G \subset F \} .$$

<u>Corollaire 101</u> : Soit E un espace de Banach plongeable dans un espace $L^o(\Omega,\mu)$, tel que $\lim \Delta(l_n^\infty,E') = +\infty$, et vérifiant l'hypothèse d'approximation métrique.

a) Tout plongement de E dans un espace $L^p(X,\nu)$, $0 < p < 1$, est un plongement fort.

b) Il existe $\alpha > 0$ tel que E soit plongeable dans $L^{1+\alpha}(\Omega,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de prouver b), qui implique aussitôt a). D'après le théorème 92, l'hypothèse $\lim \Delta(l_n^\infty,E') = +\infty$ implique que $1 \in I_{E'}$, donc d'après le corollaire 90 il existe $\alpha > 0$ tel que $1 - \alpha \in I_{E'}$.
On en déduit $1 + \alpha \in J_E$ par le théorème 98, c'est-à-dire qu'il existe un plongement fort de E dans un espace $L^{1+\alpha}(\Omega,\mu)$, ce qui achève la démonstration.

<u>Proposition 102</u> : Soient r un nombre réel tel que $0 < r \leq 1$, et E un espace r-normé plongeable dans un espace $L^o(\Omega,\mu)$.

a) Tout plongement de E dans un espace $L^p(X,\nu)$, $0 < p < r$, est un plongement fort.

b) Pour tout nombre réel q tel que $0 < q < r$, il existe un plongement de E dans un espace $L^q(X,\nu)$.

Démonstration : D'après le théorème 50, un espace r-normé est de type q pour tout $q \in]0,r[$. Par conséquent tout opérateur de E dans un espace $L^p(X,\nu)$, $0 < p \leq q < r$, est q-cylindriquement de type p, d'où l'on déduit immédiatement a) et b).

X. Extension aux espaces d'Orlicz.

Dans ce chapitre, nous tenterons de généraliser certains des résultats des chapitres précédents dans le cas des espaces d'Orlicz.

Nous allons reposer le problème de la factorisation dans le cas des espaces d'Orlicz : soient E un espace de Banach, u un opérateur linéaire continu de E dans un espace $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$. Nous allons chercher à quelle condition l'opérateur u admet la factorisation :

$$E \longrightarrow L^{\Psi}(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^{\Phi}(\Omega,\mu) .$$

Pour résoudre ce problème, il faut commencer par déterminer les opérateurs de multiplication T_g de L^{Ψ} dans L^{Φ}. Nous nous limiterons pour l'instant au cas de fonctions de Young Φ convexes et telles que $\lim_{t \to \infty} \Phi(t)/t = +\infty$.

Nous utiliserons les notions suivantes : si Φ et Φ_1 sont deux fonctions de Young, nous dirons que Φ et Φ_1 sont équivalentes, ce que nous noterons $\Phi \sim \Phi_1$, s'il existe des constantes K_1, K_2, c_1, c_2 telles que :

$$\forall\, x \geq 0 \qquad K_1 \Phi_1(c_1 x) \leq \Phi(x) \leq K_2 \Phi_1(c_2 x)$$

$$(\text{avec } K_1 \text{ et } c_1 > 0).$$

Si Φ et Ψ sont deux fonctions de Young, nous dirons que Ψ domine Φ, ce que nous noterons $\Phi \prec \Psi$, si :

$$\forall\, x > 0 \qquad \lim_{y \to \infty} \Phi(xy)/\Psi(y) = 0 .$$

Rappelons la notion de fonction conjuguée de Young : soit Φ une fonction de Young convexe, et telle que $\lim_{x \to \infty} \Phi(x)/x = +\infty$, c'est-à-dire $x \prec \Phi(x)$. Définissons une nouvelle fonction Φ_* par :

$$\Phi_*(y) = \sup_{x \geq 0} \left[xy - \Phi(x) \right] .$$

Nous rappellerons les propriétés classiques des fonctions conjuguées de Young dans une proposition :

<u>Proposition 103</u> : Soit Φ une fonction de Young convexe telle que $x \prec \Phi(x)$.

a) Φ_* est une fonction de Young convexe, partout finie et telle que $x \prec \Phi_*(x)$.

b) $$(\Phi_*)_* = \Phi .$$

c) Pour que Φ soit partout dérivable, il faut et il suffit que Φ_* soit strictement convexe.

d) Si x est un point de dérivabilité de Φ, on a :

$$x\, \Phi'(x) = \Phi(x) + \Phi_*(\Phi'(x)) .$$

e) Si Φ et Φ_* sont partout dérivables, leurs dérivées sont des fonctions réciproques :

$$\Phi'(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \Phi_*'(y) .$$

Soient maintenant Φ et ψ deux fonctions de Young convexes.

Posons :

$$\theta(z) = \sup_{x,y \geq 0} \left[xyz - \Phi(x) - \psi(y) \right] .$$

On peut encore écrire :

$$\theta(z) = \sup_{x \geq 0} \left[\sup_{y \geq 0} [xyz - \psi(y)] - \Phi(x) \right] = \sup_{x \geq 0} [\psi_*(xz) - \Phi(x)],$$

ou de façon symétrique :

$$\theta(z) = \sup_{y \geq 0} [\Phi_*(yz) - \psi(y)] .$$

Nous poserons $\theta = [\Phi, \psi]$, et nous regrouperons les propriétés principales de cette transformation dans une nouvelle proposition :

<u>Proposition 104</u> : Soient Φ et ψ deux fonctions de Young convexes, telles que $x \prec \Phi(x)$, $x \prec \psi(x)$.

a) Si $\Phi_* \prec \psi$, ou $\psi_* \prec \Phi$, la fonction $\theta = [\Phi, \psi]$ est convexe, partout finie, et $\Phi_* \prec \theta$ [donc aussi $x \prec \theta(x)$].

b) $$[\Phi, [\Phi, \psi]] = \psi .$$

c) Si Φ_1 et ψ_1 sont deux fonctions de Young convexes telles que $\Phi_1 \sim \Phi$, $\psi_1 \sim \psi$, on a :

$$[\Phi, \psi] \sim [\Phi_1, \psi_1] .$$

d) Supposons $\Phi_* \prec \psi$. Pour tout $z \geq 0$, il existe x et y tels que l'on ait, en posant $\theta = [\Phi, \psi]$:

$$xyz = \Phi(x) + \psi(y) + \theta(z).$$

<u>Démonstration</u> : Il est évident dans tous les cas que $\theta = [\Phi, \psi]$ est une

fonction convexe, puisque c'est un sup de fonctions affines.

Supposons $\Phi_* \prec \phi$, et prouvons que $\Phi_* \prec \theta$. Soit $x > 0$ donné, et soit $y \geq x$. On aura :

$$\theta(z) = \sup_{y' \geq 0} [\Phi_*(y'z) - \phi(y')]$$

donc :

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\theta(z)}{\Phi_*(xz)} \geq \lim_{z \to \infty} \left[\frac{\Phi_*(yz)}{\Phi_*(xz)} - \frac{\phi(y)}{\Phi_*(xz)}\right] = \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi_*(yz)}{\Phi_*(xz)} \geq \frac{y}{x}$$

puisque Φ_* est convexe.

Puisque y est arbitraire :

$$\lim_{z \to \infty} \theta(z)/\Phi_*(xz) = +\infty ,$$

soit $\Phi_* \prec \theta$.

Montrons maintenant que θ est partout finie. On a :

$$\theta(z) = \sup_{y \geq 0} [\Phi_*(yz) - \phi(y)] .$$

Puisque $\Phi_* \prec \phi$, la quantité $[\Phi_*(yz) - \phi(y)]$ devient négative pour $y \geq y_0$. Par conséquent :

$$\theta(z) = \sup_{0 \leq y \leq y_0} [\Phi_*(yz) - \phi(y)] .$$

On voit que $\theta(z)$ est le sup d'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné : le sup est donc fini, et il est atteint en un certain point y_1 :

$$\theta(z) = \Phi_*(y_1 z) - \phi(y_1) .$$

Maintenant :

$$\Phi_*(y_1 z) = \sup_{x \geq 0} [x y_1 z - \Phi(x)] .$$

En appliquant le même **raisonnement**, on voit que ce nouveau sup est atteint en un point x_1. Finalement :

$$x_1 y_1 z = \Phi(x_1) + \phi(y_1) + \theta(z) ,$$

ce qui démontre a) et d).

Démontrons maintenant b). Posons $\theta = [\Phi, \phi]$, et $\phi_1 = [\Phi, \theta]$. Nous devons montrer que $\phi \leq \phi_1$. En effet, ϕ_1 est par définition la plus petite fonction telle que l'on ait tout triplet (x,y,z) :

$$xyz \leq \Phi(x) + \phi_1(y) + \theta(z) .$$

Or, par définition de θ, on a :

$$xyz \leq \Phi(x) + \phi(y) + \theta(z) \text{, donc } \psi_1 \leq \psi .$$

Montrons que $\phi_1 \geq \phi$. On a :

$$\begin{aligned}
\phi_1(y) &= \sup_{x,z \geq 0} [xyz - \Phi(x) - \theta(z)] \\
&= \sup_{x,z \geq 0} \inf_{x',y' \geq 0} [xyz - x'y'z' - \Phi(x) + \Phi(x') + \phi(y')] \\
&\geq \sup_{x \geq 0} \sup_{z \geq 0} \inf_{x' \geq 0} [(x-x')yz - \Phi(x) + \Phi(x') + \phi(y)] .
\end{aligned}$$

Considérons la quantité :

$$A(x) = \sup_{z \geq 0} \inf_{x' \geq 0} \left[(x-x')yz - \Phi(x) + \Phi(x') + \phi(y)\right] .$$

Cette quantité est inférieure ou égale à $\phi(y)$. (Prendre $x' = x$). Inversement prenons $z_o = \frac{1}{y} \Phi'_g(x)$. Puisque Φ est convexe, la fonction affine

$$x' \to \left[(x'-x) \Phi'_g(x) + \Phi(x)\right]$$

est inférieure à $\Phi(x')$, soit :

$$\forall x', \qquad (x-x')yz_o - \Phi(x) + \Phi(x') \geq 0$$

donc :

$$A(x) \geq \inf_{x' \geq 0} \left[(x-x')yz_o - \Phi(x) + \Phi(x') + \phi(y)\right] \geq \phi(y) ,$$

ce qui prouve que $A(x) = \phi(y)$. Finalement :

$$\phi_1(y) = \sup_{x \geq 0} A(x) = \phi(y) ,$$

ce qui démontre b).

Pour finir, montrons c). Si Φ_1 et ϕ_1 sont deux fonctions de Young convexes telles que $\Phi_1 \sim \Phi$, $\phi_1 \sim \phi$, on peut trouver deux constantes K et c telles que :

$$\forall x \geq 0 \qquad \Phi(x) \leq K \Phi_1(cx) \; ; \; \phi(x) \leq K \phi_1(cx) .$$

On a alors en posant $\theta = [\Phi,\phi]$, $\theta_1 = [\Phi_1,\phi_1]$:

$$\theta_1(z) = \sup_{x,y \geq 0} [xyz - \Phi_1(x) - \phi_1(y)]$$

$$= \frac{1}{K} \sup_{x',y' \geq 0} [x'y'(Kc^2z) - K\,\Phi_1(cx') - K\,\phi_1(cy')]$$

$$\leq \frac{1}{K} \sup_{x',y' \geq 0} [x'y'(Kc^2z) - \Phi(x') - \phi(y')]$$

$$= \frac{1}{K}\ \theta(Kc^2z)\ .$$

On démontre de la même façon une inégalité en sens inverse, ce qui prouve que $\theta \sim \theta_1$ et achève la démonstration de la proposition.

Grâce à la proposition 103 b), nous pourrons parler de triplet de fonctions conjuguées $[\Phi,\phi,\theta]$, un tel triplet ayant la propriété que l'une quelconque des fonctions se déduit des deux autres par l'opération $[.,.]$. D'autre part, si on ne s'intéresse qu'aux classes d'équivalence de fonctions de Young, on pourra d'après c) remplacer deux des fonctions d'un triplet par des fonctions équivalentes plus agréables, par exemple par des fonctions dérivables et strictement convexes.

<u>Lemme 105</u> : Soit (Φ,ϕ,θ) un triplet de fonctions conjuguées tel que θ soit dérivable et strictement convexe. Il existe deux fonctions croissantes α et β définies sur $[0,+\infty[$ telles que :

$$\forall\, u \in [0,+\infty[, \qquad u = \alpha(u).\beta(u) \quad \text{et} \quad \theta(u) = \Phi(\alpha(u)) + \phi(\beta(u))\ .$$

Démonstration : Puisque θ est supposée dérivable et strictement convexe, il en est de même pour θ_* d'après la proposition 102 c). Soit $u_o \in [0,+\infty[$, et posons $z_o = \theta_*'(u_o)$. D'après la proposition 104 d), il existe x_o et y_o tels que l'on ait :

$$x_o y_o z_o = \Phi(x_o) + \phi(y_o) + \theta(z_o) .$$

(Le couple (x_o,y_o) n'est pas a priori unique. Nous choisissons un tel couple de façon quelconque.)

La fonction $z \to x_o y_o z - \Phi(x_o) - \phi(y_o) - \theta(z)$ est négative ou nulle. Elle atteint donc un maximum au point z_o, donc sa dérivée s'annule, soit :

$$x_o y_o = \theta'(z_o).$$

D'après la proposition 103 e), cela se traduit par :

$$\theta_*'(x_o y_o) = z_o.$$

Puisque θ_* est strictement convexe, θ_*' est strictement croissante, donc :

$$u_o = x_o y_o.$$

D'autre part, d'après la proposition 103 d), on a :

$$u_o \theta_*'(u_o) = \theta_*(u_o) + \theta(\theta_*'(u_o)),$$

soit aussi : $$x_o y_o z_o = \theta_*(u_o) + \theta(z_o) ,$$

donc :

$$\theta_*(u_o) = \Phi(x_o) + \phi(y_o) .$$

Posons $\alpha(u_o) = x_o$, $\beta(u_o) = y_o$. Pour achever la démonstration, il suffit de voir que α et β sont croissantes. Soit $u_1 \geq u_o$, $z_1 = \theta'_*(u_1) \geq \theta'_*(u_o) = z_o$, et (x_1, y_1) choisis comme ci-dessus. On aura :

$$x_o y_o = u_o \leq u_1 = x_1 y_1 ,$$

donc :

$$x_o y_o z_o \leq x_1 y_1 z_1 .$$

La fonction $x \to x y_o z_o - \Phi(x) - \phi(y_o) - \theta(z_o)$ atteint un maximum au point x_o, et elle admet des dérivées à droite et à gauche. On aura donc :

$$\Phi'_g(x_o) \leq y_o z_o \leq \Phi'_d(x_o)$$

De même :

$$\Phi'_g(x_1) \leq y_1 z_1 \leq \Phi'_d(x_1)$$

Par conséquent :

$$x_o \Phi'_g(x_o) \leq x_o y_o z_o \leq x_1 y_1 z_1 \leq x_1 \Phi'_d(x_1),$$

ce qui implique $x_o \leq x_1$, et achève la démonstration.

<u>Corollaire 106</u> : Soient (Ω, μ) un espace mesuré et (Φ, ϕ, θ) un triplet de fonctions conjuguées tel que θ soit strictement convexe et dérivable. Toute fonction f mesurable ≥ 0 sur (Ω, μ), telle que $\int \theta_*(f)\, d\mu \leq 1$, peut se décom-

poser sous la forme f = gh, avec :

$$\int \Phi(g)\, d\mu + \int \phi(h)\, d\mu \leq 1 \ .$$

Démonstration : Si α et β sont les fonctions données par le lemme 105, il suffit de poser :

$$g(\omega) = \alpha(f(\omega)) \qquad ; \qquad h(\omega) = \beta(f(\omega)) \ .$$

Proposition 107 : Soient (Ω,μ) un espace mesuré et (Φ,ϕ,θ) un triplet de fonctions conjuguées. Les opérateurs de multiplication continus de $L^{\phi}(\Omega,\mu)$ dans $L^{\Phi_*}(\Omega,\mu)$ sont exactement ceux qui sont définis par les fonctions de $L^{\theta}(\Omega,\mu)$.

Démonstration : Toute fonction de Young convexe est équivalente à une fonction de Young strictement convexe et dérivable. On peut donc supposer θ strictement convexe et dérivable, quitte à remplacer ϕ par une fonction équivalente, ce qui ne modifie pas l'espace $L^{\phi}(\Omega,\mu)$. (On applique la proposition 104 b) et c).)

Soit alors f une fonction mesurable ≥ 0 sur (Ω,μ), telle que T_f définisse un opérateur continu de $L^{\phi}(\Omega,\mu)$ dans $L^{\Phi_*}(\Omega,\mu)$. Pour montrer que $f \in L^{\theta}(\Omega,\mu)$, il suffit de montrer qu'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute fonction mesurable ≥ 0 f_* sur (Ω,μ) :

$$\int \theta_*(f_*)\, d\mu \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int f f_*\, d\mu \leq C$$

(cf. par exemple [30]).

Or, d'après le corollaire 106, on peut décomposer une telle fonction f_* sous la forme :

$$f_* = gh \qquad \text{et} \qquad \int \Phi(g)\, d\mu + \int \psi(h)\, d\mu \leq 1,$$

donc en particulier :

$$\int \Phi(g)\, d\mu \leq 1 \ ; \quad \int \psi(h)\, d\mu \leq 1.$$

Par hypothèse, $fh = T_f(h)$ appartient à la boule de rayon $\|T_f\|$ dans $L^{\Phi_*}(\Omega,\mu)$, donc :

$$\frac{1}{\|T_f\|}\int f f_*\, d\mu = \int \left(\frac{1}{\|T_f\|} fh\right) g\, d\mu$$

$$\leq \int \Phi_*\left(\frac{fh}{\|T_f\|}\right) d\mu + \int \Phi(g)\, d\mu \leq 2,$$

ce qui prouve que $f \in L^{\theta}(\Omega,\mu)$. Inversement, il est évident qu'une fonction $f \in L^{\theta}(\Omega,\mu)$ définit un opérateur continu de $L^{\psi}(\Omega,\mu)$ dans $L^{\Phi_*}(\Omega,\mu)$, d'après la relation :

$$\Phi_*(xy) \leq \psi(x) + \theta(y).$$

Nous aurons besoin du lemme suivant : (Rappelons qu'une fonction Φ est dite sous-multiplicative si l'on a pour tous $x,y \geq 0$: $\Phi(xy) \leq \Phi(x)\,\Phi(y)$, et surmultiplicative si $\Phi(xy) \geq \Phi(x)\,\Phi(y)$ pour tous $x,y \geq 0$.)

<u>Lemme 108</u> : Soient Φ et θ deux fonctions de Young convexes, telles que $x \prec \Phi(x)$, $x \prec \theta(x)$. On pose $\psi = \lceil \Phi_*, \theta \rceil$, et on suppose Φ sous-multiplicative, θ surmultiplicative. On a alors, pour tout couple (x,y) :

$$\psi\left(\frac{x}{\theta^{-1}(\Phi(y))}\right) \leq \Phi(y)\,\psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Démonstration : Posons $z = \theta^{-1}(\Phi(y))$, soit $\theta(z) = \Phi(y)$.

On aura :

$$\psi\left(\frac{x}{y}\right) = \sup_{u \geq 0} \left[\Phi\left(\frac{ux}{y}\right) - \theta(u)\right] ,$$

donc :

$$\Phi(y)\ \psi\left(\frac{x}{y}\right) = \sup_{u \geq 0} \left[\Phi(y)\ \Phi\left(\frac{ux}{y}\right) - \theta(z)\ \theta(u)\right]$$

$$\geq \sup_{u \geq 0} \left[\Phi(ux) - \theta(zu)\right]$$

$$= \sup_{u' \geq 0} \left[\Phi\left(u'\frac{x}{z}\right) - \theta(u')\right] = \psi\left(\frac{x}{z}\right),$$

ce qui démontre le lemme.

Nous allons maintenant donner la définition des opérateurs ψ-cylindriquement de type Φ, Φ et ψ étant deux fonctions de Young. Cette définition sera bien moins agréable que dans le cas des q-cylindriquement de type p !

Soient (Ω,μ) un espace mesuré. E un espace quasi-normé, Φ et ψ deux fonctions de Young telles que $\Phi \prec \psi$, et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$. Nous dirons que u est ψ-cylindriquement de type Φ s'il existe une constante C telle que pour toute suite $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs de norme ≤ 1 dans E, pour toute suite $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ de **réels** ≥ 0 telle que $\Sigma\alpha_i = 1$, on ait :

$$\int \Phi(a(\omega))\ d\mu(\omega) \leq C ,$$

où $a(\omega)$ est la fonction définie par :

$$\Sigma\alpha_i\ \psi\left(\frac{|u(x_i)\ (\omega)|}{a(\omega)}\right) = 1$$

[avec la convention $\frac{0}{0} = 0$].

Le théorème suivant est l'analogue du théorème 8. Il est cependant incomplet, car nous ignorons si la réciproque est vraie :

<u>Théorème 109</u> : Soient Φ et ϕ deux fonctions de Young convexes telles que $\Phi \prec \phi$, et $\theta = [\Phi_*, \phi]$. On suppose Φ sous-multiplicative, θ surmultiplicative, et on suppose que θ et θ_* vérifient la condition Δ_2.

Soient alors (Ω, μ) un espace mesuré, E un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^\Phi(\Omega, \mu)$. Si u est ϕ-cylindriquement de type Φ, il se factorise par $L^\phi(\Omega, \mu)$ et la multiplication par une fonction de $L^\theta(\Omega, \mu)$.

<u>Démonstration</u> : Si $(\alpha, x) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1, \dots, x_n)$ est le couple d'un système de réels $\alpha_i \geq 0$ tel que $\Sigma\, \alpha_i = 1$ et d'un système $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de norme ≤ 1 dans E, on notera $a_{(\alpha,x)}(\omega)$ la fonction définie par :

$$\sum \alpha_i \;\; \phi\left(\frac{|u(x_i)(\omega)|}{a_{(\alpha,x)}(\omega)}\right) = 1 \ .$$

Par hypothèse, il existe une constante C telle que l'on ait pour tout système (α, x) comme ci-dessus :

$$\int \Phi(a_{(\alpha,x)}(\omega)) \; d\mu(\omega) \leq C \ .$$

Désignons par K l'ensemble des fonctions g mesurables ≥ 0 sur (Ω, μ) telles que :

$$\int \theta(g) \; d\mu \leq C \ .$$

L'ensemble K est convexe, et compact pour la topologie $\sigma(L^{\theta}, L^{\theta *})$ (Car sous l'hypothèse faite sur θ, l'espace $L^{\theta}(\Omega,\mu)$ est réflexif [8]).

Pour chaque système (α, x), définissons une fonction $F_{(\alpha,x)}$ sur K par :

$$F_{(\alpha,x)}(g) = C - \sum \int \alpha_i \quad \phi\left(\frac{|u(x_i)|}{g} \right) d\mu.$$

L'ensemble des $F_{(\alpha,x)}$ est convexe, et chaque fonction $F_{(\alpha,x)}$ est concave.

De plus, posons :

$$g(\omega)_{(\alpha,x)} = \theta^{-1} \left(\Phi(a(\omega)_{(\alpha,x)})\right).$$

On aura :

$$\int \theta(g_{\alpha,x}) \, d\mu = \int \Phi(a_{\alpha,x}) \, d\mu \leq C \quad ,$$

donc $g_{\alpha,x} \in K$. D'autre part, d'après le lemme 108 :

$$\phi\left(\frac{|u(x_i)|}{g_{\alpha,x}}\right) \leq \Phi(a_{\alpha,x}) \, \phi\left(\frac{|u(x_i)|}{a_{\alpha,x}}\right),$$

d'où :

$$\sum \alpha_i \, \phi\left(\frac{|u(x_i)|}{g_{\alpha,x}}\right) \leq \sum \alpha_i \, \Phi(a_{\alpha,x}) \leq \Phi(a_{\alpha,x}),$$

d'où l'on déduit :

$$F_{\alpha,x}(g_{\alpha,x}) \leq 0 .$$

D'après le lemme 3, il existe une fonction $g_0 \in K$, telle que l'on ait pour tout système (α, x) :

$$F_{\alpha,x}(g_o) \geq 0 \ ,$$

et en particulier :

$$\forall\, x \in E,\ \|x\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int \psi \left(\frac{|u(x)|}{g_o} \right) d\mu \leq C \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

Comme dans le cas des fonctions t^p, nous ferons maintenant le lien avec la théorie des applications sommantes et radonifiantes. Nous avons défini les applications $(\Phi,0)$-sommantes au chapitre IV. Nous rappellerons maintenant la définition des opérateurs (Φ,Φ)-sommants. (cf.[1]) .

Soient Φ une fonction de Young convexe, E et F deux espaces de Banach et v un opérateur linéaire continu de E dans F. Nous dirons que u est (Φ,Φ)-sommant s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute probabilité λ à support fini sur E :

$$\Phi_1(v(\lambda)) \leq C\ \Phi_1^*(\lambda) \ .$$

(Pour les notations $\Phi_\alpha(\mu)$, $\Phi_\alpha^*(\mu)$, voir le chapitre IV)

On désignera par $\pi_{\Phi,\Phi}(v)$ la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Proposition 110 : Soient E un espace de Banach, Φ et ψ deux fonctions de Young convexes telles que $\Phi \prec \psi$. On suppose qu'il existe une constante C telle que l'on ait pour tout espace de Banach F et tout opérateur linéaire v $(\psi,0)$-sommant de E dans F :

$$\pi_{\Phi,\Phi}(v) \leq C\, \pi_{\psi}(v)\ .$$

Pour tout espace de probabilité (Ω,μ), tout opérateur linéaire continu de E' dans $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$ est alors ψ-cylindriquement de type Φ .

Démonstration : Soients (Ω,μ) un espace de probabilité et u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$ tel que $\|u\| \leq 1/C$ pour simplifier. Soient, d'autre part, $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ un système de vecteurs de norme 1 dans E', et $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ un système de nombres réels ≥ 0 tel que $\Sigma\, \alpha_i = 1$. Considérons l'espace $X = \{1,2,\ldots,n\}$ et la probabilité $\nu = \Sigma\, \alpha_i\, \delta_i$ sur X. Considérons d'autre part, l'opérateur v de E dans $L^{\Psi}(X,\nu)$ défini par :

$$v(x)\ (i) = (\ < x, \xi_i >\ ).$$

D'après le lemme 30, on a $\pi_{\psi}(v) \leq 1$, donc d'après notre hypothèse $\pi_{\Phi,\Phi}(v) \leq C$.

L'opérateur u définit une probabilité cylindrique λ de type Φ sur E. D'autre part, d'après [1] v est (Φ,Φ)-radonifiant de E dans $L^{\Psi}(X,\nu)$ (on supprime le bidual car $L^{\Psi}(X,\nu)$ est de dimension finie !), et :

$$\Phi_1(v(\lambda)) \leq C\ \Phi_1^{*}(\lambda) = C\ \|u\| \leq 1\ .$$

D'autre part, $v(\lambda)$ est décomposéepar la fonction φ de Ω dans $L^{\Psi}(X,\nu)$ définie par :

$$\omega \longrightarrow (u(\xi_i)\ (\omega))\ .$$

On a donc :

$$\Phi_1(v(\lambda)) \leq 1 ,$$

soit :

$$\int \Phi (\|\varphi(\omega)\|) d\mu(\omega) \leq 1 .$$

Or $\|\varphi(\omega)\|$ est précisément la fonction $a(\omega)$ telle que :

$$\Sigma \alpha_i \quad \psi \left(\frac{|u(x_i) \ (\omega)|}{a(\omega)} \right) = 1 .$$

On a donc prouvé que u est ψ-cylindriquement de type Φ.

<u>Proposition 111</u> : Soit Φ une fonction de Young convexe telle que $x \prec \Phi(x)$. Si E et F sont deux espaces de Banach et v un opérateur linéaire 1-sommant de E dans F, on a :

$$\pi_{\Phi,\Phi}(v) \stackrel{\bullet}{\leq} \pi_1(v) .$$

<u>Démonstration</u> : Soit λ une probabilité à support fini sur E, telle que $\Phi_1^*(\lambda) \leq 1$. Réalisons λ par un opérateur linéaire u de E' dans un espace $L^\Phi(\Omega,\mu)$. Soit f une fonction de $L^{\Phi*}(\Omega,\mu)$. Considérons l'opérateur $T_f \circ u$ de E' dans $L^1(\Omega,\mu)$. Il définit une nouvelle probabilité λ_f sur E, telle que :

$$\|\lambda_f\|_1^* = \|T_f \circ u\| \leq \|T_f\| \ \|u\| \leq \|T_f\| .$$

L'image $v(\lambda)$ de λ sur F est décomposée par une application φ de Ω dans F. Evidemment pour chaque f l'image de λ_f est décomposée par $f\varphi$. Puisque v est 1-sommante, on aura :

$$\|v(\lambda_f)\|_1 = \int |f| \, \|\varphi\| \, d\mu \leq \pi_1(v) \, \|\lambda_f\|_1^* \leq \|T_f\| \, \pi_1(v) \, .$$

Il est clair que la norme de T_f comme opérateur linéaire de $L^\Phi(\Omega,\mu)$ dans $L^1(\Omega,\mu)$ est égale à la norme de f comme forme linéaire sur $L^\Phi(\Omega,\mu)$. L'inégalité ci-dessus s'écrit encore :

$$\forall f \, , \quad \|T_f\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad | < f \, , \, \|\varphi\| > | \leq \pi_1(v) \, ,$$

ce qui prouve que la norme de $\|\varphi\|$ dans $L^\Phi(\Omega,\mu)$, c'est-à-dire aussi la norme de φ dans $L^\Phi(\Omega,\mu,F)$, est majorée par $\pi_1(v)$. Cette norme de φ est encore égale à $\Phi_1(v(\lambda))$, et finalement :

$$\Phi_1(v(\lambda)) \leq \pi_1(v) \quad \Phi_1^*(\lambda) \, ,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 112 : On pourrait, en utilisant la proposition 107, généraliser la proposition 111 de la façon suivante : si Φ et ψ sont deux fonctions de Young convexes, telles que $\Phi \prec \psi$, tout opérateur linéaire (Φ,Φ)-sommant est aussi (ψ,ψ)-sommant.

Théorème 113 : Soient Φ et ψ deux fonctions de Young convexes telles que $\Phi \prec \psi$, et soit $\theta = [\Phi_*,\psi]$. On suppose Φ sous-multiplicative, θ surmultiplicative, et on suppose que θ et θ_* vérifient la condition Δ_2.

Soit d'autre part E un espace de Banach tel que tout opérateur linéaire $(\psi,0)$-sommant de E dans un espace F quelconque soit 1-sommant. Tout opérateur linéaire continu de E' dans un espace $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$, où μ est une probabilité, se factorise alors par $L^{\psi}(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction de $L^{\theta}(\Omega,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : On se ramène à un énoncé avec constantes par une technique standard. Alors, d'après la proposition 111, il existe une constante C telle que pour tout espace de Banach F et tout opérateur linéaire v $(\psi,0)$-sommant de E dans F, on ait :

$$\pi_{\Phi,\Phi}(v) \leq C\, \pi_{\psi}(v) .$$

D'après la proposition 110, tout opérateur linéaire continu de E' dans un espace $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$, où μ est une probabilité, est ψ-cylindriquement de type Φ . On achève en appliquant le théorème 109.

Indiquons une méthode possible pour sortir du cadre des fonctions convexes. Tout d'abord il est à peu près évident que l'on peut formuler le théorème 109 pour une famille de fonctions $(f_i)_{i \in I}$ de $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$, au lieu de considérer un opérateur linéaire à valeurs dans $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$. Si Φ et ψ sont deux fonctions de Young comme dans le théorème 109, et si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$ telle que :

$$\forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)} \ ,\ \Sigma\, |\alpha_i| = 1 \ ,\ \int \Phi(a(\omega))\, d\mu(\omega) \leq C \ ,$$

(où $a(\omega)$ est la fonction définie par :

$$\Sigma\, |\alpha_i|\ \psi\left(\frac{|f_i(\omega)|}{a(\omega)} \right) = 1 \quad) \ ,$$

il existe une fonction $g \in L^{\theta}(\Omega,\mu)$ telle que l'on ait pour tout $i \in I$:

$$\int \psi\left(\frac{|f_i|}{g}\right) d\mu \leq C \ .$$

Soient maintenant Φ et ψ deux fonctions de Young, telles que $\Phi \prec \psi$, non nécessairement convexes. Supposons qu'il existe $p \in]0,1]$ tel que les fonctions :

$$\Phi_p(t) = \Phi(t^{1/p}) ,$$
$$\psi_p(t) = \psi(t^{1/p})$$

soient convexes, et vérifient les hypothèses du théorème 109. Soit alors $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions de $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$, telle que :

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)},\ \Sigma |\alpha_i| = 1 ,\quad \int \Phi\ (a(\omega))\ d\mu(\omega) \leq C ,$$

où $a(\omega)$ est la fonction définie par :

$$\Sigma|\alpha_i|\ \psi\ \left(\frac{|f_i(\omega)|}{a(\omega)} \right) = 1 .$$

Posons pour chaque $i \in I$ $g_i = |f_i|^p$. On vérifie immédiatement que :

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)},\ \Sigma |\alpha_i| = 1 ,\quad \int \Phi_p(b(\omega))\ d\mu(\omega) \leq C ,$$

où $b(\omega)$ est la fonction définie par :

$$\Sigma\ |\alpha_i|\ \psi_p\ \left(\frac{g_i(\omega)}{b(\omega)} \right) = 1 .$$

Par conséquent, en posant $\theta_p = [\Phi_{p*},\psi_p]$, il existe une fonction $h \in L^{\theta_p}(\Omega,\mu)$ telle que l'on ait pour chaque $i \in I$:

$$\int \psi_p\ \left(\frac{g_i}{h} \right)\ d\mu \leq C .$$

Soit encore, en posant $\theta(t) = \theta_p(t^p)$, $g(t) = (h(t))^{1/p}$:

$$g \in L^{\theta}(\Omega,\mu) \ , \ \forall\, i \in I \qquad \int \psi\left(\frac{|f_i|}{g}\right) d\mu \leq C \ ,$$

ce qui constitue le théorème de factorisation voulu pour Φ et ψ. On voit que θ se calcule directement à partir de Φ et ψ par la formule :

$$\theta(z) = \sup_{y \geq 0} \left(\Phi(yz) - \psi(y) \right) .$$

En utilisant la transformation $\Phi \to \Phi_p$, on voit encore que les opérateurs de multiplication de $L^{\psi}(\Omega,\mu)$ dans $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$ sont donnés par les fonctions de $L^{\theta}(\Omega,\mu)$.

L'hypothèse que $\Phi(t^{1/p})$ est convexe pour un $p \in]0,1]$ est assez naturelle : en effet, si $B_{\Phi}(0+) = 0$, l'espace $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$ est quasi-normable, donc p-normable pour un $p \in]0,1]$. On sait alors [13] qu'il existe une fonction $\Phi_1 \sim \Phi$, telle que $\Phi_1(t^{1/p})$ soit convexe.

XI. Questions et problèmes.

Dans ce chapitre, nous indiquerons quelques questions et problèmes relatifs à notre travail, mais nous rappellerons aussi des problèmes posés par différents auteurs, et qui sont plus ou moins en rapport avec notre travail.

114 Dans tout ce qui précède, nous avons travaillé avec des opérateurs linéaires u q-cylindriquement de type p d'un espace quasi-normé E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$. Il est cependant frappant de constater que seule l'application $x \to |u(x)|$ intervient dans la définition des q-cylindriquement de type p, et cette application n'est pas linéaire ! Quelle est donc la bonne généralisation non linéaire de notre travail ? (Cela est peut-être en rapport avec une généralisation non linéaire de la théorie des applications radonifiantes).
A ce sujet, on pourrait s'intéresser à la notion d'opérateur superlinéaire introduite par Nikishin dans [19].

115 Peut-on supprimer l'hypothèse d'approximation dans tous les énoncés où elle est apparue ?

116 Désignons par $L_q(E,L^p(\Omega,\mu))$ l'espace des opérateurs q-cylindriquement de type p d'un espace quasi-normé E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$.
Si $L_q(E,L^p(\Omega,\mu))$ est un sous-espace fermé de $L(E,L^p(\Omega,\mu))$, a-t-on nécessairement :

$$L_q(E,L^p(\Omega,\mu)) = L(E,L^p(\Omega,\mu)) \ ?$$

(La réponse est positive si l'un des deux espaces vérifie l'hypothèse d'approximation, en particulier si $p \geq 1$ ou si μ est purement atomique.)

Une réponse positive à cette question donne une réponse partielle au problème 115. En effet, $L_q(E, L^p(\Omega,\mu)) \neq L(E, L^p(\Omega,\mu))$ implique que pour tout N, on peut trouver un opérateur $u \in L_q(E, L^p(\Omega,\mu))$ tel que $C_{p,q}(u) \geq N$, $\|u\| \leq 1$: or c'est exactement ce dont on a besoin pour faire la démonstration du théorème 84.

117 Soient E un espace de Banach et G un espace quasi-normé. Supposons que :

$$\forall F, \quad \Pi_q(E,F) = \Pi_o(E,F) .$$

Peut-on en déduire :

$$\Pi_{q,G}(E \otimes G, F) = \Pi_{o,G}(E \otimes G, F) \text{ ?}$$

(C'est ce que nous avons prouvé au corollaire 86 lorsque $q < 2$, et lorsque G est un espace de Banach. Cependant notre méthode semble peu directe et peu naturelle.)

118 L'espace $L^q(X,\nu)$ est-il de type p lorsque $1 \leq p < 2 < q < \infty$?

119 Si u est un opérateur <u>nucléaire</u> à valeurs dans $L^q(X,\nu)$, $2 < q < \infty$, u est-il 0-sommant ? (Une réponse positive à cette question implique que $L^q(X,\nu)$ est de type 1, cf. n° 118). Plus généralement peut-on caractériser les espaces F tels que tout opérateur nucléaire à valeurs dans F soit 0-sommant ? Est-ce la classe des espaces de type 1 ?

120 Si u est un opérateur p-sommant, et v un opérateur q-sommant, , l'opérateur $v \circ u$ est-il 0-sommant lorsque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$? (Question posée dans Studia Math. 38 (1970).)

Par exemple soit v un opérateur q-sommant ($q < \infty$) de l^1 dans un espace de Banach F, et soit α un opérateur diagonal de l^∞ dans l^1. L'opérateur $v \circ \alpha$ est-il 0-sommant ? En termes d'opérateurs q-cylindriquement de type p, cela pose le problème suivant : soit u un opérateur continu de l^1 dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p < 1$, et α un opérateur diagonal de l^∞ dans l^1. L'opérateur $u \circ \alpha$ est-il q-cylindriquement de type p pour tout $q < \infty$?

(Une réponse positive à cette question implique une réponse à la première question du n°119, car tout opérateur de l^1 dans $L^q(X,\nu)$ est p-sommant pour tout $p > q$.)

121 Peut-on caractériser les espaces de Banach de type p ? (Pour que E soit de type p, une condition nécessaire est que l'on ait pour tout <u>quotient</u> G de E' :

$$\forall F, \quad \Pi_p(G,F) = \Pi_o(G,F) .$$

Est-ce suffisant ?)

122 Soit E un espace de Banach. Les conditions suivantes sont-elles équivalentes :

a) E possède la propriété d'Orlicz (c'est-à-dire que pour toute série (x_n) inconditionnellement convergente dans E, $\Sigma \|x_n\|^2 < +\infty$.).

b) $2 \in I_E$.

c) E est de cotype 2.

[On a c) $\Rightarrow$ b) d'après le théorème 93, b) $\Rightarrow$ a) d'après le corollaire 25. Nous pouvons démontrer que b) $\Rightarrow$ c) lorsque E possède une base inconditionnelle].

Le problème de l'équivalence b) $\Leftrightarrow$ c) est identique au problème suivant:

$$\text{si } 2 \in I_E \text{ , a-t-on } \; 2 \in I_{l^2(E)} \text{ ?}$$

En effet, on vérifiera facilement qu'un espace E est de cotype 2 si et seulement si $2 \in I_{l^2(E)}$.

123 Soit E un espace de Banach. Considérons les propriétés suivantes :

a) E et E' vérifient la propriété d'Orlicz (cf. n°122).

b) $2 \in I_E$ et $2 \in I_{E'}$.

c) E et E' sont de cotype 2.

Chacune de ces propriétés implique-t-elle que E soit hilbertisable, c'est-à-dire isomorphe à un espace de Hilbert ?

124 Si un espace de Banach E est plongeable dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$, est-il également plongeable dans un espace $L^1(X,\nu)$? (Question posée par S. Kwapien dans Studia Math 38)

125 L'espace $l^2(l^1)$ est-il plongeable dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$? (Si oui, cela fournit un contre-exemple à la question 124 car on peut montrer que $l^2(l^1)$ n'est pas plongeable dans un espace $L^1(X,\nu)$.)

126 A-t-on :

$$\forall E \qquad \Pi_p(E, L^r) = \Pi_q(E, L^r) \quad \text{lorsque } 2 < r < p < q < \infty \;?$$

(Problème posé par A. Pietsch dans [22]).

D'après le théorème 28, ce problème est équivalent au suivant : si u est un opérateur linéaire d'un sous-espace S_q d'un espace L^q dans un espace L^r, u admet-il la factorisation :

$$S_q \xrightarrow{j_g} S_p \longrightarrow L^r \;.$$

127 Soient E et F deux espaces de Banach, et u un opérateur linéaire continu de E dans F. Désignons par I_u l'ensemble des réels $q > 0$ tels que :

$$\forall G \;,\; \forall v \in \Pi_q(F,G) \;, \quad v \circ u \in \Pi_o(E,G) \;.$$

Y a-t'il une bonne généralisation de l'étude du chapitre VIII ? (notamment pour le théorème 84.)

128 Si (X_n) est une série inconditionnellement convergente dans un espace $L^o(\Omega,\mu)$, la série $\Sigma\, c_n X_n$ est-elle convergente lorsque les coefficients (c_n) sont bornés ?

Dans l'index terminologique, les termes commençant par un symbole sont classés d'après l'orthographe de ce symbole. Par exemple : 0 comme zéro, ψ comme psi,...Le même principe est adopté pour l'index des notations.

INDEX TERMINOLOGIQUE

INDEX DES NOTATIONS

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. ASSOUAD — Annales de l'Institut Fourier, Tome XXII, Fasc.3, p.81-93 (1972).

[2] P. ASSOUAD — C.R.A.Sc. Paris t 275 p.651-653.

[3] S. CHEVET — Une propriété caractéristique des processus linéaires continus, applications aux opérateurs p-radonifiants, Deux journées p-radonifiantes, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972, Ecole Polytechnique.

[4] W. FELLER — An introduction to Probability Theory and its Applications, vol.II, J. Wiley New-York (1966).

[5] A. GROTHENDIECK — Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956) p.1.79

[6] J. HOFFMANN.JØRGENSEN — Sums of independent Banach space valued random variables, Aarhus Universitet, Preprint Series 1972/73 n°15.

[7] M. I. KADEC et A. PELCZYNSKI — Bases, lacunary sequences, and complemented subspaces in the spaces L_p, Studia Math 21 (1962) p.161-176.

[8] M. A. KRASNOSELKI et Y. B. RUTICKI — Convex functions, Orlicz spaces, Noordhoff, 1961 (Groningen).

[9] S. KWAPIEN — On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators, Studia Math. 38 (1970) p.193-201.

[10] S. KWAPIEN — Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients, Studia Math 44 (1972).

[11] S. KWAPIEN et A. PELCZYNSKI — The main triangle projection in matrix spaces and its applications, Studia Math 34 (1969) p.43-67.

[12] J. LINDENSTRAUSS et A. PELCZYNSKI — Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math 29 (1968) p.275-326.

[13] W. MATUSZEWSKA et W. ORLICZ — A note on the theory of s-normed spaces of φ-integrable functions, Studia Math 21 (1961) p.107-115.

[14] B. MAUREY — Démonstration d'une conjecture de Pietsch et applications, Preprint, Ecole Polytechnique.

[15] B. MAUREY — Séminaire Goulaouic-Schwartz 72-73, exposés III et IV.

[16] B. MAUREY — C.R.A.S. t 275 Série A p.785.

[17 B. MAUREY et A. NAHOUM — C.R.A.S. t 276 Série A p.751.

[18] Séminaire MAUREY-SCHWARTZ 72-73 Ecole Polytechnique.

[19] E. M. NIKISHIN — Resonance theorems and superlinear operators, Transl. of cont. of Uspekhi, Mat. Nauk Vol. XXV n°6, Nov.Déc. 1970.

[20] A. PERSSON et A. PIETSCH — p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachraümen, Studia Math 33 (1969) p.19-62.

[21] A. PIETSCH — Absolut.p-summierende Abbildungen in normierten Raümen, Studia Math 28 (1967) p.333-353.

[22] A. PIETSCH — Séminaire Goulaouic-Schwartz 70-71, exposés 29 et 31.

[23] S. ROLEWICZ — On a certain class of linear metric spaces, Bull. Acad. Pol. Sci, Cl III, 5 (1957) p.471-473.

[24] S. ROLEWICZ — Some remarks on the spaces N(L) and N(l) Studia Math 18 (1959) p.1-9.

[25] H. P. ROSENTHAL — On subspaces of L^p (à paraître) . Annals of Math. Vol.97 n°2 p.344-373 (Mars 1973).

[26] P. SAPHAR — Applications p-sommantes et p-décomposantes, C.R. Acad. Sc. Paris t 270 Série A (1970) p.1093-1096.

[27] Séminaire L. SCHWARTZ 1969-70, Ecole Polytechnique.

[28] L. SCHWARTZ — Probabilités cylindriques et applications radonifiantes, Journal Fac. Sc. Univ. Tokyo Sec 1 A Vol.18 n°2 p.139-286 (1970).

[29] S. SIMMONS Local reflexivity and (p,q)-summing maps Math. Ann. 198 p.335-344 (1972).

[30] A. ZYGMUND Trigonometrical Series, Cambridge University Press.

-:-:-:-:-

Addendum

Un certain nombre de résultats de cet article concernant les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$ (chapitres II, IV et VI) sont plus faibles que ceux d'un article de E.M. Nikishin [34], antérieur à notre article. Par exemple, dans le théorème 68 de notre article, on peut préciser d'après [34] que tout opérateur linéaire continu de $L^r(K,\chi)$ dans $L^0(K,\chi)$, invariant par translation, est de type faible (r,r) lorsque $0 < r \leq 2$. Plus généralement, Nikishin prouve dans [34] que tout opérateur linéaire continu d'un espace $L^r(X,\nu)$ dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$ (μ étant une probabilité) se factorise par l'espace $\Lambda^r(\Omega,\mu)$ des fonctions mesurables f telles que $\sup\limits_{0 < c < \infty} c^r \mu\{|f| > c\} < \infty$, lorsque $0 < r \leq 2$.

Par ailleurs les résultats de [34] permettent de donner une nouvelle interprétation des propriétés des opérateurs (p,q)-sommants, cf. [33].

Plusieurs questions du chapitre XI ont été résolues. Dans le problème 117, il est faux que $2 \in I_E$ implique $2 \in I_{E,G}$ en général. Une démonstration plus simple qu'au corollaire 86 du fait que $q \in I_E \Rightarrow q \in I_{E,G}$ pour $q < 2$ résulte de [33].

La réponse au problème 118 est oui. Plus généralement, G. Pisier a montré dans [35] que si un espace de Banach est de type q, il est aussi de type p pour $0 < p \leq q \leq 2$.

Une réponse au problème 121 dans le cas $p = 1$ a été donnée par G. Pisier dans [36] : un espace de Banach E est de type 1 si et seulement si il ne contient pas de l_n^1 uniformément, ce qui veut dire d'après le théorème 92 que $\Pi_1(G,F) = \Pi_0(G,F)$ uniformément pout tout F et tout quotient G de E'.

Par ailleurs le théorème 92 est précisé par les résultats de [32] et de l'annexe de [18].

La réponse à la question 125 est négative (communication de H. Rosenthal). Enfin, la réponse au problème 128 est affirmative, et est donnée dans [31]. On y trouve aussi une autre démonstration du corollaire 91 de cet article.

[31] B. Maurey et G. Pisier — Un théorème d'extrapolation et ses conséquences, C.R.A.S. t 277 p.39-42.

[32] B. Maurey et G. Pisier — Caractérisation d'une classe d'espaces de Banach par des propriétés de séries aléatoires vectorielles, C.R.A.S. Automne 1973.

[33] B. Maurey — C.R.A.S. Automne 1973.

[34] E.M. Nikishin — Izvestia Akad. Nauk Tome 36 n°4 (1972) p.795-813.

[35] G. Pisier — Type des espaces normés, C.R.A.S. t 276 p.1673-1676.

[36] G. Pisier — C.R.A.S. Automne 1973.

:-:-:-:-:-:

SUMMARY

This paper studies some properties of factorization for bounded linear operators from a Banach space E into a space $L^p(\Omega,\mu)$, $0 \leq p < +\infty$. A characterization is given for operators which admit a factorization in the following manner :

$$E \xrightarrow{u_1} L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega,\mu) \quad ,$$

where u_1 is a bounded linear operator, and where T_g is the multiplication operator defined by a function $g \in L^r(\Omega,\mu)$, $1/p = 1/q + 1/r$. We treat the connection of these results with the theory of absolutely summing and radonifying operators. We introduce a class of spaces, namely spaces of type q, $0 < q \leq 2$, for which every bounded linear operator with range in a space $L^p(\Omega,\mu)$, $0 \leq p \leq q$, is factoring through $L^q(\Omega,\mu)$ in the sense defined above. It is also shown that every bounded linear operator from a space L^∞ into a space $L^p(\Omega,\mu)$, $0 \leq p \leq 2$, is factoring through $L^2(\Omega,\mu)$ (though L^∞ is not a space of type 2). We give an application of this result : if (X_n) is a sequence of random variables such that $\Sigma\, c_n X_n$ converges in probability for every bounded scalar sequence (c_n), the series $\sum_{n\geq 2} X_n / \mathrm{Log}\, n$ is almost surely convergent.