

Astérisque

YVETTE AMICE

JACQUES VÉLU

Distributions p -adiques associées aux séries de Hecke

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 119-131

http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__119_0

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DISTRIBUTIONS p-ADIQUES ASSOCIÉES AUX SÉRIES DE HECKE

par

Yvette AMICE et Jacques VÉLU

-:-:-

I. - INTRODUCTION. - Soit $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{2\pi inz}$ une série de Hecke de poids $w+2$, i. e. une forme modulaire parabolique pour $SL_2(\mathbb{Z})$ de poids $w+2$, telle que $\varphi|T_n = \lambda_n \varphi$ pour tout opérateur de Hecke T_n .

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur $f(\chi)$. Posons

$\varphi_{\chi}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi(n) e^{2\pi inz}$, alors la fonction $\Lambda_{\varphi}(\chi, s) = f(\chi)^s \int_0^{\infty} y^s \varphi_{\chi}(iy) \frac{dy}{y} = (f(\chi)^s \Gamma(s) / (2\pi)^s) (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi(n) / n^s)$ est holomorphe dans \mathbb{C} et satisfait à l'équation fonctionnelle $\Lambda_{\varphi}(\chi, s) = \chi(-1) i^{-w-2} \frac{G(\chi)}{G(\chi^{-1})} \Lambda_{\varphi}(\chi^{-1}, w+2-s)$, où $G(\chi) = \sum_{a \text{ mod } f(\chi)} \chi(a) e^{2\pi ia/f(\chi)}$ est une somme de Gauss.

Quand $s = k+1$ est un entier, on peut écrire $\Lambda_{\varphi}(\chi, s)$ au moyen d'une

somme finie. En effet, nous avons $\varphi_{\chi}(z) = \frac{G(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a \text{ mod } f(\chi)} \chi^{-1}(-a) \varphi(z + \frac{a}{f(\chi)})$, ce qui donne $\Lambda_{\varphi}(\chi, k+1) = f(\chi)^{k-k-1} \frac{G(\chi)}{G(\chi^{-1})} \sum_{a \text{ mod } f(\chi)} \chi^{-1}(-a) Q_k(a/f(\chi))$, avec $Q_k(x) = \int_x^{i\infty} (z-x)^k \varphi(z) dz$, ($x \in \mathbb{Q}$ et $z = x+iy$ avec $0 < y < \infty$).

Dans [4] , Manin étudie ces intégrales et démontre :

THÉORÈME I. - Il existe $\omega_+ \in i\mathbb{R}$ et $\omega_- \in \mathbb{R}$ tels que pour tout entier $k \in [0, w]$,
tout $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, tout $x \in \mathbb{Q}$, $Q_k^\varepsilon(x) = \frac{Q_k(x) + \varepsilon Q_k(-x)}{2\omega_\varepsilon(-1)^k}$ appartienne au corps de
nombre réel $\mathbb{Q}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$. De plus, pour $x \in \mathbb{Q}$, soit D un entier tel que
 $Dx \in \mathbb{Z}$, alors $D^k Q_k^\varepsilon(x)$ est entier algébrique.

Il résulte de ce théorème que les deux membres de l'égalité :

$$(1) \quad \frac{i^{k+1} \Lambda_\varphi(\chi, k+1)}{G(\chi) \omega_{(-1)^k} \chi(-1)} = f(\chi)^k \sum_{a \bmod f(\chi)} \chi^{-1}(-a) Q_k^{\chi(-1)}\left(\frac{a}{f(\chi)}\right)$$

sont des nombres algébriques ; nous les noterons $A(\chi, k)$.

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques et \mathbb{C}_p le complété de la clôture algébrique du corps p -adique élémentaire \mathbb{Q}_p . Nous fixons un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans \mathbb{C}_p : ceci nous permet de considérer désormais les nombres algébriques, et en particulier $A(\chi, k)$, comme appartenant à \mathbb{C}_p .

Ayant fixé un nombre premier p , pour donner une interprétation p -adique des valeurs $A(\chi, k)$, nous faisons varier le caractère χ de façon que son conducteur divise $\Delta_o p^n$, où Δ_o est un nombre fixé premier à p . Le groupe des caractères de Dirichlet ainsi choisi s'identifie à un sous-groupe discret d'un groupe analytique p -adique (groupe des quasi-caractères p -adiques, cf. §.II). La "distribution p -adique" associée à la série de Hecke φ est une fonction analytique sur le groupe des quasi-caractères p -adiques, prenant sur le sous-groupe des caractères de Dirichlet les valeurs $A(\chi, k)$ (à un facteur correctif près). Le §.III expose la construction de cette fonction analytique, et le §.IV indique les outils d'analyse p -adique utilisés.

II. - CARACTÈRES ET DISTRIBUTIONS p -ADIQUES. -

II. 1. - Caractères. - Soient p un nombre premier et Δ_0 un entier premier à p , désormais fixés. On pose $q = 4$ si $p = 2$ et $q = p$ si $p \neq 2$, on note $\Delta = \Delta_0 q$.

Les caractères de Dirichlet de conducteur Δp^n sont des caractères du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/\Delta p^n \mathbb{Z})^*$. Soit $\mathbb{Z}_\Delta^* = \varprojlim (\mathbb{Z}/\Delta p^n \mathbb{Z})^*$, alors $\mathbb{Z}_\Delta^* \cong (\mathbb{Z}/\Delta_0 \mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}_p^*$, où \mathbb{Z}_p^* est le groupe des unités de \mathbb{Z}_p .

Le groupe des quasi-caractères p -adiques associé à Δ_0 est le groupe

$$X(\mathbb{Z}_\Delta^*) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbb{Z}_\Delta^*, \mathbb{C}_p^*)$$

des homomorphismes continus de \mathbb{Z}_Δ^* dans \mathbb{C}_p^* .

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur Δp^n : χ est un élément de $\text{Hom}((\mathbb{Z}/\Delta p^m \mathbb{Z})^*, \mathbb{C}_p^*)$, pour tout $m \geq n$, qui se prolonge donc de façon unique en un élément de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, que nous noterons encore χ .

D'autre part, tout $z \in \mathbb{Z}$ s'écrit de façon unique $z = \omega(z) \theta(z)$ avec $\omega(z) \in (\mathbb{Z}/\Delta_0 \mathbb{Z})^*$ et $\theta(z) \in \mathbb{Z}_p^*$; l'application $\theta : z \rightarrow \theta(z)$ est un élément de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ que nous appellerons le caractère fondamental.

La structure de groupe analytique p -adique de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ provient des propriétés classiques suivantes.

PROPOSITION II. 1. - Soient $U_p = 1 + q \mathbb{Z}_p = \{z \in \mathbb{Z}_p \mid v(z-1) \geq v(q)\}$ et

$T = \{t \in \mathbb{C}_p \mid v(t-1) \geq 0\}$.

(i) pour tout $g \in U_p$ tel que $v(g-1) = v(q)$, l'application $z \rightarrow g^z$ est un isomorphisme de \mathbb{Z}_p sur U_p ; on appellera un tel g un générateur de U_p ;

(ii) pour tout générateur g de U_p , l'application
 $L_g : \text{Hom}_{\text{cont}}(U_p, \mathbb{C}_p^*) = X(U_p) \rightarrow \mathbb{C}_p^*$, qui à un caractère continu χ de U_p

associe $L_g(\chi) = \chi(g)$, est un isomorphisme bicontinu de $X(U_p)$ sur T .

On voit ainsi que, puisque $\mathbb{Z}_\Delta^* \simeq (\mathbb{Z}/\Delta_o \mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}_p^*$ et $\mathbb{Z}_p^* \simeq (\mathbb{Z}/q \mathbb{Z})^* \times U_p$, $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ est le produit d'un groupe fini $(\mathbb{Z}/\Delta \mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/\Delta_o \mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/q \mathbb{Z})^*$ par $X(U_p)$, ce dernier étant (non canoniquement) isomorphe à T . Or T est un disque ouvert de \mathbb{C}_p : ceci fait bien de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ une variété analytique, réunion disjointe de "disques ouverts", et on vérifie que c'est un groupe analytique.

Les fonctions analytiques sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ sont alors les fonctions dont la restriction à chacune des composantes isomorphes à T est analytique sur cette composante (i. e. telle que sa composée avec un paramétrage L_g^{-1} soit analytique sur T).

Le sous-groupe de torsion de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ s'identifie, comme indiqué plus haut, au groupe des caractères de Dirichlet de conducteur dp^n où $d|\Delta_o$. Soit χ un tel caractère de Dirichlet et soit $\chi = \chi_o \chi_1$ sa décomposition en $\chi_o \in X((\mathbb{Z}/\Delta \mathbb{Z})^*)$ et $\chi_1 \in X(U_p)$: alors χ_1 prend ses valeurs dans le groupe $\mu_p^\infty = \bigcup_n \mu_{p^n}$ où μ_{p^n} désigne le groupe des racines p^n -ièmes de l'unité dans \mathbb{C}_p . Le choix d'un générateur g de U_p identifie χ_1 à $\chi_1(g) \in \mu_p^\infty$.

La fonction analytique sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ que nous construisons au §. III est définie par ses valeurs sur les caractères χ^{θ^k} , $k \in [0, w]$, et χ élément de torsion de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$.

II. 2. - Distributions p-adiques. - Le groupe \mathbb{Z}_Δ^* est le produit d'un groupe fini par U_p : parmi les fonctions continues (à valeurs dans \mathbb{C}_p) sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, nous distinguerons l'algèbre $\text{Locan}(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ des fonctions localement analytiques, muni de sa

topologie naturelle (cf. par ex. [1]). Alors $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ est un sous-groupe multiplicatif de cette algèbre.

DÉFINITION II. 2. 1. - Nous appelons distribution sur \mathbb{Z}_Δ^* une forme linéaire continue sur $\text{Locan}(\mathbb{Z}_\Delta^*)$.

PROPOSITION II. 2. 2. - La restriction à $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ des formes linéaires sur $\text{Locan}(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ définit un isomorphisme de l'espace des distributions sur l'espace des fonctions analytiques sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$.

La démonstration de cette proposition repose sur la caractéristique des fonctions localement analytiques par leurs coefficients d'interpolation [1].

L'isomorphisme entre l'espace des distributions sur \mathbb{Z}_Δ^* et l'espace des fonctions analytiques sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ peut être précisé sous forme d'un dictionnaire entre les propriétés de croissance des fonctions analytiques sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ et le fait, pour la distribution associée, d'être prolongeable continûment à un espace de fonctions sur \mathbb{Z}_Δ^* , plus grand que $\text{Locan}(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ et où $\text{Locan}(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ est dense. Donnons deux exemples de telles correspondances.

PROPOSITION II. 2. 3. - Une distribution sur \mathbb{Z}_Δ^* est une mesure (i. e. se prolonge continûment à l'espace des fonctions continues sur \mathbb{Z}_Δ^*) si et seulement si elle induit sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ une fonction analytique bornée.

Pour formuler le second exemple, rappelons quelques notions sur les conditions de croissance au bord d'une fonction analytique sur un disque ouvert.

Soit f une fonction analytique sur T , sa fonction module, $M_f(r)$ est définie, pour $0 \leq r < 1$, par $M_f(r) = \sup_{|x-1| \leq r} |f(x)| = \max_n (|b_n| r^n)$, où

$f(X) = \sum_{n \geq 0} b_n (X-1)^n$ est la série de Taylor de f au point 1 .

Etant données deux fonctions f et g , analytiques sur T , nous noterons $f = O(g)$ (resp. $f = o(g)$) si $\overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} (M_f(r)/M_g(r)) < +\infty$ (resp. $\lim_{r \rightarrow 1^-} (M_f(r)/M_g(r)) = 0$). Par exemple, si $g(X) = (\text{Log}(X))^k$, et $f(X) = \sum_{n \geq 0} b_n (X-1)^n$, on montre que $f = o(g)$ équivaut à $|b_n| = o(n^k)$ (la valeur absolue de \mathbb{C}_p étant normalisée par $|p| = 1/p$).

Pour des fonctions f et g analytiques sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, les notations $f = O(g)$ et $f = o(g)$ signifient que les restrictions de f et g à chacune des composantes de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ isomorphe à T ont cette propriété. On vérifie qu'il s'agit bien d'une notion intrinsèque, i. e. indépendante du choix d'un paramétrage L_g^{-1} .

PROPOSITION II. 2. 4. - Une distribution sur \mathbb{Z}_Δ^* se prolonge à l'espace des fonctions $k-1$ fois dérivables dont la dérivée $k-1$ ième est lipschitzienne [2] à la condition nécessaire et suffisante que sa restriction à $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ soit $o((\text{Log } X)^k)$.

D'autre part, les relations classiques [3] entre les zéros des fonctions analytiques et leur fonction module, permettent de montrer qu'une fonction analytique sur T , qui satisfait une condition de croissance, et a "trop" de zéros, est nécessairement nulle. Dans cet ordre d'idées, nous utiliserons le résultat suivant :

LEMME II. 2. 5. - Soit f une fonction analytique sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ et soit h un entier positif, si $f = o((\text{Log } X)^h)$ et $f(\chi \theta^k) = 0$ pour $k \in [0, h-1]$ et χ de torsion (θ est le caractère fondamental), alors $f = 0$.

Ceci montre que si la construction d'une distribution sur \mathbb{Z}_Δ^* associée à une série de Hecke, donnée par ses valeurs sur les caractères $\chi \theta^k$ (χ de torsion, $k \in [0, w]$), permet d'obtenir une fonction qui soit $o(\text{Log}^{w+1})$, une telle

distribution est unique. Cette remarque nous sera utile au §. III, en particulier pour prouver la relation fonctionnelle.

III. - CONSTRUCTION DES "FONCTIONS L" *p*-ADIQUES. - Soit φ une série de Hecke (c.f. §. I) et soit p un nombre premier. La construction d'une distribution *p*-adique analogue à la fonction holomorphe $\Lambda(\varphi, s)$ se résume dans le

THÉORÈME III. - Soit λ une racine de l'équation $X^2 - \lambda X + p^{w+1} = 0$, de valuation *p*-adique $v_p(\lambda) < w+1$, alors il existe une unique fonction G_λ , analytique sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, et satisfaisant

(a) pour $k \in [0, w]$, et pour tout caractère χ de Dirichlet, $\chi = \chi_0 \chi_1$ (notations en II. 1) avec $f(\chi_0) | \Delta$ et $f(\chi_1) = p^n$,

$$G_\lambda(\chi \theta^k) = (1/\lambda^n) (-1)^k A(\chi, k),$$

(b) G_λ est $o(\text{Log}^{w+1})$.

De plus,

(c) si $v_p(\lambda) = 0$, G_λ est une fonction analytique bornée,

si $h = [v_p(\lambda)]$, G_λ est $o(\text{Log}^{h+1})$; enfin

(d) G_λ satisfait la relation fonctionnelle

$$G_\lambda(\chi \theta^k) = \varepsilon(\chi, k) G_\lambda(\theta^{w-k} \chi^{-1}),$$

pour $k \in [0, w]$ et pour tout $\chi \in X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, avec $\varepsilon(\chi, k) = \chi_0(-1) (-1)^{k-1}$, où $\chi = \chi_0 \chi_1$.

Ce théorème généralise les résultats obtenus par Manin dans [4] et [5] : l'énoncé ci-dessus, restreint au cas où $v_p(\lambda) < 1$, est en effet une reformulation

de ces résultats.

Les principales différences entre notre théorème et ceux de [4] et [5] sont les suivantes :

1. - La construction de Manin ne fournit une fonction G_λ que lorsque l'équation $X^2 - \lambda X + p^{w+1} = 0$ a une racine λ de valuation $v_p(\lambda) < 1$. Or cette équation a toujours au moins une racine de valuation $< w+1$, notre théorème permet donc de construire (au moins) une fonction G_λ dans tous les cas (i. e. quelle que soit la valuation p-adique de λ_p).
2. - Lorsque $0 < v_p(\lambda_p) < w+1$, les deux racines λ et λ' de l'équation fournissent chacune une fonction analytique, G_λ et $G_{\lambda'}$. On peut d'ailleurs préciser certaines propriétés d'analyticité du rapport $G_\lambda/G_{\lambda'}$, lorsque $v(\lambda') > v(\lambda)$.
3. - La construction que nous faisons ici permet d'imposer a priori toutes les conditions (a), qui impliquent l'équation fonctionnelle (d) : en effet, l'équation (d) est satisfaite lorsque χ est un caractère de Dirichlet, donc aussi pour tout $\chi \in X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, compte-tenu de la remarque faite en fin du §. II.
4. - Ayant a priori imposé à G_λ toutes les conditions (a), on obtient une fonction G_λ satisfaisant de plus les conditions de croissance (c).

Méthode.- La méthode employée dans la construction de G_λ est un procédé d'interpolation. On voit d'abord que, quitte à fixer la composante discrète χ_0 du caractère χ , tout revient à trouver une fonction analytique sur T , qui soit $o((\text{Log})^{w+1})$ et prenne des valeurs données aux points $(g^k \gamma)$, $k \in [0, w]$, g un générateur fixé de U_p et γ parcourant μ_p^∞ . Nous avons déjà observé que si une telle fonction existe, elle est unique. On montre alors que les fonctions qui sont

$o(\text{Log}^{w+1})$ peuvent être caractérisées par une évaluation des coefficients de la suite des polynômes qui interpolent leurs valeurs sur les familles $(g^k \gamma)$, $k \in [0, w]$, $\gamma \in \mu_{\frac{n}{p}}$. Puis, l'évaluation de ces coefficients s'avérant mal-commode dans le cas particulier qui nous occupe, on établit une comparaison entre ceux-ci et des coefficients d'interpolation "additive" (proposition IV. 4), ce qui permet de conclure. Le §. IV. ci-dessous indique ces différentes étapes de façon plus précise.

IV. - INTERPOLATION. - Soit T le disque $\{x \in \mathbb{C}_p \mid v(x-1) > 0\}$, $\mu_{\frac{n}{p}}$ le groupe de ses points d'ordre $\frac{n}{p}$, $\mu_{\infty} = \bigcup_{\frac{n}{p}} \mu_{\frac{n}{p}}$ son sous-groupe de torsion. On note g un générateur fixé de $U_{\frac{n}{p}} = T \cap \mathbb{Z}_p$, soit h un entier positif, on note B_h l'espace des fonctions analytiques sur T qui sont $o(\text{Log}^h)$.

Notation : soit $h \geq 1$, F une fonction sur T , on note $S_n^h(F)$ la suite des polynômes d'interpolation de F sur les points $(g^k \gamma)$, $k \in [0, h-1]$, $\gamma \in \mu_{\frac{n}{p}}$, c'est-à-dire la suite de polynômes définie par

- (i) $S_n^h(g^k \gamma) = F(g^k \gamma)$, pour $k \in [0, h-1]$ et $\gamma \in \mu_{\frac{n}{p}}$;
- (ii) $\deg(S_n^h) < h p^n$.

Soit P un polynôme (à une ou plusieurs variables) nous noterons $\|P\|$ la borne supérieure des valeurs absolues des coefficients de P . Si P est un polynôme à une variable, on remarque que $\|P\| = \lim_{r \rightarrow 1} M_P(r) = M_P(1)$.

PROPOSITION IV. 1. - Soit I_h l'espace des suites de polynômes $(S_n^h)_{n \geq 0}$, satisfaisant

- (i) $\deg(S_n^h) < h p^n$ et, pour $k \in [0, h-1]$, $(X/g^k)^{p^n} - 1$ divise $S_{n+1}^h - S_n^h$;

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \|p^{nh} S_n^h\| = 0, \text{ alors,}$$

pour $F \in B_h$, la suite $(S_n^h(F))_{n \geq 0}$ appartient à I_h et $S_n^h(F) \rightarrow F$ pour la topolo-
de la convergence uniforme sur les disques fermés de T . De plus, pour qu'une
suite $(S_n^h)_{n \geq 0}$ satisfaisant la condition (i) soit la suite des polynômes d'interpo-
lation d'une fonction F appartenant à B_h , il faut et il suffit qu'elle satisfasse (ii).

En d'autres termes : l'application qui à une fonction F associe la suite $S_n^h(F)$ définit une bijection de B_h sur I_h .

Remarquons que la condition (i) exprime seulement qu'il existe une fonction F sur T dont la suite S_n^h est la suite des polynômes d'interpolation.

La preuve de cette proposition repose essentiellement sur : a) la continuité de la division euclidienne par un polynôme (cf. par exemple [3]), appliquée à la division par le polynôme $\prod_{k=0}^{h-1} Q_n(X/g^k)$, où $Q_n(X) = X^{p^n} - 1$; b) une majoration de $\|S_{n+1}^h - S_n^h\|$ qui résulte de ce que ce polynôme a suffisamment de racines pour qu'il tende nécessairement vers zéro sur T .

A partir de cette proposition, il est naturel de chercher à évaluer la suite des polynômes $S_n^{w+1}(G_\lambda)$ déterminée par les conditions :

$$(a') \quad G_\lambda(g^k \gamma) = (1/\lambda^n) (-1)^k A(\chi_o \chi_\gamma, k), \quad k \in [0, w], \quad \gamma \in \mu_{p^n} - \mu_{p^{n-1}},$$

où χ_γ est le caractère de U_p défini par $\chi_\gamma(g) = \gamma$ (χ_o est fixé).

LEMME IV.2. - Soit G une fonction sur T , et soit, pour $i \in [0, h-1]$, $R_n^i(X)$ le
polynôme défini par : $\deg(R_n^i) < p^n$ et $R_n^i(g^i \gamma)$ pour $\gamma \in \mu_{p^n}$. Alors
 $S_n^h(G)(X) \equiv R_n^i(X) \text{ mod. } (X/g^i)^{p^n} - 1$, $i \in [0, h-1]$, et ces conditions déterminent
 $S_n^h(G)$.

La preuve de ce lemme est tout-à-fait élémentaire. On en déduit la

PROPOSITION IV. 3. - Soit E_n l'espace des polynômes en X de degré inférieur à p^n , et soit $\Sigma_n^h(X, Y)$ l'unique polynôme en Y , à coefficients dans E_n , de degré $< h$ et qui satisfasse $\Sigma_n^h(X, g^{ip^n}) = R_n^i(X)$, alors $S_n^h(X) = \Sigma_n^h(X, X^{p^n})$, de plus, $\|S_n^h\| = \|\Sigma_n^h\|$.

Cette dernière formulation présente déjà l'avantage de rendre le calcul des polynômes $S_n^{w+1}(G_\lambda)$ un peu plus abordable. En effet, on montre que le coefficient de X^s dans R_n^i est alors, à un facteur standard près, $Q_i^e(\tilde{g}^s/p^n \Delta)$, où \tilde{g} désigne un rationnel tel que $\tilde{g}^s \equiv g^s \pmod{qp^n}$, pour $s \in [0, p^n - 1]$. Les coefficients de S_n^h s'obtiennent en interpolant la suite (indexée par i) des coefficients de R_n^i , sur la suite de points g^{ip^n} . Or, une interpolation "additive" de ces valeurs, i. e. une interpolation de cette suite considérée comme suite des valeurs d'une certaine fonction sur les entiers $i = 0, 1, \dots, h-1$, conduit à évaluer des quantités $\int_\alpha^{i\infty} z^i \varphi(z) dz$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, dont la nature arithmétique est connue grâce à [4].

Ceci nous amène à établir une comparaison entre les coefficients de polynômes interpolant une suite de valeurs données sur les suites $0, \dots, i, \dots, h-1$ et $1, \dots, g^{ip^n}, \dots, g^{(h-1)p^n}$.

PROPOSITION IV. 4. - Soient A_0, \dots, A_{h-1} des éléments d'un \mathbb{C}_p -espace de Banach E , et soit $\alpha \in U_p$, $\alpha \neq 1$. On note $P_A(X)$ (resp. $Q_A(Y)$) les polynômes de degré $< h$, à coefficients dans E , définis par $P_A(i) = A_i$ (resp. $Q_A(\alpha^i) = A_i$), $i \in [0, h-1]$, et $Q'_A(Z) = Q_A(1+Z)$. Alors, si $P_A(X) = \sum p_j X^j$ et $Q'_A(Z) = \sum q_j Z^j$, on a, pour tout $r > 0$ et tel que $r < p^{-1/p-1}$,

$$\|Q'_A\|_r = \sup_j (\|q_j\| r^j) = \sup_j (\|p_j\| (r/|\alpha-1|)^j) = \|P_A\|_{r/|\alpha-1|}.$$

La majoration imposée à r assure que l'application $z \rightarrow \text{Log}(1+z)/\text{Log } \alpha$ est une similitude du disque $|z| \leq r$ sur le disque $|x| \leq r/|\alpha-1|$, dans \mathbb{C}_p . Alors les normes considérées pour P_A et Q'_A sont leurs normes dans les espaces de fonctions analytiques sur ces disques. On montre que la norme $\|Q'_A\|_r$ est égale à la distance à l'origine du sous-espace affine constitué des fonctions f analytiques pour $|z| \leq r$ et satisfaisant les conditions $f(\alpha^i) = A_i$, de même la norme de P_A est la distance à l'origine d'un sous-espace affine défini de façon analogue dans l'espace des fonctions analytiques sur le disque $|x| \leq r/|\alpha-1|$, or ces deux espaces affines sont transformés l'un de l'autre dans le changement de variable $x \rightarrow \alpha^x$, d'où la proposition.

COROLLAIRE IV. 5. - Avec les notations du théorème III, soit $h \leq w+1$ et G_λ une fonction satisfaisant les conditions (a') pour $k \in [0, h-1]$, alors la suite $S_n^h(G_\lambda)$ des polynômes d'interpolation de G_λ satisfait $\|\lambda^n S_n^h\| \leq C$, où C ne dépend pas de n .

COROLLAIRE IV. 6. - Si $h > v(\lambda)$, $S_n^h(G_\lambda)$ converge vers une fonction $G_\lambda \in B_h$, et si $v(\lambda) = 0$, $S_n^h(G_\lambda)$ converge vers une fonction analytique bornée G_λ , pour $h \in [1, w+1]$.

La démonstration du corollaire IV. 5. repose de façon essentielle sur les propriétés arithmétiques des intégrales $\int_\alpha^{i\infty} z^i \varphi(z) dz$, prouvées dans [4]. Le théorème III résulte aisément de ces deux derniers énoncés.

-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE Yvette. - Interpolation *p*-adique. Bull. Soc. Math. France, t. 92, 1964, pp. 117-180.
- [2] BARSKY Daniel. - Fonctions *k*-Lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières. Bull. Soc. Math. France, t. 101, 1973, p. 397-411.
- [3] LAZARD Michel. - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. Pub. Math. I. H. E. S. n° 14.
- [4] MANIN Yu. I. - Périodes des formes paraboliques et séries de Hecke *p*-adiques. Math. Sbornik, t. 92 (134) n° 3, 1973, p. 378-401 (en russe).
- [5] MANIN Yu. I. - Détermination des valeurs des séries de Hecke *p*-adiques aux points entiers de la bande critique. Math. Sbornik, t. 93 (135) n° 4, 1974, p. 621-626 (en russe).

-:-:-:-

Yvette AMICE
E. N. S. J. F.
1 rue Maurie Arnoux
92120 MONTRouGE

Jacques VÉLU
Mathématiques
Université Paris-Sud
91405 ORSAY