Astérisque

JEAN FRESNEL
BERNARD DE MATHAN

Transformation de Fourier p-adique

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 139-155
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__139_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

TRANSFORMATION DE FOURIER p-ADIQUE

par

Jean FRESNEL et Bernard de MATHAN

-:-:-:-

I. - INTRODUCTION ET NOTATIONS. - Soit p un nombre premier. L'analyse harmonique p-adique -c'est-à-dire, pour des fonctions à valeurs dans un coprs p-adique- a déjà été étudiée par plusieurs auteurs ([11], [6], [7], [8], [9], [15], par ordre chronologique) et présente des situations plus variées que l'analyse harmonique complexe. En ce qui concerne le théorème de dualité de Pontryagin, ce résultat n'est plus vrai pour tous les groupes, de même, la transformation de Fourier p-adique n'est pas toujours injective. Précisément, les groupes compacts totalement discontinus, à transformation de Fourier p-adique injective, sont ceux pour lesquels le théorème de Pontryagin reste valable. Le résultat de base qui permet d'établir cette propriété, est que la transformation de Fourier p-adique relative à $\mathbb{Z}_p$, n'est pas injective. Le groupe additif $\mathbb{Z}_p$ est très particulier à cet égard, puisque sa transformation de Fourier est par contre surjective, et définit même une isométrie entre l'algèbre quotient de L^1 par le noyau, et l'algèbre des fonctions continues p-adiques sur $\mathbb{Z}_p$.

La non-injectivité de la transformation de Fourier p-adique relative à $\mathbb{Z}_p$ a été démontrée pour la première fois par Y. Amice et A. Escassut [2], et nous-même [3] , indépendamment, et par des méthodes différentes. Toutes les démonstrations font appel, d'une façon ou d'une autre, à la théorie des fonctions analytiques p-adiques. Nous donnons ici une démonstration nouvelle, plus simple que notre première démonstration, et où l'utilisation des fonctions analytiques est réduite au minimum. Cette nouvelle démonstration donne un résultat un peu plus précis que la non-injectivité de la transformation de Fourier de $\mathbb{Z}_p$, et fournit de plus un algorithme effectif pour construire un élément du noyau.

Nous recherchons quels sont les corps où une fonction à transformée de Fourier nulle peut prendre ses valeurs. Nous rappelons ensuite comment on déduit de la non-Fourier-injectivité de $\mathbb{Z}_p$ que les groupes à transformation de Fourier p-adique injective sont les groupes p-réflexifs et pour finir nous étudions les groupes à transformation de Fourier p-adique surjective. On désigne par $\mathbb{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, et par K une extension valuée complète de $\mathbb{Q}_p$, contenant le groupe multiplicatif R de toutes les racines de l'unité. Soit v la valuation sur K $((v(p)=1))$, $|\,.\,|$, la valeur absolue p-adique ($|p| = \frac{1}{p}$), et soit U le groupe multiplicatif des $x \in K$ tels que $|x| = 1$.

Soit G un groupe abélien compact, totalement discontinu (en abrégé t. d.). On note $\hat{G}$ le groupe des caractères p-adiques de G , c'est-à-dire des homomorphismes continus de $\hat{G}$ dans U (U étant muni de la topologie induite par celle de K). On munit $\hat{G}$ de la topologie de la convergence compacte, et on considère le groupe $\hat{\hat{G}}$ des homomorphismes continus de $\hat{G}$ dans U . On dit que G est p-réflexif s'il s'identifie canoniquement à $\hat{\hat{G}}$.

Soit $\tilde{G}$ le sous-groupe de $\hat{G}$, formé des homomorphismes à valeurs dans R, i. e., comme G est compact, le groupe de torsion de $\hat{G}$. On a $\tilde{\hat{G}} \simeq G$, et G est p-réflexif si et seulement si $\tilde{G} = \hat{G}$, ([7]), ([11]), car si $\tilde{G} \neq \hat{G}$, il existe un caractère p-adique non trivial de $\hat{G}/\tilde{G}$, c'est-à-dire un caractère non trivial de $\hat{G}$, trivial sur $\tilde{G}$, et un tel caractère ne peut être le caractère $\chi \to \chi(x)$ défini par un élément $x \in G$.

On définit pour les groupes abéliens compact t. d. une transformation de Fourier p-adique. Soit G un tel groupe et $\Gamma = \tilde{G}$. Soit $L^1(\Gamma)$ l'algèbre des applications f de Γ dans K tendant vers 0 selon le filtre des complémentaires des parties finies de Γ, la structure multiplicative étant la convolution définie par

$$f * g(\gamma) = \sum_{\delta \in \Gamma} f(\delta)\, g(\gamma\, \delta^{-1}) .$$

Munie de la norme : $\|f\|_1 = \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|$, $L^1(\Gamma)$ est une algèbre de Banach. La transformation de Fourier p-adique est l'application $\mathfrak{F}_G$ de l'algèbre de Banach $L^1(\Gamma)$ dans l'algèbre de Banach $\mathcal{C}(G, K)$ des application continues de G dans K (munie de la norme de la convergence uniforme), qui fait correspondre à une fonction $f \in L^1(\Gamma)$ la fonction $f \in \mathcal{C}(G, K)$ définie par

$$\hat{f}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\, \gamma(x) \quad \text{pour tout } x \in G .$$

L'application $\mathfrak{F}_G$ est un homomorphisme d'algèbre, continu puisque $\|\hat{f}\| \leq \|f\|_1$. L'image de $\mathfrak{F}_G$ est une sous-algèbre dense, car contenant les fonctions localement constantes.

On dit qu'un groupe abélien compact t. d. G est p-Fourier injectif si la transformation de Fourier $\mathfrak{F}_G$ est injective.

Soit Γ_s le groupe des racines p^s-èmes de l'unité dans K, et $\Gamma = \bigcup_{s \geq 0} \Gamma_s$. Le groupe Γ s'identifie au groupe des caractères p-adiques, d'ordre fini, de $\mathbb{Z}_p$, le caractère défini par $\gamma \in \Gamma$, étant l'application de $\mathbb{Z}_p$ dans K, $x \to \gamma^x$.

La notation $v(F, .)$ désigne la fonction "valuation" centrée au point 1, associée à la fonction analytique F ([10]). Si, par exemple, F est une série de Taylor, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n$, convergente sur le disque D, $v(x-1) > 0$, on a, pour $\nu > 0$:

$$v(F, \nu) = \inf_n (v(a_n) + n\nu) = \inf_{\substack{x \in K \\ v(x-1) \geq \nu}} v(x) \quad .$$

II. - NOYAU ET IMAGE DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER p-ADIQUE DE $\mathbb{Z}_p$

Nous allons établir le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Soit s_o un entier positif, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction $f \in L^1(\Gamma)$ telle que :

(1) $f(1) = 1$

(2) $f(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma_{s_o} - \{1\}$,

(3) $\|f\|_1 \leq 1 + \varepsilon$

(4) $f(\gamma) \in \mathbb{Q}_p(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$

(5) $\hat{f} = 0$.

Signalons que les conditions (2) et (3) serviront à la démonstration du théorème 2.

La démonstration du théorème 1, est basée sur la remarque suivante :

LEMME 1. - Soit $f \in L^1(\Gamma)$, et soit $(P_s(X))_{s \geq 1}$ la suite de ses polynômes d'interpolation sur les (Γ_s), c'est-à-dire que $P_s(X)$ est le polynôme tel que

$P_s(\gamma) = f(\gamma)$ <u>pour tout</u> $\gamma \in \Gamma_s$, <u>et</u> $\deg P_s(X) < p^s$.

<u>Pour que</u> $\hat{f} = 0$, <u>il faut et il suffit que</u>

$$(6) \qquad \lim_{s \to +\infty} \left(v\left(P_s , \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}\right) + s\right) = +\infty .$$

<u>Preuve</u> : Soit $P_s(X) = a_{o,s} + a_{1,s} X + \ldots + a_{p^s-1,s} X^{p^s-1}$ et soit f_s la fonction appartenant à $L^1(\Gamma)$ définie par $f_s(\gamma) = f(\gamma)$ si $\gamma \in \Gamma_s$, et $f_s(\gamma) = 0$ sinon.

Comme on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n < p^s$:

$$\hat{f}_s(-n) = \Sigma \; P_s(\gamma)\, \gamma^{-n} = p^s \, a_{n,s} ,$$

il en résulte que :

$$\inf_{z \in \mathbb{Z}_p} v(\hat{f}_s(x)) = s + \inf_{0 \leq n < p^s} v(a_{n,s}) = s + v(P_s , 0)$$

car $\displaystyle \inf_{0 \leq n < p^s} v(a_{n,s}) = \inf_{\substack{x \in K \\ v(x) \geq 0}} v(P_s(x)) = \inf_{\substack{x \in K \\ v(x-1) \geq 0}} v(P_s(x)).$

Puisque $\hat{f}$ est la limite uniforme des $\hat{f}_s$, on a donc $\hat{f} = 0$ si et seulement si :

$$(7) \qquad \lim_{s \to +\infty} (v(P_s , 0) + s) = +\infty .$$

Comme $v(P_s , 1/p^{s-1}(p-1)) \geq v(P_s , 0) \geq v(P_s , 1/p^{s-1}(p-1)) - \frac{p}{p-1}$, la condition (7) est équivalente à la condition du lemme 1 .

Nous allons construire une fonction $f \in L^1(\Gamma)$, satisfaisant aux conditions du théorème 1 , en construisant par récurrence, la suite $(P_s(X))_{s \geq s_o}$ de ses polynômes d'interpolation sur les $(\Gamma_s)_{s \geq s_o}$, i. e. une suite de polynômes satisfaisant aux conditions :

$$(8) \qquad P_s(X) = P_{s-1}(X) + (X^{p^{s-1}} - 1)\, R_s(X) , \quad \deg R_s < p^{s-1}(p-1)$$

$$(9) \qquad P_{s_o}(X) = \frac{1}{p^{s_o}} \frac{X^{p^{s_o}} - 1}{X - 1} .$$

A partir de $P_{s-1}(X)$, on choisira $R_s(X)$ de façon que le polynôme $P_s(X)$ correspondant s'annulle sur une partie B_s de $\Gamma_s - \Gamma_{s-1}$, "pas trop grosse" pour que $f = \lim_{s\to\infty} P_s$ appartienne à $L^1(\Gamma)$, et "assez grosse" pour que $\hat{f} = 0$. Nous aurons besoin du lemme suivant, dont la démonstration est à peu près évidente :

LEMME 2. - Soit φ une fonction réelle définie sur les entiers positifs telle que $0 \leq \varphi(s) \leq 1$ pour tout s. Pour tout $s \geq 1$ il existe une partie $B_s \subset \Gamma_s - \Gamma_{s-1}$ possédant les propriétés suivantes :

$$(10) \qquad \mathrm{Card}\,(B_s) = [(1-\varphi(s))p^{s-1}(p-1)] .$$

(11) Pour tout $\zeta \in \Gamma_s - \Gamma_{s-1}$ et pour tout $t < s$

$$\mathrm{Card}(B_s \cap \zeta\Gamma_t) \geq [(1-\varphi(s))p^t]$$

où l'expression $[x]$ signifie partie entière de x.

Soit φ une fonction réelle définie sur les entiers positifs, telle que $0 \leq \varphi(s) \leq 1$ pour tout s, et $\varphi(s) = 0$ pour $1 \leq s \leq s_o$. Le choix de la fonction φ sera précisé plus loin. Pour tout $s > s_o$, soit B_s une partie de $\Gamma_s - \Gamma_{s-1}$ satisfaisant aux conditions du lemme 2. Il existe une suite unique de polynômes $(P_s(X))_{s \geq s_o}$ et une suite unique de polynômes $(R_s(X))_{s > s_o}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(8) \qquad P_s(X) = P_{s-1}(X) + (X^{p^{s-1}} - 1)\, R_s(X) \qquad \text{pour } s > s_o$$

$$(9) \qquad P_{s_o}(X) = \frac{1}{p^{s_o}} \frac{X^{p^{s_o}} - 1}{X-1}$$

(12) $$R_s(\gamma) = -\frac{P_{s-1}(\gamma)}{\gamma^{p^{s-1}}-1} \quad \text{pour tout } s > s_o \text{, et tout } \gamma \in B_s \text{, et}$$

(13) $$\deg R_s(X) < [(1-\varphi(s))p^{s-1}(p-1)] \quad \text{pour} \quad s > s_o \ .$$

On remarque que $P_s(X) \in \mathbb{Q}_p(\Gamma_s)[X]$ pour tout $s \geq s_o$.

LEMME 3. - Pour tout $s > s_o$, on a :

(14) $$v(P_s, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}) \geq -s + (1-\frac{1}{p}) \sum_{s_o \leq t < s} \varphi(t) + \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p^{s_o-1}(p-1)} \ .$$

Preuve : Soit $F_s(X)$ le polynôme :

$$F_s(X) = \prod_{\alpha \in B_s} \frac{X-\alpha}{1-\alpha} \ .$$

Considérons la fonction analytique $-\frac{P_{s-1}(X)}{X^{p^{s-1}}-1}$ sur le complémentaire du disque $v(x-1) \geq \frac{1}{p^{s-2}(p-1)}$. Comme le polynôme $F_s(X)$ a tous ses zéros sur la circonférence $v(x-1) = \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}$, on peut effectuer comme dans [10], lemme 2, page 52, la division de la fonction analytique $-\frac{P_{s-1}(X)}{X^{p^{s-1}}-1}$ par $F_s(X)$, et les conditions (12) et (13) caractérisent le polynôme $R_s(X)$, comme le reste de cette division :

(15) $$-\frac{P_{s-1}(X)}{X^{p^{s-1}}-1} = \lambda_s(X)\, F_s(X) + R_s(X)$$

où $\lambda_s(X)$ est une fonction analytique sur le complémentaire du disque $v(x-1) \geq \frac{1}{p^{s-2}(p-1)}$.

On a, ([10]) :

$$v(R_s, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}) \geq v(\frac{P_{s-1}(X)}{X^{p^{s-1}}-1}, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)})$$

donc

$$v(P_s - P_{s-1}, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}) \geq v(P_{s-1}, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)})$$

et ainsi :

$$v(P_s, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}) \geq v(P_{s-1}, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}) .$$

Comme

$$\deg P_{s-1} < p^{s-2} + [(1-\varphi(s-1))\, p^{s-2}(p-1)]$$

on en déduit la formule de récurrence :

$$(16) \qquad v(P_s, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}) \geq v(P_{s-1}, \frac{1}{p^{s-2}(p-1)}) - 1 + (1-\frac{1}{p})\, \varphi(s-1)$$

d'où résulte le lemme 3.

Nous évaluerons maintenant $v(P_s(\gamma))$ pour $\gamma \in \Gamma_s - \Gamma_{s-1}$. Pour cela, nous estimons d'abord $v(F_s(\gamma))$:

LEMME 4. - Pour tout $s > s_o$, et pour tout $\gamma \in \Gamma_s - \Gamma_{s-1}$, on a :

$$(17) \qquad v(F_s(\gamma)) \geq (s-1)(1-\varphi(s)) - \frac{1}{p-1} .$$

Preuve : Résulte facilement des conditions (10) et (11), auxquelles satisfait la partie B_s de $\Gamma_s - \Gamma_{s-1}$.

Ce lemme permet d'évaluer $v(P_s(\gamma))$:

LEMME 5. - Pour tout $s > s_o$, et pour tout $\gamma \in \Gamma_s - \Gamma_{s-1}$, on a :

$$(18) \qquad v(P_s(\gamma)) \geq (1-\frac{1}{p}) \sum_{s_o \leq t < s} \varphi(t) - (s-1)\varphi(s) - \frac{1}{p^{s_o - 1}(p-1)} .$$

Preuve : Comme $P_s(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in B_s$, le polynôme $P_s(X)$ est multiple de $F_s(X)$:

$$P_s(X) = F_s(X)\, Q(X) , \quad Q(X) \in K[X] .$$

On a donc pour tout $\gamma \in \Gamma_s - \Gamma_{s-1}$

$$(19) \qquad v(P_s(\gamma)) \geq v(F_s(\gamma)) + v(Q, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}) .$$

Or $v(F_s, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}) = 0$, donc :

$$(20) \qquad v(Q, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}) = v(P_s, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}) .$$

Le lemme 5 résulte alors de (19) et de (20), et des lemmes 3 et 4.

Démonstration du théorème 1 : Soit $\delta = \log_p(1+\varepsilon)$. On peut supposer s_o suffisamment grand pour que $\frac{1}{p^{s_o-1}(p-1)} \leq \delta/2$. On choisit une fonction φ définie sur $\mathbb{N}^*$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $\varphi(t) = 0$ pour $t \leq s_o$, que la série $\sum_{t\in\mathbb{N}^*} \varphi(t)$ soit divergente, et que pour tout $s > s_o$, on ait :

$$(21) \qquad (1-\frac{1}{p}) \sum_{s_o \leq t < s} \varphi(t) - (s-1)\varphi(s) \geq -\frac{\delta}{2}$$

(par exemple, pour $s > s_o$, $\varphi(s) = \delta/2(s-1)$) .

Soit alors f la fonction sur Γ à valeurs dans K , dont la suite de polynômes d'interpolation sur les $(\Gamma_s)_{s\geq s_o}$, est la suite $(P_s(X))_{s\geq s_o}$, c'est-à-dire la fonction telle que : $f(1) = 1$, $f(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma_{s_o}$, $\gamma \neq 1$ et $f(\gamma) = P_s(\gamma)$ pour tout $s > s_o$ et tout $\gamma \in \Gamma_s - \Gamma_{s-1}$.

D'après le lemme 5, la divergence de la série $\sum_{t\in\mathbb{N}^*} \varphi(t)$ implique $f \in L^1(\Gamma)$, et la condition (21) que :

$$\|f\|_1 \leq 1+\varepsilon .$$

Les lemmes 1 et 3 montrent que $\hat{f} = 0$.

Enfin, les conditions (12) et (13) montrent que pour tout $s > s_o$, le polynôme $P_s(X)$ est à coefficient dans $\mathbb{Q}_p(\Gamma_s)$, donc $f(\gamma) \in \mathbb{Q}_p(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Le théorème 1 permet de montrer la surjectivité de la transformation de Fourier p-adique relative à $\mathbb{Z}_p$. De façon plus précise :

THÉORÈME 2. - La transformation de Fourier p-adique $\mathfrak{F}$ relative à $\mathbb{Z}_p$ est un homomorphisme surjectif de l'algèbre $L^1(\Gamma)$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, et définit, par passage au quotient, une isométrie de $L^1(\Gamma)/\ker \mathfrak{F}$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\binom{x}{n}$ le polynôme coefficient binomial. Comme les $\binom{x}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ forment une base normale de l'espace de Banach $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, il suffit de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_n \in L^1(\Gamma)$ telle que :

$$(22) \qquad \hat{g}_n(x) = \binom{x}{n} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{Z}_p$$

et

$$(23) \qquad \|g_n\|_1 \leq 1+\varepsilon .$$

Nous allons montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier $s_o > 0$, il existe $g_n \in L^1(\Gamma)$ satisfaisant aux conditions (22), (23) et :

$$(24) \qquad g_n(\gamma) = 0 \quad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma_{s_o} - \{1\}.$$

On peut supposer $p^{1/p^{s_o}(p-1)} < 1+\varepsilon$, et soit alors $\delta > 0$ tel que

$$(1+\delta)^2 \, p^{1/p^{s_o}(p-1)} \leq 1 + \varepsilon$$

L'existence de la fonction g_n étant triviale pour $n = 0$, soit $n > 0$, et supposons qu'il existe $g_{n-1} \in L^1(\Gamma)$ telle que :

$$(22)' \qquad \hat{g}_{n-1}(x) = \binom{x}{n-1}$$

$$(23)' \qquad \|g_{n-1}\|_1 \leq 1+\delta$$

$$(24)' \qquad g_{n-1}(\gamma) = 0 \quad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma_{s_o} - \{1\} .$$

D'après le théorème 1, soit $f \in L^1(\Gamma)$ telle que $f(1) = 1$, $f(\gamma) = 0$, pour $\gamma \in \Gamma_{s_o} - \{1\}$, $\|f\|_1 \leq 1+\delta$, et $\hat{f} = 0$, et soit $g_n \in L^1(\Gamma)$, définie par :

$$g_n(\gamma) = \frac{g_{n-1}(\gamma) - g_{n-1}(1)\, f(\gamma)}{\gamma - 1} \qquad \text{pour } \gamma \neq 1$$

$$g_n(1) = - \sum_{\gamma \neq 1} g_n(\gamma) \quad .$$

La fonction g_n satisfait aux conditions (23) et (24). Comme d'autre part :

$$\hat{g}_n(x+1) - \hat{g}_n(x) = \binom{x}{n-1}$$

et

$$\hat{g}_n(0) = 0 \quad , \quad \text{on a bien :}$$

$$\hat{g}_n(x) = \binom{x}{n} \quad . \tag{22}$$

Ce résultat répond à des questions posées par certains auteurs, par exemple C. F. Woodcock ([15]).

<u>Remarque</u> : Le lemme 1 peut se traduire en termes de prolongement analytique d'une fonction $f \in L^1(\Gamma)$ au disque $D = \{x \in K \mid |x-1| < 1\}$, on obtient ainsi une caractérisation du noyau de la transformation de Fourier. Le résultat le plus précis nous a été signalé par Y. Amice :

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> $f \in L^1(\Gamma)$. <u>Pour que</u> $\hat{f} = 0$, <u>il faut et il suffit qu'il existe un prolongement de</u> f <u>en une fonction analytique</u> g <u>sur le disque</u> D, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-1)^n$, <u>satisfaisant à l'une des conditions équivalentes</u> :

$$\lim_{n \to \infty} (v(a_n) + \log_p n) = +\infty \tag{25}$$

$$\lim_{s \to \infty} \left(v\left(g, \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}\right) + s\right) = +\infty \quad . \tag{26}$$

La proposition 1 permet de démontrer la non-injectivité de la transformation de Fourier p-adique de $\mathbb{Z}_p$, en construisant une fonction analytique g sur D, satisfaisant à la condition (26), et dont la restriction à Γ soit dans $L^1(\Gamma)$. On construit la fonction g en se donnant un ensemble de zéros $((\Gamma_{s_o} - \{1\}) \cup (\bigcup_{s > s_o} B_s))$ et en appliquant un résultat de M. Lazard (théorème 2, page 67, [10]) précisé comme dans [4] dans le cas où le corps K n'est pas maximalement complet. On peut ainsi démontrer le théorème 1, à l'exception de la condition "$f(\gamma) \in \mathbb{Q}_p(\gamma)$". La démonstration que nous donnons ici présente l'avantage d'être effective, et de permettre aussi de compléter le théorème 1 par la condition "$f(\gamma) \in \mathbb{Q}_p(\gamma)$".

III. - RELATIONS DE DÉPENDANCE LINÉAIRE ENTRE CARACTÈRES

Il est facile de voir que pour tout entier $i > 0$, il existe $g \in L^1(\Gamma)$ telle que $g \neq 0$, que $\hat{g} = 0$, et que $g(\gamma) \in \mathbb{Q}_p(\gamma^{p^i})$ pour tout γ. En effet, soit $f \in L^1(\Gamma)$ telle que $f \neq 0$, $\hat{f} = 0$, et $f(\gamma) \in \mathbb{Q}_p(\gamma)$ pour tout γ. La fonction $g : g(\gamma) = f(\gamma^{p^i})$, satisfait aux conditions recherchées. Ce résultat est le meilleur possible. En effet, soit $K_\infty = \bigcup_n K_n$ où $K_n = \mathbb{Q}_p(\Gamma_n)$.

THÉORÈME 3. - Soit $f \in L^1(\Gamma)$, telle que $\hat{f} = 0$, et satisfaisant de plus aux conditions :

(27) $f(\gamma) \in K_\infty$ pour tout γ

(28) Pour tout entier i, l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $f(\gamma) \notin \mathbb{Q}_p(\gamma^i)$ est fini.

Alors, $f = 0$.

Preuve : La démonstration fait appel à la théorie des extensions galoisiennes de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. On définit une application K_i-linéaire de K_∞ sur K_i, T_{K_∞/K_i} définie par :

$$T_{K_\infty/K_i} = \lim_{\substack{\rightarrow \\ n \geq i}} \frac{1}{p^{n-i}} Tr_{K_n/K_i}$$

où Tr_{K_n/K_i} désigne la trace de K_n sur K_i. Cette application est continue et possède de plus la propriété suivante :

$$T_{K_\infty/K_i}(\xi) = 0 \quad \text{si} \quad \xi \in \Gamma - \Gamma_i \quad (\text{pour } i \geq 1)$$

(proposition 6, p. 172, [14]).

LEMME 6. - Soient i et n deux entiers tels que $0 < i < n$, et soit f une application de Γ_n dans un corps $E \supset K_n$. Les conditions :

$$(29) \qquad \sum_{\gamma \in \Gamma_n} f(\gamma)\, \gamma^x = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{Z}_p - p^i \mathbb{Z}_p$$

$$(30) \qquad (\gamma \equiv \gamma' \mod \Gamma_i) \Rightarrow (f(\gamma) = f(\gamma'))$$

sont équivalentes.

Preuve : On compare la dimension des sous-E-espaces vectoriels de l'espace des applications de K_n dans E formés des applications f satisfaisant (29) et (30) respectivement.

Le théorème 3 se démontre alors en appliquant Tr_{K_∞/K_n} à la relation :

$$\sum_{x \in \Gamma} f(\gamma)\, \gamma^x = 0$$

pour un entier n, convenablement choisi. On obtient ainsi que pout tout $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$(31) \qquad \sum_{\gamma \in \Gamma_N} f(\gamma)\, \gamma^x = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{Z}_p - p^i \mathbb{Z}_p \quad ,$$

dès que N est suffisamment grand.

D'après le lemme 6, la relation (31) implique que la fonction f est constante sur toute classe dans Γ, modulo Γ_i, pour tout i, et comme $f \in L^1(\Gamma)$, on a donc $f = 0$.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $\mathbb{C}_p$ <u>le complété de la clôture algébrique</u> Ω_p <u>de</u> $\mathbb{Q}_p$. <u>Soit</u> L <u>un sous-corps fermé de</u> $\mathbb{C}_p$, <u>d'indice de ramification sauvage fini sur</u> $\mathbb{Q}_p$. <u>Soit</u> $f \in L^1(\Gamma)$, <u>à valeurs dans</u> L, <u>telle que</u> $\hat{f} = 0$. <u>Alors</u>, $f = 0$.

<u>Preuve</u> : On remarque tout d'abord que L est l'adhérence d'une extension algébrique Λ de $\mathbb{Q}_p$. Ceci est conséquence d'un résultat de S. Sen ([13]), selon lequel si H est un groupe d'automorphismes de Ω_p, et $\widetilde{H}$ le groupe d'automorphismes de $\mathbb{C}_p$, obtenu par prolongement par continuité dès éléments de H, le sous-corps des invariants de $\widetilde{H}$ dans $\mathbb{C}_p$ est l'adhérence du sous-corps des invariants de H dans Ω_p.

Soit $E = \Lambda \cap K_\infty$, E est une extension de degré fini sur $\mathbb{Q}_p$. On démontre d'abord le résultat dans le cas où Λ est <u>inerte</u> sur E. Dans ce cas, il existe une base normale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du E-espace de Banch L, telle que $e_n \in \Lambda$ pour tout n ([12]). Alors, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une base normale de l'espace de Banach $\overline{\Lambda K_\infty}$ sur $\overline{K}_\infty$, et par projection sur $\overline{K}_\infty$, on se ramène au théorème 3.

Dans le cas général, désignons par Λ_o la plus grande extension inerte de E, contenue dans Λ. L'extension Λ est alors la réunion d'une suite $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'extensions complètement ramifiées, de degré fini, sur Λ_o, il existe donc un entier $a > 0$ tel que $[\Lambda_n : \Lambda_o] \not\equiv 0 \pmod{p^{a+1}}$ pour tout n, donc $[\Lambda_n K_\infty : \Lambda_o K_\infty] \not\equiv 0 \pmod{p^{a+1}}$, puisque Λ et $\Lambda_o K_\infty$ sont linéairement disjointes sur Λ_o. L'application t, de ΛK_∞ dans $\Lambda_o K_\infty$, limite inductive des applications

$\frac{1}{[\Lambda_n K_\infty : \Lambda_o K_\infty]} Tr_{\Lambda_n K_\infty : \Lambda_o K_\infty}$, est alors continue sur ΛK_∞, et se prolonge en une forme $\overline{\Lambda_o K_\infty}$-linéaire continue, $\hat{t}$, sur $\overline{\Lambda K_\infty}$. De plus, pour tout n, la restriction de t à Λ_n est $\frac{1}{[\Lambda_n : \Lambda_o]} Tr_{\Lambda_n : \Lambda_o}$, donc $\hat{t}(L) = \overline{\Lambda}_o$. En appliquant $\hat{t}$ à une relation $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma^x = 0$, à coefficients dans L, on se ramène alors au premier cas.

Nous ignorons si le corollaire du théorème 3 reste vrai en remplaçant la condition " L est d'indice de ramification sauvage fini sur $\mathbb{Q}_p$ " par une condition plus faible comme " $L \cap K_\infty$ est de degré fini sur $\mathbb{Q}_p$ ".

IV. - SURJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER p-ADIQUE RELATIVE A UN GROUPE ABÉLIEN COMPACT TOTALEMENT DISCONTINU.

Soit G un groupe abélien compact t. d.. Le groupe G est isomorphe (algébriquement et topologiquement) au groupe produit $\prod_{\pi \in P} G_\pi$, où P désigne l'ensemble des nombres premiers, et pour tout $\pi \in P$, G_π est le pro-π-sous-groupe de G, formé des éléments $x \in G$ tels que $\lim_{n \to \infty} \pi^n x = 0$ ([5]). Pour que le groupe G soit p-réflexif, resp. p-Fourier-injectif, resp. p-Fourier-surjectif, il faut et il suffit que sa pro-p-composante G_p le soit. Pour les propriétés de réflexivité, et de Fourier-injectivité, cela résulte de ([8, 9]), et pour la surjectivité, des lemmes suivants :

LEMME 7. - Tout sous-groupe fermé d'un groupe abélien compacts t.d., p-Fourier-surjectif, est p-Fourier-surjectif.

LEMME 8. - Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes abéliens compacts t.d., p-Fourier surjectifs. Supposons que pour chaque $i \in I$, à un nombre fini d'exceptions près,

<u>la transformation de Fourier</u> $\mathfrak{F}_i : L^1(\widetilde{G}_i) \to \mathcal{C}(G_i, K)$ <u>définisse par passage au quotient</u>, <u>une isométrie de</u> $L^1(\widetilde{G}_i)/\ker \mathfrak{F}_i$ <u>sur</u> $\mathcal{C}(G_i, K)$. <u>Alors le groupe produit</u> $G = \prod_{i \in I} G_i$ <u>est</u> p-<u>Fourier surjectif.</u>

On peut donc se restreindre au cas où G est un pro-p-groupe. Soit alors H le plus petit sous-groupe fermé de G, tel que le groupe quotient G/H soit nul ou sans torsion. On sait que, pour que G soit p-réflexif (resp. p-Fourier-injectif) il faut et il suffit que $G = H$.

Comme $H^{\perp}$ est un sous-groupe p-divisible du dual complexe G' de G, $H^{\perp}$ est facteur direct dans G', et d'autre part, $H^{\perp}$ est une somme directe : $H^{\perp} \simeq \Gamma^{(I)}$ ([5]). Il en résulte que $G \simeq H \oplus \mathbb{Z}_p^I$ (algébriquement et topologiquement), et les lemmes 7 et 8 montrent que G <u>est</u> p-<u>Fourier-surjectif si et seulement si</u> H <u>est fini.</u>

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. AMICE. - Interpolation p-adique. Bul. Soc. Math. France, t. 92, 1964, pp. 117-160.

[2] Y. AMICE et A. ESCASSUT. - Une solution au problème de la non-Fourier-injectivité de $\mathbb{Z}_p$. C. R. A. S., 1974, t. 273, série A, pp. 583-585.

[3] J. FRESNEL et B. de MATHAN. - Sur la transformation de Fourier p-adique. C. R. A. S. 1973, t. 277, série A, pp. 711-714.

[4] J. FRESNEL et B. de MATHAN. - L'image de la transformation de Fourier p-adique. C. R. A. S. 1974, t. 278, série A, pp 653-656.

[5] L. FUCHS. - Abelian groups. Pergamon Press, 1960.

[6] M. GUERRAOUI. - Sur la dualité p-adique entre groupes compacts et groupes discrets. Thèse de spécialité, Bordeaux, 1971.

[7] M. GUERRAOUI. - Sur la dualité p-adique. C. R. A. S. 1972, t. 275, série A, pp. 1281-1284.

[8] M. GUERRAOUI et B. de MATHAN. - Dualité et transformation de Fourier p-adiques. Séminaire de Théorie des Nombres, 1971-1972, Bordeaux, exposé n° 3.

[9] M. GUERRAOUI et B. de MATHAN. - Groupes p-réflexifs et transformation de Fourier p-adique. C. R. A. S. 1973, t. 276, série A, pp. 423-426.

[10] M. LAZARD. - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. Publications mathématiques, I. H. E. S. n° 14

[11] W. H. SCHIKHOF. - Non archimedean harmonic analysis. Thèse Nijmegen, 1967.

[12] J.-P. SERRE. - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. Publications mathématiques I. H. E. S. n° 12.

[13] S. SEN. - On automorphisms of local fields. Annals of Math. t. 90, 1969, pp. 33-40.

[14] J. TATE. - p-divisible groups. Proceeding of a conference on local fields. Springer Verlag, 1967.

[15] C. F. WOODCOCK. - Fourier Analysis for p-adic Lipschitz functions. J. London Math. Soc. (2), 1974, p. 681-693.

-:-:-:-

Jean FRESNEL
Bernard de MATHAN
E. R. A. au C. N. R. S. n° 362
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE