Alain Escassut

Propriétés spectrales en analyse non archimédienne

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 157-167
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__157_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

PROPRIÉTÉS SPECTRALES EN ANALYSE NON ARCHIMÉDIENNE

par

Alain ESCASSUT

-:-:-:-

I. - <u>SPECTRE MULTIPLICATIF D'UNE ALGÈBRE DE BANACH.</u> - Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach et soit Max(A) l'ensemble des idéaux maximaux de A identifié à l'ensemble $\mathfrak{X}(A)$ des caractères de A , muni de la topologie de la convergence simple. Alors $\mathfrak{X}(A)$ est un compact qui possède des propriétés de connexité intéressante. Par exemple, pour tout ouvert fermé U de $\mathfrak{X}(A)$, il existe un idempotent unique u associé à U tel que

$$\forall \psi \in \mathfrak{X}(A) \quad : \quad \begin{array}{l} \psi(u) = 1 \Leftrightarrow \psi \in U \\ \psi(u) = 0 \Leftrightarrow \psi \notin U \end{array} .$$

Si l'on considère maintenant un corps ultramétrique complet, algébriquement clos K et une K-algèbre de Banach $(A, \|.\|)$ le spectre maximal Max(A) de A ne possède aucune propriété topologique comparable. Par contre, si l'on note $\mathrm{Max}_a(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de codimension 1 de A et $\mathfrak{X}_a(A)$ l'ensemble des caractères de A , on remarque que l'application $\underset{\psi \in \mathfrak{X}_a(A)}{\psi \to |\psi|}$

est une bijection de $\mathfrak{X}_a(A)$ dans l'ensemble des semi-normes multiplicatives continues de A, que l'on notera $\mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$, et qui est compact pour la topologie de la convergence simple [5]. (Dans le cas complexe il s'agit d'une bijection).

D'autre part, $\forall \varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$, l'ensemble $\mathrm{Ker}\,\varphi$ des $f \in A$ tels que $\varphi(f) = 0$ est un idéal premier de A.

Rappelons à ce sujet le théorème 1 de [4].

THÉORÈME 1. - <u>Pour tout idéal maximal</u> $\mathfrak{M}$ <u>d'une</u> K-<u>algèbre de Banach</u> $(A, \|\cdot\|)$, <u>il existe</u> $\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$ <u>tel que</u> $\mathrm{Ker}\varphi = \mathfrak{M}$.

Alors on a le théorème 1 du chapitre III de [5].

THÉORÈME 1. - <u>Pour tout ouvert fermé</u> U <u>de</u> $\mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$ <u>il existe un idempotent unique</u> u <u>associé à</u> U <u>tel que pour tout</u> $\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$,

$$\varphi(u) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in U$$

$$\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow \varphi \notin U .$$

II. - <u>SPECTRE MULTIPLICATIF D'UNE ALGÈBRE DE KRASNER</u> $H(D)$. - Soit D un fermé borné, soit $K(D)$ l'algèbre des fractions $R(X) \in K(X)$, sans pôle dans D, normé par la norme $\|\cdot\|$ de la convergence uniforme sur D, et soit $H(D)$ l'algèbre de Banach complétée de $K(D)$ pour cette norme.

Le spectre multiplicatif des algèbres $K(D)$ et $H(D)$ a été étudié dans [3]. On doit d'abord caractériser les semi-normes multiplicatives (continues ou non) de $K(D)$ par un filtre appelé <u>filtre circulaire</u> défini de la façon suivante.

Soit Φ une suite de disques d_n strictement décroissante, de diamètres r_n, soit $\Delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} d_n$, et soit $r = \inf_n r_n$. Soit $\hat{\Phi}$ l'ensemble des couronnes $\Gamma(a, r', r'')$ où $a \in \Delta$ et où $r' < r < r''$. On appelle filtre circulaire un filtre de K admettant pour système générateur une famille de la forme $\Phi \cup \hat{\Phi}$.

On retient de la proposition XII de [3] le théorème :

THÉORÈME 2. - L'ensemble Mult K(D) des semi-normes multiplicatives (continues ou non) de K(D) est en bijection naturelle avec l'ensemble $\Theta(D)$ des filtres circulaires de K autres que les filtres de voisinages des points de K-D, par l'application $\mathcal{F} \to \varphi_{\mathcal{F}}$ où $\varphi_{\mathcal{F}}(h) = \lim_{\mathcal{F}} |h(x)|$ $(\forall h \in K(D))$.

Alors on a le théorème de [3].

THÉORÈME 3. - Pour tout $\mathcal{F} \in \Theta(D)$, $\varphi_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Mult}(K(D), \|.\|_D)$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est sécant à D.

Les éléments de $\mathrm{Mult}(K(D), \|.\|_D)$ se prolongent naturellement en élément de H(D) et l'on retrouve donc la même bijection entre $\mathrm{Mult}(H(D), \|.\|_D)$ et l'ensemble des filtres circulaires de K sécants à D.

III. - UNE CONJECTURE DE GUENNEBAUD. - L'application $\underset{\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|.\|)}{\varphi \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi}$ n'est pas une injection : trivialement, deux normes multiplicatives distinctes de A admettent le même noyau $\{0\}$. B.Guennebaud avait conjecturé que la restricition $\underset{\varphi \in \mathrm{Mult}_m(A, \|.\|)}{\varphi \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi}$ est une injection (où $\mathrm{mult}_m(A, \|.\|)$ désigne l'ensemble des $\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|.\|)$ tels que Ker φ soit un idéal maximal). En fait, en considérant le quotient de A par Ker φ, on voit que cette conjecture est équivalente à la conjecture suivante plus simple à formuler.

(C) Un corps Γ muni d'une norme de K-algèbre de Banach admet une seule valeur absolue continue pour cette norme.

Dans le cas où l'algèbre A est une algèbre H(D), l'étude des valeurs absolues continues des quotients de H(D) par ses idéaux maximaux $\mathfrak{M}$ nécessite d'abord de caractériser ceux-ci par les filtres circulaires $\mathfrak{F}$ des valeurs absolues $\varphi_{\mathfrak{F}}$ tels que $\mathfrak{M} = \operatorname{Ker} \varphi_{\mathfrak{F}}$.

Notations et définitions. - Soit $\mathfrak{F}$ un filtre circulaire sécant à un infraconnexe D et soit $\Delta(\mathfrak{F}, D) = (\bigcap_{d \in \mathfrak{F}} \underline{\underline{d}}) \cap D$ (où $\underline{\underline{d}}$ désigne le plus petit disque circonférencié contenant d). Nous dirons qu'un filtre circulaire est sous-distingué, si :

$\Delta(\mathfrak{F}, D)$ admet une partition par une famille de chapeaux de T-filtres croissants et si tout T-filtre décroissant de $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ est sécant à l'un au moins des éléments de cette partition. (Ces notions sont définies dans [7]).

Nous dirons qu'un filtre circulaire sous-distingué $\mathfrak{F}$ est distingué si $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ est égal à D ou à la plage d'un T-filtre décroissant de D .

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre circulaire de K sécant à un infraconnexe fermé borné D . On notera $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ l'idéal des $f \in H(D)$ tels que $\lim_{\mathfrak{F}} f = 0$ et on notera $\Theta(D)$ l'ensemble des filtres circulaires distingués sécants à D .

THÉORÈME 5. - L'application $\underset{\Theta(D)}{\mathfrak{F}} \longrightarrow \underset{\operatorname{Max} H(D)}{\mathfrak{J}(\mathfrak{F})}$ est une bijection de $\Theta(D)$ sur l'ensemble des idéaux maximaux de codimension ∞ de H(D) . De plus, si $\mathfrak{F}$ est un filtre circulaire sécant à D tel que $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ soit un idéal maximal de codimension ∞ de H(D) , alors $\mathfrak{F}$ est sous-distingué.

Le problème posé se ramène donc, pour une algèbre de Krasner, à étudier s'il peut exister un filtre circulaire sous-distingué, mais non distingué $\mathfrak{F}$, tel que $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ soit maximal, ou encore, s'il existe un filtre circulaire distingué $\mathfrak{G}$ et un filtre circulaire sous-distingué $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$ tel que $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{G})$.

DÉFINITION. - Nous dirons qu'un filtre circulaire distingué est <u>régulier</u> si pour tout filtre circulaire sous-distingué $\mathfrak{F}$ tel que $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ on a $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ où G désigne le groupe de valuation de K et k son corps des restes.

THÉORÈME 6. - <u>Si</u> G <u>ou</u> k <u>est non dénombrable</u>, <u>tout filtre circulaire distingué sécant à un infraconnexe</u> D <u>est régulier</u>. <u>Si</u> G <u>et</u> k <u>sont dénombrables</u>, <u>il existe des infraconnexes</u> D <u>admettant des filtres circulaires distingués sécants à</u> D <u>et irréguliers</u>.

IV. - <u>SEMI-NORMES SPECTRALES</u>. - Soit A une $\underset{\sim}{C}$-algèbre de Banach unitaire dont la norme est notée $\|.\|$, soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des homomorphismes de A sur $\underset{\sim}{C}$ et, pour tout $x \in A$, soit $s_A(x)$ l'ensemble des $\lambda \in \underset{\sim}{C}$ tels que $x-\lambda$ ne soit pas inversible dans A. Alors on connait la relation

$$\sup_{\varphi \in \mathfrak{X}} |f(x)| = \sup_{\lambda \in s_A(x)} |\lambda| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

vraie pour tout $x \in A$, et cette relation conduit à définir une semi-norme $\|.\|_{sp}$ appelée <u>semi-norme spectrale</u> par

$$\|x\|_{sp} = \sup_{\varphi \in \mathfrak{X}} |\varphi(x)| .$$

Considérons maintenant une K-algèbre de Banach A dont la norme $\|.\|$ n'est d'ailleurs pas supposée ultramétrique. On peut naturellement définir une semi-norme $\|.\|_{si}$ par

$$\|x\|_{si} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} ,$$

et il est clair que $\|.\|_{si} \leq \|.\|$. De plus, il résulte du théorème 1 de [4] que si l'on note $\mathrm{Mult}(A, \|.\|)$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives de A continues pour la norme $\|.\|$, on a

$$\|x\|_{si} = \sup_{f\in \mathrm{Mult}(A, \|.\|)} f(x) .$$

D'autre part, si A n'est pas un corps, l'ensemble $s_A(x)$ des $\lambda \in K$, tels que $x-\lambda$ ne soit pas inversible, est non vide pour tout $x\in A$, et l'on peut définir une semi-norme $\|.\|_s$ par

$$\|x\|_s = \sup_{\lambda\in s_A(x)} |\lambda|$$

qui vérifie de façon immédiate $\|x\|_s \leq \|x\|_{si}$ du fait que A est complète.

Enfin, si A admet au moins un idéal maximal de codimension 1, l'ensemble $\mathfrak{X}$ des homomorphismes de A sur K est non vide ainsi que les ensembles

$$sa_A(x) = \{\varphi(x) \; ; \; \varphi\in\mathfrak{X}\} \quad (x\in A)$$

et l'on peut définir une semi-norme $\|.\|_{sa}$ par

$$\|x\|_{sa} = \sup |\varphi(x)| = \sup |\lambda| ,$$

et l'on a trivialement $\|.\|_{sa} \leq \|.\|_s$.

Mais contrairement au cas d'une $\underset{\sim}{C}$-algèbre de Banach, la double inégalité

$$\|x\|_{sa} \leq \|x\|_s \leq \|x\|_{si}$$

peut parfois être stricte ([2], théorème VI. 12).

<u>Exemple</u> : $\|h\| = \sup_{r\leq 1} |h|(r)$, $h\in K(D)$, où $D = \{x \; ; \; |x|\leq 1\}$.

Propriétés (o) , (p) , (q)

Ceci nous conduit à étudier les trois propriétés suivantes :

Dans une K-algèbre de Banach qui n'est pas un corps, on notera (q) la propriété

$$(q) \qquad \|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{si} \; .$$

Dans une K-algèbre de Banach, dont l'un au moins des idéaux maximaux est de codimension 1 , on notera (o) et (p) les propriétés

$$(o) \qquad \|\cdot\|_{sa} = \|\cdot\|_s \; ,$$

$$(p) \qquad \|\cdot\|_{sa} = \|\cdot\|_{si} \; .$$

Par définition, on voit que A possède (p) si, et seulement si, elle possède (o) et (q) . Nous allons comparer de façon plus précise ces propriétés.

THÉORÈME 7. - Les propriétés (o) et (p) sont équivalentes dans la classe des K-algèbres de Banach dont un idéal maximal au moins est de codimension 1 .

THÉORÈME 8. - Soit D l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi| < 1$, et soit $A = H(D)\{T\}$ l'algèbre des séries formelles restreintes en T à coefficients dans H(D) , dont l'application identique sur D est notée x . Soit $X = 1 - xT$, soit $r \in]0,1[$, et soit S l'ensemble des polynômes en X de la forme $\prod_{i=1}^{n} (X-a_i)^{q_i}$, où $|a_i| < r$ pour tout i . Alors l'application $\|\cdot\|_s^B$, définie sur l'algèbre $B = S^{-1}A$ par

$$t \to \|t\|_s^B = \sup_{\lambda \in s_B(t)} |\lambda| \qquad (t \in B) \; ,$$

est une norme, et l'algèbre de Banach $\hat{B}$ complétée de B pour cette norme possède la propriété (q), mais non la propriété (p) .

Preuve. - On montre que $\|\frac{1}{x}\|_s^{\hat{B}} = \frac{1}{r}$ et $\|\frac{1}{X}\|_{sa}^{\hat{B}} = 1$, tandis que, par construction, $\hat{B}$ possède la propriété (q) .

Remarque 1. - Rappelons à ce sujet le théorème VI. 10 de [2] qui se généralise de façon évidente dans le cas d'une K-algèbre de Banach unitaire A , même si la norme de A n'est pas ultramétrique.

Soit A une K-algèbre de Banach unitaire, qui possède la propriété (p) . Soit x un élément de A dont les composantes infra-connexes du spectre D sont en nombre fini n et notées $D_1, \dots, D_n$. Soit $\Delta = sa_A(x)$, et soit $\Delta_i = D_i \cap \Delta$ $(1 \leq i \leq n)$. Alors Δ_i est une frontière analytique de D_i $(i \leq i \leq n)$.

Remarque 2. - On peut se demander si $Mult_m(A, \|.\|)$ est toujours dense dans $Mult(A, \|.\|)$ lorsque A possède la propriété (p) . Mais un contre-exemple très pathologique semble indiquer que non.

V. - IDEMPOTENTS ASSOCIÉS. - Soit A une $\underset{\sim}{C}$-algèbre de Banach, et soit $x \in A$.

On dit qu'un idempotent u de A est associé à x et à une partie E de $s_A(x)$ si, pour tout $\varphi \in \mathfrak{X}$ tel que $\varphi(x) \in E$, on a $\varphi(u) = 1$, et pour tout $\varphi \in \mathfrak{X}$ tel que $\varphi(x) \notin E$, on a $\varphi(u) = 0$. On a donné, dans [1] et [2], une définition semblable de la notion d'idempotents associés, et on a obtenu certains résultats dans le cas où A possède la propriété (p) . Toutefois, il apparaît que si l'on veut obtenir des résultats plus généraux (en particulier si A ne satisfait plus (p) mais seulement (q)), il est préférable de considérer une notion légèrement différente d'idempotents associés qui coïncide toutefois avec la précédente si A satisfait la propriété (p), d'après les théorèmes VI. 10 et VI. 15 de [2].

DÉFINITION. - Soient A une K-algèbre de Banach, $\hat{\mathfrak{X}}$ l'ensemble des homomorphismes de A sur des extensions de K, et soit $x \in A$. Nous dirons qu'un idempotent u de A est <u>associé</u> à x et à une partie E de $s_A(x)$ si, pour tout $\varphi \in \hat{\mathfrak{X}}$ tel que $\varphi(x) \in E$, on a $\varphi(u) = 1$ et si, pour tout $\varphi \in \hat{\mathfrak{X}}$ tel que $\varphi(x) \notin E$, $\varphi(x) \in K$, on a $\varphi(u) = 0$.

<u>Remarque.</u> - Si l'algèbre A possède la propriété (p), la nouvelle définition d'un idempotent associé à x et à $E \subset s_A(x)$ coïncide avec celle de [1] et [2], et tous les résultats de [1] et [2] s'appliquent à cette nouvelle définition. En particulier, si A satisfait (p) et s'il existe un idempotent associé à x et à E, il est unique ([2], théorème VI. 15).

Pour généraliser le théorème VI. 16 de [2], nous devrons utiliser les résultats de [3] sur les semi-normes multiplicatives continues de l'algèbre $K(D)$ des fractions rationnelles sans pôle dans un fermé borné D de K.

DÉFINTION. - Nous dirons qu'une couronne vide Γ de D ([2]) est x-<u>fendue</u> si elle possède la propriété

$$\inf_{a \in \Gamma} |a| \, \|t_a\|_{si} < 1 \qquad \text{où} \qquad t_a = \frac{x-\alpha}{(x-a)^2} .$$

THÉORÈME 9. - <u>Soit A une K-algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps. Soit $x \in A$, soit $D = s_A(x)$, et soit Γ_0 une couronne x-fendue de D. Alors il existe un idempotent associé à x et $\mathfrak{J}(\Gamma_0)$ (resp. à x et $\mathcal{E}(\Gamma_0)$). De plus, si les composantes infra-connexes de D sont en nombre fini $(D_1, \ldots, D_n)$, et si toute couronne vide de D est x-fendue, alors il existe une famille d'idempotents u_i $(1 \leq i \leq n)$ tels que u_i soit associé à x et D_i, et tels que</u>

(1) $u_i u_j = 0$ pour $i \neq j$

et

(2) $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$.

(Le couronnes vides Γ de D sont définies notamment dans [2], IV, ainsi que $\mathfrak{J}(\Gamma)$ et $\mathcal{S}(\Gamma)$).

COROLLAIRE 1. - Soit A une K-algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps et qui possède la propriété (q) ; alors, pour toute couronne vide Γ de $D = s_A(x)$, il existe un idempotent associé à x et $\mathfrak{J}(\Gamma)$ (resp. x et $\mathcal{S}(\Gamma)$) ; de même, si les composantes infra-connexes de D sont en nombre fini n , il existe une famille d'idempotents u_i $(1 \leq i \leq n)$ associés à x et à D_i , et satisfaisant (1) et (2) . Enfin, si A admet au moins un idéal maximal de codimension 1 et possède la propriété (p) , les idempotents u_i existent, et sont uniques.

COROLLAIRE 2. - Soit A une K-algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps, qui possède la propriété (q), et dont les idempotents sont en nombre fini N . Alors pour tout $x \in A$, le nombre des composantes infra-connexes de $s_A(x)$ est majoré par N .

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT A. - Spectre algébrique et idempotents associés dans une algèbre de Banach ultramétrique. C.R.Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, série A, p. 1285-1288.

[2] ESCASSUT A. - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate. Astérisque, 1973, n° 10, p. 1-107.

[3] GARANDEL G. - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner. Ind. Math., 1975.

[4] GUENNEBAUD B. - Algèbres localement convexes sur les corps valués. Bull. Sc. Math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.

[5] GUENNEBAUD B. - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques. Thèse Sc. Math. Univ. Poitiers, 1973.

[6] MOTZKIN E. et ROBBA P. - Ensemble d'analycité en analyse p-adique. Séminaire Delange-Pisot-Poitou : théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n° 8a, 5p.

[7] ESCASSUT A. - Les algèbres de Krasner. C. R. A. S. Paris, série A, t. 272, premier mars 1971, p. 598-601.

[8] ESCASSUT A. - T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique. Ann. de l'Inst. Fourier, t. 25, fasc. 2, 1975.

-:-:-:-

Alain ESCASSUT
E.R.A. au C.N.R.S. n°362
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE