

Astérisque

EUGÈNE DUBOIS

GEORGES RHIN

Approximations rationnelles simultanées de nombres algébriques réels et de nombres algébriques p -adiques

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 211-227

http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__211_0

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATIONS RATIONNELLES SIMULTANÉES DE NOMBRES
ALGÈBRIQUES RÉELS ET DE NOMBRES ALGÈBRIQUES p -ADIQUES

par

Eugène DUBOIS et Georges RHIN

--:--:--

Ridout et Mahler [3] ont généralisé le théorème de K. F. Roth [5] à l'approximation d'un nombre algébrique réel et de nombres algébriques p -adiques. W. M. Schmidt [8] [9] a généralisé le théorème de Roth à l'approximation simultanée de n nombres algébriques réels. Nous donnons ici un résultat sur l'approximation simultanée de n nombres algébriques réels et de n nombres algébriques p -adiques (théorème 1). Nous déduisons ce résultat d'un théorème général sur des formes linéaires à coefficients algébriques (théorème 6).

INTRODUCTION. - Soient $t \geq 0$ et $n \geq 1$ deux entiers, p_1, \dots, p_t t nombres premiers distincts. $| \cdot |_j$ désigne pour $j=0$ la valeur absolue réelle et pour $1 \leq j \leq t$ la valeur absolue de \mathbb{Q}_{p_j} telle que $|p_j|_j = p_j^{-1}$. Nous démontrons :

THÉORÈME 1. - Soient $1, \alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)}$ des nombres algébriques \mathbb{Q} linéairement indépendants (\mathbb{Q} . L. I.) et soient pour $j = 1, \dots, t$ $1, \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)}$ des nombres algébriques de \mathbb{Q}_{p_j} \mathbb{Q} . L. I. Alors pour tout système de nombres réels positifs $b^{(0)}, b^{(1)}, \dots, b^{(t)}$ tels que

$$\sum_{j=0}^t b^{(j)} > \frac{1}{n}$$

le système

$$|a_i^{(j)} x_o - x_j|_j < |x_o|^{-b^{(j)}} \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq t$$

n'a qu'un nombre fini de solutions entières (x_o, x_1, \dots, x_n) .

Nous développerons tout d'abord la géométrie des nombres puis nous montrerons comment nous pouvons déduire le théorème 1 du théorème 6 et nous terminerons en montrant comment les théorèmes 8 et 9 sur l'index de certains polynômes par rapport à des formes linéaires permettent de démontrer le théorème 6.

§. 1. - GÉOMÉTRIE DES NOMBRES. - Soit $\Omega_n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Q}_{p_1}^n \times \dots \times \mathbb{Q}_{p_t}^n$ et soit pour $0 \leq j \leq t$ $A^{(j)}$ une matrice carrée d'ordre n inversible à coefficients dans \mathbb{Q}_{p_j} en posant $\mathbb{Q}_{p_0} = \mathbb{R}$). Nous appellerons réseau l'ensemble Λ des points $(A^{(0)} x, \dots, A^{(t)} x)$ de Ω_n lorsque x parcourt \mathbb{Z}^n . On note $m(\Lambda) = \overline{|\det A^{(j)}|_j}$. Soient pour $0 \leq j \leq t$ $a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}$ n vecteurs de $\mathbb{Q}_{p_j}^n$ linéairement indépendants et $c_i^{(j)}$ des réels ($1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq t$) tels que $c_i^{(j)} \leq 1$ pour $j \geq 1$. Soit $\pi = \pi(a_i^{(j)}, c_i^{(j)})$ le parallélépipède de Ω_n égal à l'ensemble des points $(x^{(0)}, \dots, x^{(t)})$ de Ω_n tels que $|a_i^{(j)} \cdot x^{(j)}|_j \leq c_i^{(j)}$ $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq t$ où $a_i^{(j)} \cdot x^{(j)}$ désigne le produit scalaire habituel de deux vecteurs de $\mathbb{Q}_{p_j}^n$. Nous

posons pour $x = (A^{(0)}y, \dots, A^{(t)}y)$ avec $y \in \mathbb{Q}^n$, $F^{(j)}(x) = \inf_{\lambda} |\lambda^{-1}|_j$ où la borne

inférieure est prise sur l'ensemble des λ de \mathbb{Q}_{P_j} tels que

$$|\lambda a_i^{(j)} \cdot A^{(j)}y|_j \leq c_i^{(j)}. \text{ Soit } F(x) = F_{\pi}(x) = \prod_{0 \leq j \leq t} F^{(j)}(x). \text{ On définit les mi-}$$

nima successifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de π par rapport à Λ de la manière suivante :

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{x \in \Lambda \\ x \neq 0}} F(x) \quad \text{et} \quad \lambda_i = \inf_{x \in \Lambda} \lambda \quad 2 \leq i \leq n$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des réels λ positifs tels qu'il

existe i points de Λ $x_k = (A^{(0)}y_k, \dots, A^{(t)}y_k)$ $1 \leq k \leq i$ tels que y_1, \dots, y_i

soient linéairement indépendants et que $F(x_k) \leq \lambda$ $1 \leq k \leq i$. Nous avons

THÉORÈME 2 [5]. - Les minima successifs de π par rapport à Λ existent et vérifient

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n < +\infty \quad (1)$$

$$m(\Lambda) \ll \lambda_1 \dots \lambda_n \quad \text{mes}(\pi) \ll m(\Lambda) \quad (2)$$

Il existe x_1, \dots, x_n de Λ tels que $F(x_i) = \lambda_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et

$x_i = (A^{(0)}y_i, \dots, A^{(t)}y_i)$ avec

$$1 \leq \prod_{0 \leq j \leq t} |\det(y_1, \dots, y_n)|_j \leq n! \quad (3)$$

Les constantes impliquées dans \ll ne dépendent que des $a_i^{(j)}$ et $\text{mes}(\cdot)$ désigne

la mesure produit des mesures de Haar sur \mathbb{R} , $\mathbb{Q}_{P_1}, \dots, \mathbb{Q}_{P_t}$ telles que

$\text{mes}(\mathbb{Z}_{P_j}) = 1$ et $\text{mes}([0, 1]) = 1$.

Ce théorème se déduit des résultats de E. Lutz [4] et du théorème de Minkowski appliqué à des sous-réseaux.

Soit $A^{(j)*}$ la transposée de $A^{(j)-1}$. Nous appellerons réseau dual de Λ le réseau Λ^* associé à $A^{(0)*}, \dots, A^{(t)*}$ et parallélépipède dual de π un

parallélépipède $\pi^* = \pi^*(a_i^{(j)*}, d_i^{(j)})$ où $a_i^{(j)*}$ désigne le vecteur dual de $a_i^{(j)}$ dans $\mathbb{Q}_{p_j}^n$ pour le produit scalaire habituel et $d_i^{(j)} \leq 1$ pour $j \geq 1$ et $\prod_{1 \leq i \leq n} d_i^{(j)} c_i^{(j)} = 1$. Nous avons $0 \leq j \leq t$

PROPOSITION. - Soient $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$ n éléments de \mathbb{Z}^n ($0 \leq j \leq t$) avec $E^{(j)} = |\det(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})|_j \neq 0$ et soient $\lambda_k^{(j)}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $0 \leq j \leq t$ des réels réels positifs tels que

$$|a_i^{(j)} \cdot x_k^{(j)}|_j \leq \lambda_k^{(j)} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n & 0 \leq j \leq t \\ 1 \leq k \leq n \end{matrix} \quad (4)$$

Alors on a :

$$|a_i^{(j)*} \cdot x_k^{(j)*}|_j \ll (D^{(j)} E^{(j)})^{-1} \lambda_1^{(j)} \dots \lambda_{k-1}^{(j)} \lambda_{k+1}^{(j)} \dots \lambda_n^{(j)} \quad (5)$$

pour $0 \leq i, k \leq n$ et $0 \leq j \leq t$ et quel que soit (i_0, \dots, i_t) dans $\{1, \dots, n\}^{t+1}$

$$\prod_{0 \leq j \leq t} |a_{i_j}^{(j)*} \cdot x_{i_j}^{(j)*}|_j \ll \left(\prod_{0 \leq j \leq t} E^{(j)} \lambda_{i_j}^{(j)} \right)^{-1} \quad (6)$$

et si $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$ désignent les minima successifs de π^* dual de π

$$1 \ll \lambda_k^* \lambda_{n+1-k}^* \ll 1 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n \quad (7)$$

Les constantes impliquées par \ll ne dépendent que des $a_i^{(j)}$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 1 de [9].

THÉORÈME 3. - Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et pour $0 \leq j \leq t$, $a_1^{(j)}, \dots, a_\ell^{(j)}$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{Q}_{p_j}^\ell$ et $\pi = \pi(a_i^{(j)}, c_i^{(j)})$ avec $c_i^{(j)} = 1$ un parallélépipède de Ω_ℓ . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ les minima successifs de π par rapport à \mathbb{Z}^ℓ et soient $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_\ell > 0$ tels que

$$\rho_1 \lambda_1 \leq \dots \leq \rho_\ell \lambda_\ell \quad (8)$$

Alors il existe une permutation τ de $\{1, \dots, \ell\}$ telle que les minima successifs ν_1, \dots, ν_ℓ du parallélépipède $\pi_1 = \pi_1(a_i^{(j)}, d_i^{(j)})$ où $d_i^{(0)} = \rho_{\tau_i}^{-1}$ pour $1 \leq i \leq \ell$

et $d_i^{(j)} = 1$ pour $j \geq 1$ vérifient

$$v_i \ll \rho_i \lambda_i \ll v_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq \ell \quad (9)$$

où \ll ne dépend que des $a_i^{(j)}$.

Ceci généralise un lemme de Davenport. La démonstration est analogue à celle du lemme 7 de [9]. (Il faut considérer avec les notations de [9] S_i comme un \mathbb{Q} espace vectoriel).

Soient $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ la base canonique de \mathbb{Q}^n . Pour $1 \leq q \leq n$, soit $C(n, q)$ l'ensemble des $\sigma = (i_1, \dots, i_q)$ $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n$ et $L = \binom{n}{q}$. Pour $\sigma \in C(n, q)$ considérons $e_\sigma = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_q}$ et on définit $x_1 \wedge \dots \wedge x_q$ par linéarité pour q éléments de $\mathbb{Q}_{p_j}^n$ ($0 \leq j \leq t$). En posant $e_\sigma \cdot e_\zeta = 0$ si $\sigma \neq \zeta$ et 1 sinon on définit un produit scalaire sur le \mathbb{Q}_{p_j} espace vectoriel engendré par les e_σ où $\sigma \in C(n, q)$. Soit $\mathbb{Q}_{p_j}^{n; q}$ cet espace vectoriel. Soit $\pi = \pi(a_i^{(j)}, 1)$ (i. e. $c_i^{(j)} = 1$ pour tout i et j) et soit $\pi_{(q)} = \pi(a_\sigma^{(j)}, 1)$.

THÉORÈME 4. - Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (resp. m_1, \dots, m_L) les minima successifs de (π, \mathbb{Z}^n) (resp. de $(\pi_{(q)}, \mathbb{Z}^L)$). Posons $\lambda_\sigma = \prod_{i \in \sigma} \lambda_i$, on a, en ordonnant $C(n, q)$ pour que $\lambda_{\sigma_1} \leq \lambda_{\sigma_2} \leq \dots \leq \lambda_{\sigma_L}$.

$$m_k \ll \lambda_{\sigma_k} \ll m_k \quad \text{pour } 1 \leq k \leq L \quad (10)$$

où \ll ne dépend que de n, q et des $a_i^{(j)}$.

La démonstration repose sur le théorème 2 et sur l'identité de Laplace

$$a_\zeta^{(j)} \cdot x_\sigma = \det(a_i^{(j)} \cdot x_k) \quad (i \in \zeta, k \in \sigma)$$

pour ζ et $\sigma \in C(n, q)$.

§. 2. - RÉSULTATS SUR LES FORMES LINÉAIRES A COEFFICIENTS

ALGÈBRIQUES. - Soit $1 \leq v \leq n-1$ et soient $L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)}$ des formes linéaires à coefficients algébriques dans $\mathbb{Q}_{P_j}, \mathbb{Q}$. L. I. Nous supposons que les n -formes $L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)}, x_1, \dots, x_{n-v}$ sont \mathbb{Q} . L. I. pour $0 \leq j \leq t$. D'après le théorème 2 le système d'inégalités

$$\begin{cases} |L_i^{(j)}(x)|_j \leq Q^{-c^{(j)}} & \text{pour } 1 \leq i \leq v \text{ et } 0 \leq j \leq t \\ |x_i| \ll Q & \text{pour } 1 \leq i \leq n-v \end{cases}$$

a une solution x non nulle dans \mathbb{Z}^n pour tout $Q > 1$ si $n-v-v \sum_{j=0}^t c^{(j)} \geq 0$

i. e. $\sum_{0 \leq j \leq t} c^{(j)} \leq \frac{n-v}{v}$. (La constante \ll ne dépend que des $L_i^{(j)}$). On en déduit

que le système $|L_i^{(j)}(x)|_j \ll |x|^{-c^{(j)}}$ pour $1 \leq i \leq v, 0 \leq j \leq t$ (avec $|x| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$)

a une infinité de solutions.

DÉFINITION. - Nous dirons que le système $(L_i^{(j)})_{1 \leq i \leq v, 0 \leq j \leq t}$ est un système de Roth si pour tous $b^{(0)}, \dots, b^{(t)}$ réels positifs tels que $\sum_{j=0}^t b^{(j)} > \frac{n-v}{v}$ le système $|L_i^{(j)}(x)|_j \leq |x|^{-b^{(j)}}$ $1 \leq i \leq v, 0 \leq j \leq t$ n'a qu'un nombre fini de solutions dans \mathbb{Z}^n .

THÉORÈME 5. - Le système $(L_i^{(j)})$ ($1 \leq i \leq v, 0 \leq j \leq t$) est un système de Roth si et seulement si pour tous $c^{(0)} > 0, \dots, c^{(t)} > 0$ tels que $\sum_{j=0}^t c^{(j)} = \frac{n-v}{v}$ et pour tout sous \mathbb{Q} espace vectoriel S^d de \mathbb{Q}^n de dimension $d \geq 1$ les formes $L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)}$ ont un rang $r^{(j)}$ sur S^d ($0 \leq j \leq t$) qui vérifie

$$d \leq r^{(0)} + \sum_{j=0}^t r^{(j)} c^{(j)} \quad (11)$$

La condition suffisante sera une conséquence du théorème 6. Montrons la condition nécessaire. Supposons donc que pour un sous-espace rationnel S^d on ait $d > r^{(0)} + \sum_{j=0}^t r^{(j)} c^{(j)}$ pour un système $(c^{(0)}, \dots, c^{(t)})$. Si tous les $r^{(j)}$ sont

nuls il est clair qu'il existe une infinité de points entiers dans S^d vérifiant $L_i^{(j)}(x) = 0$ pour $1 \leq i \leq v$ et $0 \leq j \leq t$. S'il existe un $r^{(j)} \geq 1$, soit $\beta > 1$ tel que $d = r^{(0)} + \sum_{j=0}^t r^{(j)} \beta^j c^{(j)}$ et posons $b^{(j)} = \beta c^{(j)}$. En appliquant le théorème 2 au réseau des points entiers de S^d nous montrons qu'il existe une infinité de points distincts dans \mathbb{Z}^n tels que $|L_i^{(j)}(x)|_j \ll |x|^{-b^{(j)}} \quad 1 \leq i \leq v, 0 \leq j \leq t$ et puisque $\sum_{j=0}^t b^{(j)} > \frac{n-v}{v}$ le système $(L_i^{(j)})$ n'est pas un système de Roth ce qui est contradictoire.

Nous obtenons comme corollaires du théorème 5 le théorème 1 et :

COROLLAIRE. - Soit $L^{(j)}$ une forme linéaire à coefficients algébriques dans \mathbb{Q}_{P_j} ne s'annulant pas sur \mathbb{Q}^* ($0 \leq j \leq t$) alors pour $b^{(0)}, \dots, b^{(t)} > 0$ tels que $\sum_{j=0}^t b^{(j)} > n-1$ le système

$$|L^{(j)}(x)|_j < |x|^{-b^{(j)}} \quad 0 \leq j \leq t$$

n'a qu'un nombre fini de solutions entières.

Soient $L_1^{(j)}, \dots, L_n^{(j)}$ des formes linéaires \mathbb{Q} . L. I. à coefficients algébriques dans \mathbb{Q}_{P_j} ($0 \leq j \leq t$) et $c_i^{(j)}$ des réels positifs ou nuls tels que

$$c_i^{(j)} \leq 0 \quad \text{pour } j \geq 1, 1 \leq i \leq n \quad (12)$$

$$\text{et } c_1^{(j)} \leq c_2^{(j)} \leq \dots \leq c_n^{(j)} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq t \quad (13)$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^n \sum_{0 \leq j \leq t} c_i^{(j)} = 0 \quad (14)$$

Nous dirons par définition que le système $(L_i^{(j)}, c_i^{(j)})$ est un système de Roth général si pour tous $\delta^{(j)} \geq 0$ tels que $\delta^{(0)} + \dots + \delta^{(t)} = \delta > 0$ il existe $Q_1 = Q_1(L_i^{(j)}, c_i^{(j)}, \delta) > 0$ tel que pour $Q > Q_1$ le système

$$|L_i^{(j)}(x)|_j \leq Q^{c_i^{(j)} - \delta^{(j)}} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq t \quad (15)$$

n'ait pas de solution entière non nulle.

Soit S^d un sous \mathbb{Q} espace vectoriel de \mathbb{Q}^n de dimension $d \geq 1$. Pour $j = 0, \dots, t$ soit $t_1^{(j)}$ le plus petit entier k tel que $L_k^{(j)}$ soit de rang 1 sur S^d , $t_2^{(j)}$ le plus petit entier k tel que $(L_{t_1^{(j)}}^{(j)}, L_k^{(j)})$ soit de rang 2 sur S^d etc... Posons $c(S^d) = \sum_{j=0}^t \sum_{k=1}^d c_{t_k^{(j)}}^{(j)}$ et $c(S^d) = +\infty$ si l'un des $t_k^{(j)}$ n'est pas défini.

THÉORÈME 6. - Soient pour $0 \leq j \leq t$, n formes linéaires $L_1^{(j)}, \dots, L_n^{(j)}$ \mathbb{Q} . L. I. à coefficients algébriques dans \mathbb{Q}_{p_j} . Si pour tout sous-espace S^d , $c(S^d) \leq 0$ alors $(L_i^{(j)}, c_i^{(j)})$ est un système général de Roth.

Montrons que ceci entraîne le théorème 5.

Soient $L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)}$ des formes linéaires \mathbb{Q} . L. I. et des constantes $c^{(j)} > 0$ telles que $\sum_{0 \leq j \leq t} c^{(j)} > \frac{n-v}{v} \cdot (L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)}, L_{v+1}^{(j)} = x_1^{(j)}, \dots, L_n^{(j)} = x_{n-v}^{(j)})$ (où $x_k^{(j)}$ est égal à l'un des x_i) est de rang d sur tout sous-espace S^d de \mathbb{Q}^n pour $0 \leq j \leq t$. Soit $r^{(j)}$ le rang de $(L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)})$ sur un tel sous-espace. On a $t_1^{(j)} < \dots < t_{r^{(j)}}^{(j)} \leq v < \dots < t_d^{(j)}$ ($0 \leq j \leq t$). Soit $\beta < 1$ tel que $\sum_{0 \leq j \leq t} \beta c^{(j)} = \frac{n-v}{v}$ et $c_i^{(j)} = -\beta c^{(j)}$ ($1 \leq i \leq v, 0 \leq j \leq t$) et $c_i^{(0)} = 1$ ($v+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t$). Par construction nous avons $c(S^d) = d - r^{(0)} - \sum_{j=0}^t r^{(j)} \beta c^{(j)}$ donc $c(S^d) \leq 0$. Le système $(L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)})$ est un système de Roth.

Nous déduisons le théorème 6 du

THÉORÈME 7. - Soient pour $0 \leq j \leq t$, n formes linéaires \mathbb{Q} . L. I. $L_1^{(j)}, \dots, L_n^{(j)}$ à coefficients algébriques dans \mathbb{Q}_{p_j} et $c_i^{(j)}$ des réels vérifiant (12), (13) et (14).

Pour $\mathbb{Q} \geq 1$ le système :

$$|L_i^{(j)}(x)|_j \leq \mathbb{Q}^{c_i^{(j)}} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq t \quad (16)$$

définit un parallélépipède $\pi = \pi(\mathbb{Q})$ dans Ω_n . Soient $\lambda_1 = \lambda_1(\mathbb{Q}), \dots, \lambda_n = \lambda_n(\mathbb{Q})$ les minima successifs de (π, \mathbb{Z}^n) et supposons qu'il existe $\delta > 0$, un entier d

($1 \leq d \leq n-1$) et un ensemble H non borné de réels positifs tels que

$$\forall Q \in H \quad \lambda_d < \lambda_{d+1} Q^{-\delta} . \quad (17)$$

Alors il existe un sous-espace S^d de \mathbb{Q}^n et une partie H' non bornée de H telle que pour tout Q dans H' les d premiers minima de $\pi(Q)$ soient atteints en des points de $S^d \cap \mathbb{Z}^n$.

Montrons que le théorème 7 entraîne le théorème 6.

Supposons que $(L_i^{(j)}, c_i^{(j)})$ ne soit pas un système général de Roth et montrons qu'il existe S^d tel que $c(S^d) \geq 0$. D'après le théorème 2 et (14)

$$1 \ll \lambda_1 \dots \lambda_n \ll 1 \quad (18)$$

où les constantes ne dépendent que des $L_i^{(j)}$. D'après les hypothèses il existe une suite croissante non bornée de Q et un $\delta > 0$ telle que le système (15) ait une solution non nulle pour chacun de ces Q . Alors $\lambda_1 = \lambda_1(Q) < Q^{-\delta'}$ avec $\delta' = \frac{1}{2} \delta$ et il existe $d \geq 1$ tel que $\lambda_d < \lambda_{d+1} Q^{-\delta'/n-1}$ et il existe une partie H non bornée telle que d soit indépendant de Q . Les hypothèses du théorème 7 sont satisfaites avec $\delta = \delta'/n-1$. Soit S^d l'espace obtenu. Nous obtenons $\lambda_1 \dots \lambda_d \ll Q^{-\delta d(n-d)/n} < Q^{-\eta}$ avec $\eta > 0$. $(L_{t_1}^{(j)}, \dots, L_{t_d}^{(j)})$ est de rang d sur S^d et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ une base du \mathbb{Z} module ${}_{t_1}^1 S^d \cap \mathbb{Z}^n {}_{t_d}^d$. Soit π' le parallélépipède de Ω_d défini par

$$|L_{t_i}^{(j)}(x^{(j)})|_j \leq Q^{c_{t_i}^{(j)}} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq d$$

où $x^{(j)} = x_1^{(j)} \alpha_1 + \dots + x_d^{(j)} \alpha_d$. Soient $\lambda'_1, \dots, \lambda'_d$ les minima successifs de π' par rapport à \mathbb{Z}^d . Alors $\lambda'_1 \dots \lambda'_d \text{ mes } \pi' \gg 1$ et puisque les d premiers minima de π sont atteints sur S^d , donc sur $S^d \cap \mathbb{Z}^n$, nous avons :

$$\lambda'_1 \leq \lambda_1, \dots, \lambda'_d \leq \lambda_d .$$

Nous avons $\text{mes}(\pi') \gg Q^\eta$ et $\text{mes } \pi' \ll Q^{c(S^d)}$. Puisque les constantes ne dé-

pendent que des $L_i^{(j)}$ nous avons $c(S^d) \geq \eta > 0$.

Le dernier paragraphe sera consacré à la démonstration du théorème 7.

§. 3. - INDEX D'UN POLYNOME

Soit $\mathfrak{R} = \mathbb{Q}[X_{11}, \dots, X_{1\ell}; X_{21}, \dots, X_{2\ell}; \dots; X_{m1}, \dots, X_{m\ell}]$. Soient K un sur-corps de \mathbb{Q} et L_1, \dots, L_m des formes linéaires non nulles à coefficients dans K du type $L_h = L_h(X_{h1}, \dots, X_{h\ell})$ $1 \leq h \leq m$. Soient r_1, \dots, r_m des entiers positifs donnés et $c \geq 0$ un réel. Soit $I(c)$ l'idéal de $K[X_{11}, \dots, X_{m\ell}]$ engendré par les polynômes $L_1^{i_1} \dots L_m^{i_m}$ avec $\sum_{h=1}^m i_h r_h^{-1} \geq c$. L'index d'un polynôme P de \mathfrak{R} par rapport à $(L_1, \dots, L_m; r_1, \dots, r_m)$ est le plus grand c tel que $P \in I(c)$ si $P \neq 0$ et $+\infty$ si $P \equiv 0$. Les propriétés de l'index résultent du théorème 6 de [7].

THÉORÈME 8. - Soient $\ell \geq 1$ un entier et $L_i^{(j)}(x) = a_i^{(j)} \cdot x$ pour $1 \leq i \leq \ell$, des formes linéaires à coefficients entiers algébriques dans \mathbb{Q}_{P_j} , \mathbb{Q} . L. I. pour $0 \leq j \leq t$. Soit $\Delta = \max_{0 \leq j \leq t} [\mathbb{Q}(a_{i,k}) \text{ pour } 1 \leq i, k \leq \ell) : \mathbb{Q}]$. Posons :

$$L_{h,i}^{(j)} = L_i^{(j)}(X_{h1}, \dots, X_{h\ell}) \text{ pour } 1 \leq h \leq m, 0 \leq j \leq t, 1 \leq i \leq \ell.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $m \geq 4\varepsilon^{-2} \log(4\ell(t+1)\Delta)$ et r_1, \dots, r_m des entiers positifs.

Il existe alors un polynôme P non nul de \mathfrak{R} à coefficients entiers tels que

- (i) P est homogène en $X_{h1}, \dots, X_{h\ell}$ de degré r_h ($1 \leq h \leq m$)
- (ii) pour $1 \leq k \leq \ell$, $0 \leq j \leq t$ l'index de P par rapport à $(L_{1k}^{(j)}, \dots, L_{mk}^{(j)}; r_1, \dots, r_m)$ est supérieur ou égal à $(\ell^{-1} - \varepsilon)m$
- (iii) $|P| \leq D^{r_1 + \dots + r_m}$

(iv) pour tout $J = (j_{11}, \dots, j_{m\ell})$ si nous écrivons

$$\begin{aligned}
 P^{(J)} &= (j_{11} \dots j_{m\ell})^{-1} \frac{\partial^{j_{11} + \dots + j_{m\ell}}}{\partial X_{11}^{j_{11}} \dots \partial X_{m\ell}^{j_{m\ell}}} P \\
 &= \sum_{(i_{11}, \dots, i_{m\ell})} d_j^{(J)}(i_{11}, \dots, i_{m\ell}) L_{11}^{(j)i_{11}} \dots L_{m\ell}^{(j)i_{m\ell}} \quad (19)
 \end{aligned}$$

alors

$$|d_j^{(J)}(i_{11}, \dots, i_{m\ell})|_j \leq E^{r_1 + \dots + r_m}$$

où $|P|$ désigne le maximum des valeurs absolues des coefficients de P et D et

E ne dépend que des $a_i^{(j)}$.

(v) si $(J/r) = \sum_{h=1}^m (i_{h1} + \dots + i_{h\ell}) r_h^{-1} \leq 2 \epsilon m$ nous avons :

$$d_j^{(J)}(i_{11}, \dots, i_{m\ell}) = 0 \quad \text{ou}$$

$$\left| \sum_{h=1}^m i_{hk} r_h^{-1} - m\ell^{-1} \right| \leq 3\ell m \epsilon \quad (1 \leq k \leq \ell).$$

Il suffit de résoudre, comme dans [7], grâce au lemme de Siegel [2]

un certain nombre d'équations linéaires à coefficients et variables entières.

Soient $\ell \geq 2$ et $x_1, \dots, x_{\ell-1}$ $\ell-1$ vecteurs \mathbb{Z} . L. I. de \mathbb{Z}^ℓ . Il existe à un facteur ± 1 près, un unique $y = (y_1, \dots, y_\ell)$ de \mathbb{Z}^ℓ non nul tel que $(y_1, \dots, y_\ell) = 1$ $y_i x_i = 0$ pour $1 \leq i \leq \ell-1$. Posons $M = M(X) = y_1 X_1 + \dots + y_\ell X_\ell$ et $|M| = \text{Max}_{1 \leq i \leq \ell} |y_i|$.

THÉORÈME 9. - Soient pour $0 \leq j \leq t$, $1 \leq i \leq \ell$ des réels $c_i^{(j)}$ vérifiant (12), (13), (14) (avec ℓ au lieu de n). Soient $\epsilon > 0$ et supposons que $1 > \delta > 16\ell^2 \epsilon(t+1)$.

Soient $L_i^{(j)}$, m , r_1, \dots, r_m définis comme dans le théorème 8. Soit P le polynôme construit au théorème 8. Soient Q_1, \dots, Q_m des réels positifs vé-
fiant

$$Q_h^\varepsilon > 2^\ell E, \quad Q_h^\varepsilon > \ell(\varepsilon^{-1} + 1) \quad 1 \leq h \leq m \quad (20)$$

$$r_1 \log Q_1 \leq r_h \log Q_h \leq (1 + \varepsilon) r_1 \log Q_1 \quad 1 \leq h \leq m. \quad (21)$$

Pour $h = 1, \dots, m$ soient $x_{h_1}, \dots, x_{h_{\ell-1}}$ $\ell-1$ vecteurs \mathbb{Z} . L. I. de \mathbb{Z}^ℓ véri-
fiant

$$|L_i^{(j)}(x_{hk})|_j \leq Q_h^{c_i^{(j)} - \delta^{(j)}} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k \leq \ell-1 \\ 1 \leq h \leq m \\ 0 \leq j \leq t \end{array} \quad (22)$$

avec $\delta^{(j)} \geq 0$ et $\delta = \delta^{(0)} + \dots + \delta^{(t)}$.

Alors l'index de P est au moins égal à $m\varepsilon$ par rapport à

$(M_1, \dots, M_m; r_1, \dots, r_m)$ où $M_h = M(x_{h,1}, \dots, x_{h,\ell-1})$.

Nous utilisons comme dans [7] la notion de grille en remplaçant les \mathbb{R} espaces vectoriels par des \mathbb{Q} espaces vectoriels. Nous supposons que

$P^{(J)}(x_1, \dots, x_m)$ est un entier rationnel non nul et nous montrerons que

$\prod_{0 \leq j \leq t} |P^{(J)}(x_1, \dots, x_m)|_j < \frac{1}{2}$ ce qui est impossible. Le reste de la démonstration est analogue à celle du théorème 9 de [8].

Soit S une partie non vide de $\{1, \dots, \ell\}^{t+1}$. Pour $0 \leq j \leq t$, soient $(a_1^{(j)}, \dots, a_\ell^{(j)})$ une base de \mathbb{Q}_p^j à coefficients algébriques et $(a_1^{(j)*}, \dots, a_\ell^{(j)*})$ la base duale. Soit $\pi = \pi(a_i^{(j)}, A_i^{(j)})$ un parallélépipède de Ω_ℓ et π^* un dual de π .

THÉORÈME 10. - Soient S , $a_i^{(j)}$ comme ci-dessus et $\delta > 0$. Il existe alors

$Q_2 = Q_2(\delta; a_i^{(j)}, S) > 0$ tel que : soit $Q > Q_2$ et supposons que $A_i^{(j)}$ vérifie

$$\prod_{\substack{0 \leq j \leq t \\ 1 \leq i \leq \ell}} A_i^{(j)} = 1 \quad (23)$$

$$\max(A_i^{(j)}, A_i^{(j)-1}) \leq Q^{1/t+1} \quad (24)$$

$$A_{i_0}^{(0)} \dots A_{i_t}^{(t)} Q^{\delta/2} \geq 1 \quad \text{pour un } (i_0, \dots, i_t) \in S ; \quad (25)$$

soient $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ les minima successifs de (π, \mathbb{Z}^ℓ) et supposons que

$$\lambda_{\ell-1} < Q^{-\delta} ; \quad (26)$$

soient x_1, \dots, x_ℓ des points de \mathbb{Z}^ℓ où sont atteints les minima successifs de π et x_1^*, \dots, x_ℓ^* leurs duaux. Alors pour tout $(t+1)$ uple (i_0, \dots, i_t)

$$\prod_{j=0}^t |a_{i_j}^{(j)*} \cdot x_\ell^*|_j \ll \prod_{j=0}^t A_{i_j}^{(j)-1} Q^{-\delta(\ell-1)} \quad (27)$$

et si $(i_0, \dots, i_t) \in S$ il existe j tel que

$$a_{i_j}^{(j)*} \cdot x_\ell^* = 0 .$$

Nous démontrons d'abord le :

LEMME. - Avec les notations du théorème précédent, posons $A_i^{(j)} = Q^{c_i^{(j)}}$ pour $1 \leq i \leq \ell, 0 \leq j \leq t$. Supposons (26) et qu'il existe pour $0 \leq j \leq t, i_j$ tel que

$$a_{i_j}^{(j)*} \cdot x_\ell^* \neq 0 \quad (28)$$

et

$$\sum_{j=0}^t c_{i_j}^{(j)} + \frac{3\delta}{4} \geq 0 . \quad (29)$$

Alors il existe $c_k = c_k(\delta, a_i^{(j)}, \zeta) > 0$ ($1 \leq k \leq 3$) tels que pour $Q \geq c_3$

$$Q^{c_1} \leq \prod_{j=0}^t |x_\ell^*|_j \leq Q^{c_2} . \quad (30)$$

Soit $a^{(j)}$ un élément de \mathbb{Q}_P^ℓ à coefficients algébriques $0 \leq j \leq t$. On pose $\Delta^{(j)} = [\mathbb{Q}(a^{(j)}):\mathbb{Q}]$ et $\Delta = \sum_{j=0}^t \Delta^{(j)}$. Soit $x \in \mathbb{Z}^\ell$ tel que $a^{(j)} \cdot x \neq 0, 0 \leq j \leq t$.

On montre que

$$\prod_{j=0}^t |a^{(j)} \cdot x|_j \gg \prod_{j=0}^t |x|_j^{1-\Delta}$$

où \ll ne dépend que des $a^{(j)}$. En appliquant ce résultat aux $a_{i_j}^{(j)}$ et avec (29),

on obtient que $\prod_{j=0}^t |x_{\ell}^*|_j \geq Q^{c_1}$. D'après la proposition, le théorème 2 et (26),

on a :

$$\prod_{j=0}^t |a_{k_j}^{(j)*} \cdot x_{\ell}^*|_j \ll Q^{-c_{k_0}^{(0)} - \dots - c_{k_t}^{(t)} - \delta(\ell-1)} \quad (31)$$

Puisque $(a_1^{(j)*}, \dots, a_{\ell}^{(j)*})$ est une base de $\mathbb{Q}_{p_j}^{\ell}$, $|x_{\ell}^*|_j \ll \max_{1 \leq k \leq \ell} |a_k^{(j)*} \cdot x_{\ell}^*|_j$ et l'on obtient $\prod_{j=0}^t |x_{\ell}^*|_j \leq Q^{c_2}$.

La première assertion du théorème 10 résulte de (31). Pour la deuxième assertion, nous remplaçons d'abord les $c_i^{(j)}$ par $c_i^{\prime(j)}$ dans $\mathbb{Z} \eta$ ($0 < \eta < \frac{\delta}{9(t+1)}$) vérifiant

$$|c_i^{(j)} - c_i^{\prime(j)}| < \eta \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^t c_i^{\prime(j)} = 0 \quad (32)$$

et $c_i^{\prime(j)} \leq 0$ si $j \geq 1$, $1 \leq i \leq \ell$.

Soient m_1, \dots, m_{ℓ} les minima successifs de $\pi' = \pi'(Q)$ défini par $|a_i^{(j)} \cdot x_i^{(j)}|_j \leq Q^{c_i^{(j)}}$ $1 \leq i \leq \ell$, $0 \leq j \leq t$.

$$\text{Puisque } |a_i^{(j)} \cdot x_k^{(j)}|_j \leq \lambda_k^{(j)} Q^{c_i^{\prime(j)} + \eta} \quad 1 \leq i, k \leq \ell, 0 \leq j \leq t \quad (33)$$

et d'après (32), nous avons :

$$m_{\ell-1} < \lambda_{\ell-1} Q^{(t+1)\eta} < Q^{-\delta + (t+1)\eta} < Q^{-\delta_1} \quad \text{avec } \delta_1 = \frac{8}{9} \delta.$$

Alors, d'après (33), les points $y_1, y_{\ell-1}$ en lesquels sont atteints les $\ell-1$ premiers minima de π' sont dans l'espace engendré par $x_1, \dots, x_{\ell-1} \cdot y_{\ell}^*$ et x_{ℓ}^*

sont donc proportionnels et il suffit de démontrer le théorème en remplaçant δ par δ_1 et $A_i^{(j)}$ par $Q^{c_i^{\prime(j)}}$. On se ramène d'autre part à ce que les coefficients des $a_i^{(j)}$ soient des entiers algébriques. Soit M l'ensemble des $Q > 1$ tels que

$\pi'(Q)$ vérifie (26) et tel qu'il existe $(i_0, \dots, i_t) \in S$ vérifiant $a_{i_j}^{(j)*} \cdot x_{\ell}^* \neq 0$ pour $0 \leq j \leq t$. Il nous suffit de montrer que M est borné. Sinon soient δ_2 ($0 < \delta_2 < \delta$

et $\delta_2 < 1$) $\epsilon > 0$ vérifiant les hypothèses du théorème 9 (avec δ_2 au lieu de δ), m et les $L_i^{(j)}$ vérifiant les hypothèses du théorème 8 ; $w = 242^{-m} \left(\frac{\epsilon}{12}\right)^{2m-1}$;

Q_1, \dots, Q_m vérifiant (20) et (21) et appartenant à M . Soit P le polynôme du théorème 8. Pour $1 \leq h \leq m$ soient x_{h1}, \dots, x_{ht} des vecteurs de \mathbb{Z}^t où sont atteints les minima de $\pi(Q_h)$. Ils vérifient (22). Les hypothèses du théorème 9 sont alors satisfaites avec δ_2 au lieu de δ . Alors l'index de P par rapport à $(M_1, \dots, M_m; r_1, \dots, r_m)$ est au moins $m\varepsilon$. Puisque $Q_h \in M$ il existe $(i_0, \dots, i_t) \in S$ vérifiant (28). De (30) nous déduisons que

$$Q_h^{c_4} < |M_h| < Q_h^{c_5} \quad 1 \leq h \leq m \quad \text{avec} \quad c_k = c_k(\delta_2, a_i^{(j)}) .$$

En appliquant le théorème 11 de [8] l'index de P par rapport à $(M_1, \dots, M_m; r_1, \dots, r_m)$ est inférieur ou égal à ε et on obtient une contradiction.

THÉORÈME 11. - Soient $a_i^{(j)}$ comme précédemment et $c_i^{(j)}$ des réels vérifiant (12), (13) et $\sum_{i=1}^t \sum_{0 \leq j \leq t} c_i^{(j)} = 0$ et

$$|c_i^{(j)}| \leq \frac{1}{t+1} \quad , \quad 1 \leq i \leq t, \quad 0 \leq j \leq t .$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ les minima successifs de $\pi(Q)$ défini par $|a_i^{(j)} \cdot x^{(j)}|_j \leq Q^{c_i^{(j)}}$ pour $1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq t$ et $x_1, \dots, x_t, x_1^*, \dots, x_t^*$ comme précédemment.

Soit $\delta > 0$ et supposons que pour tout Q dans M non borné

$$\lambda_{t-1} < \lambda_t Q^{-\delta} . \tag{34}$$

Alors il existe M' une partie non bornée de M et il existe $y \in \mathbb{Q}^t$ tels que

$$\forall Q \in M' \quad x_t^* = x_t^*(Q) = \frac{y}{g} \quad \text{où} \quad g = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t} .$$

La démonstration suit celle du théorème 7 de [9] et repose sur le théorème 3.

Démonstration du théorème 7 : Soient pour $0 \leq j \leq t$, n vecteurs $a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}$ à composantes algébriques \mathcal{O} . L. I. de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_j}^n$ tels que $L_i^{(j)}(x) = a_i^{(j)} \cdot x$. Supposons $\lambda_d < \lambda_{d+1} Q^{-\delta}$ pour $Q \in H$ et posons $q = n-d$.

Si $\sigma = (i_1, \dots, i_q) \in C(n, q)$, soit :

$$a_\sigma^{(j)} = a_{i_1}^{(j)} \wedge \dots \wedge a_{i_q}^{(j)} \quad \text{et} \quad c_\sigma^{(j)} = \sum_{i \in \sigma} c_i^{(j)}. \quad (35)$$

Alors

$$c_\sigma^{(j)} \leq 0 \quad \text{pour} \quad j \geq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^t \sum_{\sigma \in C(n, q)} c_\sigma^{(j)} = 0. \quad (36)$$

Soient $F^{(j)}$ et $F_q^{(j)}$ les fonctions associées à π et $\pi_{(q)}$. Avec les notations du théorème 4 nous avons en posant

$$\ell = L \quad \zeta_L = \{d+1, d+2, \dots, n\} \quad \zeta_{\ell-1} = \{d, d+2, \dots, n\}$$

et $m_\ell \ll \lambda_{d+1} \lambda_{d+2} \dots \lambda_n \ll m_\ell$, $m_{\ell-1} \ll \lambda_d \lambda_{d+2} \dots \lambda_n \ll m_{\ell-1}$.

(17) entraîne $m_{\ell-1} \ll m_\ell Q^{-\delta}$ et pour Q assez grand $m_{\ell-1} < m_\ell Q^{-\delta/2}$. (37)

Appliquons le théorème 12 à $a_\sigma^{(j)}$, $c_\sigma^{(j)}$ et $\pi_{(q)}$. Soient

$x_{1(q)}, \dots, x_{\ell(q)}$ des points de \mathbb{Z}^ℓ où sont atteints les minima de $\pi_{(q)}$ et $x_{1(q)}^*, \dots, x_{\ell(q)}^*$ leurs duaux. D'après le théorème 12 il existe y tel que $x_{\ell(q)}^* = x_{\ell(q)}^*(Q) = \frac{y}{g}$ avec $g = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ pour des valeurs de Q arbitrairement grandes. Soient z_1, \dots, z_n des points de \mathbb{Z}^n où sont atteints les minima de π

et pour $\sigma = (i_1, \dots, i_q)$ $z_\sigma = z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_q}$. D'après la démonstration du théorème

4 on a $\prod_{j=0}^t F_{(q)}^{(j)}(z_\sigma) \ll \lambda_\sigma$ et donc pour $\sigma \neq \zeta_\ell$ d'après (37) :

$\prod_{j=0}^t F_{(q)}^{(j)}(z_\sigma) \ll m_\ell Q^{-\delta}$. Donc $z_{\zeta_1}, \dots, z_{\zeta_{\ell-1}}$ sont dans l'espace engendré par

$x_{1(q)}, \dots, x_{\ell-1(q)}$ et $z_{\zeta_\ell}^*$ et $x_{\ell(q)}^*$ sont proportionnels. Alors d'après le lemme 5

de [9] il existe un sous-espace S^* de dimension $n-d = q$ tel que z_{d+1}^*, \dots, z_n^*

soient dans S^* pour $Q \in H'$. Soit S^d l'orthogonal de S^* . z_1, \dots, z_d sont

dans S^d et les d premiers minima successifs de π sont atteints sur S^d pour

tout Q dans H' .

-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. W. S. CASSELS. - An introduction to the Geometry of Numbers. Springer, Grundlehren 99 (1959).
- [2] J. W. S. CASSELS. - An introduction to diophantine approximation. Cambridge, the University Press, 1957 (Cambridge tracts in Mathematics and mathematical, Physics, n° 45).
- [3] K. MAHLER. - Lectures on diophantien approximations. University of Notre Dame, 1961.
- [4] E. LUTZ. - Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques. Paris, Hermann, 1955 (Act. Scient. et Ind. 1224, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 12).
- [5] G. RHIN. - Géométrie des nombres p-adiques. Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Groupe d'étude de Théorie des Nombres) 15e année, 1973/74, n° 69, 7p.
- [6] K. F. ROTH. - Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika 2, 1955, 1-20.
- [7] W. M. SCHMIDT. - Zür simultanen Approximation algebraischer Zahlen durch rationale. Acta Math. 114, 1965, 159-209.
- [8] W. M. SCHMIDT. - On simultaneous approximation of two algebraic numbers by rationals. Acta Math. 119, 1967, 27-50.
- [9] W. M. SCHMIDT. - Linear Forms with Algebraic Coefficients I. Journal of number theory 3, 253-277, 1971.

-:-:-

Eugène DUBOIS
Université de Caen
Esplanade de la Paix
14000 CAEN

Georges RHIN
Université de Metz
Ile du Saulcy
57000 METZ