MARIE-JOSÉE FERTON

Sur l'anneau des entiers de certaines extensions cycliques d'un corps local

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 21-28
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__21_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

SUR L'ANNEAU DES ENTIERS DE CERTAINES EXTENSIONS CYCLIQUES D'UN CORPS LOCAL

par

Marie-Josée FERTON

-:-:-:-

A étant un anneau de Dedekind et k son corps des quotients, soit K une extension galoisienne de k de groupe de Galois G . La clôture intégrale, B , de A dans K est un A[G]-module.

L'étude de la structure de B conduit à introduire le sous-anneau $\mathfrak{O}$ de k[G] , défini comme suit :

$$\mathfrak{O} = \{\lambda \in k[G] , \ \lambda . B \subset B \} .$$

$\mathfrak{O}$ est, en fait, un ordre de A dans k[G] et on l'appelle l'ordre associé à B dans k[G] .

On étudiera dans la suite B en tant que $\mathfrak{O}$-module. Le problème que l'on se pose est le suivant : pour quelle extensions K/k , B est-il un $\mathfrak{O}$-module libre ou projectif ?

On sait que si $k = \mathbb{Q}$, corps des rationnels et si G abélien ou G groupe diédral d'ordre $2p$, alors B est libre sur $\mathfrak{O}$. (Résultats respectifs de Leopoldt [5] et A. M. Bergé [1]).

Si le corps k est local, et si G est abélien, B est un $\mathfrak{O}$-module libre si et seulement si c'est un $\mathfrak{O}$-module projectif. Dans ce cas, on sait (E. Nœther [6]) que si l'extension K/k est modérément ramifiée B est libre sur $\mathfrak{O} = A[G]$.

Toujours dans le cas d'un corps local k , et si l'extension K/k est cyclique de degré premier p , on a des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur le nombre de ramification de l'extension, pour que B soit libre sur $\mathfrak{O}$ [2], [3].

La méthode utilisée pour les extensions cycliques de degré premier p d'un corps local s'applique difficilement au cas d'extensions cycliques de degré p^n pour $n > 1$. Elle donne néanmoins des résultats partiels résumés dans le théorème 2 .

D'autre part, on peut trouver des conditions nécessaires pour que B soit libre sur $\mathfrak{O}$, dans une extension K/k quelconque, en se ramenant à des extensions intermédiaires.

I. - <u>EXTENSIONS GALOISIENNES INTERMÉDIAIRES.</u> - Soit G_L un sous-groupe invariant de G et L le corps laissé fixe par G_L . Soit H le groupe de Galois de l'extension L/k , H est isomorphe au quotient G/G_L . On note $\bar{g}$ l'image canonique dans H d'un élément g de G . Soit φ l'homomorphisme d'algèbre de $k[G]$ dans $k[H]$ défini par $\varphi(g) = \bar{g}$ pour $g \in G$.

On note $\varphi(\lambda) = \bar{\lambda}$ pour $\lambda \in k[G]$. Si $\mathfrak{G}$ est un ordre de A dans $k[G]$ on peut vérifier aisément que $\varphi(\mathfrak{G})$ est un ordre de A dans $k[H]$. On note $T_{K/L}$

la trace de K/L , $T_{K/L} = \sum_{s \in G_L} s$; $T_{K/L}(B)$ est un $k[H]$-module, on note $\mathfrak{O}_H$ son ordre associé dans $k[H]$, soit $\mathfrak{O}_H = \{\mu \in k[H], \mu . T_{K/L}(B) \subset T_{K/L}(B)\}$.

PROPOSITION 1. - L'image par φ de l'ordre associé à B dans $k[G]$ est contenue dans l'ordre associé à $T_{K/L}(B)$ dans $k[H]$.

En effet, soit $\bar{\lambda} \in \varphi(\mathfrak{O})$; montrons que : $\lambda . T_{K/L}(b) \in T_{K/L}(B)$ pour tout b dans B ; on a $\bar{\lambda} . T_{K/L}(b) = \lambda . T_{K/L}(b) = T_{K/L}(\lambda . b)$ car G_L est un sous-groupe invariant de G .

Remarque : il existe des cas où $\varphi(\mathfrak{O})$ est différent de $\mathfrak{O}_H$. Par exemple, si k est un corps local d'indice de ramification $e = 7$ et K/k une extension cyclique de degré 4 , avec $t_1 = 7$ et $t_2 = 21$ pour nombres inférieurs de ramification, alors $\varphi(\mathfrak{O}) \neq \mathfrak{O}_H$.

PROPOSITION 2. - Si B est libre sur son ordre associé $\mathfrak{O}$ dans $k[G]$, $T_{K/L}(B)$ est libre sur son ordre associé dans $k[H]$, qui coïncide alors avec $\varphi(\mathfrak{O})$.

En effet, soit $B = \mathfrak{O} . \alpha$ pour $\alpha \in B$. Montrons que $T_{K/L}(B) = \varphi(\mathfrak{O}) . T_{K/L}(\alpha)$.

Soit b dans B , alors $b = \lambda . \alpha$ avec $\lambda \in \mathfrak{O}$ et $T_{K/L}(b) = T_{K/L}(\lambda . \alpha) = \lambda . T_{K/L}(\alpha)$; $T_{K/L}(B)$ est libre sur l'ordre $\varphi(\mathfrak{O})$ qui est donc son ordre associé : $\varphi(\mathfrak{O}) = \mathfrak{O}_H$.

La proposition 2 donne donc une condition nécessaire pour que B soit un $\mathfrak{O}$-module libre. Nous allons écrire cette condition nécessaire dans le cas d'une extension cyclique de degré p^2 d'un corps local de caractéristique résiduelle p .

Si K est une extension cyclique de degré p^2 de k, corps local et L l'extension intermédiaire de degré p sur k, $T_{K/L}(B)$ est un idéal de l'anneau des entiers de L. On est donc naturellement amené à étudier la structure des idéaux de L sur leurs ordres associés.

II. - ÉTUDE DES IDEAUX D'UNE EXTENSION CYCLIQUE DE DEGRÉ PREMIER p, L, D'UN CORPS LOCAL k.

- H désigne le groupe de Galois de L/k. On note $I_h = \{x \in L \ ; \ v_L(x) \geq h\}$ ou v_L est la valuation normalisée dans L et h un entier rationnel et on note $\mathfrak{O}_h = \{\lambda \in k(H) \ , \ \lambda . I_h \subset I_h\}$ l'ordre associé à I_h dans $k(H)$.

La question que l'on se pose est la suivante : pour une extension donnée L/k, quels sont les idéaux I_h qui sont des $\mathfrak{O}_h$-modules libres.

L'étude de ce problème fait l'objet d'une note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences [4]. On peut facilement remarquer qu'il suffit de faire l'étude pour des entiers h compris entre 0 et $p-1$, en effet, pour $h \equiv h'$ (modulo p), I_h et $I_{h'}$ sont des $\mathfrak{O}_h = \mathfrak{O}_{h'}$ modules isomorphes. En se limitant donc a des entiers h, $0 \leq h \leq p-1$, on peut énoncer le résultat sous la forme :

THÉORÈME 1. - <u>$\frac{t_1}{p} = [a_0 , a_1, \ldots , a_n]$, $a_n > 1$, désignant le développement en fraction continue de $\frac{t_1}{p}$ où t_1 est le nombre de ramification d'une extension cyclique de degré p d'un corps local k d'indice de ramification absolue e, on a :</u>

a) <u>si $t_1 \equiv 0$ (modulo p), I_h est un $\mathfrak{O}_h$-module libre quel que soit h ;</u>

b) <u>si $t_1 \not\equiv 0$ (modulo p),</u>

1°) <u>si</u> $0 \leq h \leq a$ <u>et si</u> $t_1 < \frac{pe}{p-1} - 1$, I_h <u>est un</u> $\mathfrak{O}_h$<u>-module libre si et seulement si</u>

$t_1 \equiv 1$ (modulo p)

<u>ou</u> $t_1 \not\equiv 1$ (modulo p) <u>avec pour</u> n <u>pair</u> $h = a$ <u>ou</u>

$h = a - a_n$; <u>pour</u> n <u>impair</u> $a - (\frac{1}{2}) a_n \leq h \leq a$.

2°) <u>si</u> $a < h \leq p-1$ <u>et</u> $t_1 < \frac{pe}{p-1} - 2$, I_h <u>n'est libre sur</u> $\mathfrak{O}_h$ <u>que si</u> $t_1 \equiv 1$ (modulo p) <u>et</u> $h > \frac{p+1}{2}$.

Remarque : si $h = 0$, le théorème précédent permet de retrouver le résultat de [2] à savoir si $t < \frac{pe}{p-1} - 1$, I_o est libre sur $\mathfrak{O}_o$ si et seulement si $a = 0$ ou a divise $p-1$.

COROLLAIRE. - L/k <u>étant une extension cyclique de degré premier</u> p <u>d'un corps local, si</u> t_1 <u>est le nombre de ramification de</u> L/k <u>alors tout idéal</u> I_h <u>où</u> h <u>est un entier rationnel congru à</u> t_1 <u>modulo</u> p , <u>est libre sur son ordre associé dans l'algèbre</u> k[H] <u>du groupe</u> H = Gal(L/k) <u>sur le corps</u> k .

III. - <u>EXTENSIONS CYCLIQUES DE DEGRÉ</u> p^2 . - Appliquons le résultat précédent à une extension K/k cyclique de degré p^2 d'un corps local k d'indice e L désigne l'extension de degré p intermédiaire. On note t_1 et t_2 les deux nombres inférieurs de ramification de K/k . On a $t_1 \leq \frac{pe}{p-1}$ et $t_2 \leq \frac{p^2 e}{p-1}$ et on note a , le plus petit entier positif congru à t_1 et t_2 modulo p , soit :

$$t_1 \equiv a \pmod p$$

$$t_2 \equiv a + cp \pmod{p^2}$$

avec $0 \leq a \leq p-1$ et $0 \leq c \leq p-1$.

On calcule alors $T_{K/L}(B)$ et on obtient $T_{K/L}(B) = I_{\left[\frac{(t_2+1)(p-1)}{p}\right]}$ où $[x]$ est la partie entière de x. Comme $\left[\frac{(t_2+1)(p-1)}{p}\right] \equiv a-c+p$ (modulo p) il faut appliquer le théorème 1 à l'entier

$$h = \begin{cases} a-c & \text{si } 0 \leq c \leq a \\ a-c+p & \text{si } a < c \leq p-1 \ . \end{cases}$$

On obtient alors les conditions nécessaires suivantes :

PROPOSITION 5. - _On suppose_ $a \neq 0$, _pour que_ B _soit un_ $\mathfrak{O}$-_module libre, il est alors nécessaire que_ :

1°) _si_ $0 \leq c \leq a$ et $t_1 < \frac{pe}{p-1} - 1$

- _soit_ $a = 1$

- _soit_ $a \neq 1$ _avec pour_ n _pair_ $c = 0$ _ou_ $c = a_n$

  pour n _impair_ $0 \leq c \leq \frac{a_n}{2}$,

2°) _si_ $a < c \leq p-1$ _et_ $t_1 < \frac{pe}{p-1} - 2$, $a = 1$ _et_ $c < \frac{p+1}{2}$.

Ces conditions ne sont pas suffisantes ; par des méthodes semblables à celles employées pour l'étude des idéaux d'une extension cyclique de degré p on peut démontrer :

THÉORÈME 2. - _Si_ t_1 _et_ t_2 _sont les deux nombres inférieurs de ramification d'une extension cyclique de degré_ p^2 _d'un corps local_ k _d'indice_ e _et si_ $t_1 \not\equiv t_2$ (modulo p^2) _alors_ :

a) B _non libre sur_ $\mathfrak{O}$ _si_ :

$$a \neq 0 \text{ et } \frac{1}{2}\frac{pe}{p-1} < t_1 < \frac{pe}{p-1} - (p+1) - \frac{a+1}{p-1} \ .$$

b) B <u>libre sur</u> $\mathfrak{O}$ <u>si</u> :

$$a = 0 \ \underline{\text{ou}} \ a \ \underline{\text{divise}} \ p\text{-}1 \ \underline{\text{avec}} \ \frac{pe}{p-1} - 1 \leq t_1 \leq \frac{pe}{p-1} .$$

L'étude du cas cyclique de degré p^2 n'est que partiellement résolu par ce théorème, cependant dans le cas $p = 2$ les mêmes méthodes donnent pour des extensions cycliques de degré 4 où $t_1 \not\equiv t_2 \pmod 4$ le résultat complet :

B n'est pas libre sur $\mathfrak{O}$ sauf dans les cas particuliers suivants :

1) $a = 0$

2) $a \neq 0$ et $2e-3 \leq t_1 \leq 2e$

3) $a \neq 0$, $t_1 < e$ avec $t_1 = 3$, $t_2 = 9$ ou $t_1 = 2$, $t_2 > 6$.

On peut donc penser que pour des extensions cycliques de degré p^2 d'un corps local, avec $t_1 \not\equiv t_2 \pmod{p^2}$, la structure de B comme $\mathfrak{O}$-module ne dépend ni de k ni de l'extension K/k autrement que par e , t_1 et t_2 ; cf. [1 bis].

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. M. BERGÉ. - Sur l'arithmétique d'une extension diédrale. Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1970-71, n° 14.

[1 bis] A. M. BERGÉ. - Quelques résultats relatifs à l'ordre associé à une extension. Pub Math. Bordeaux, année 1972-1973, fasc. 5, p. 9 à 24.

[2] F. BERTRANDIAS et M. J. FERTON. - Comptes rendus 274, série A, 1972, p. 1330.

[3] M. J. FERTON. - Sur l'anneau des entiers d'extensions cycliques de degré p et d'extensions diédrales de degré 2p d'un corps local. Thèse de Doctoral de 3e cycle présentée à l'Université de Grenoble.

[4] M. J. FERTON. - Comptes rendus 276, série A, 1973, p. 1483.

[5] H. W. LEOPOLDT. - Uber die Hauptordnung der ganzen Elementen eines abelschen Zahlköper. Jour. reine angew Math. t. 201 (1959), pp. 119-149.

[6] E. NOETHER. - Normal Basis bei Körpern ohne höhere verzweigung. Jour. reine angew. Math. t. 167 (1932), pp. 147-152.

-:-:-:-

Marie-Josée FERTON
Université Scientifique et
Médicale de Grenoble
Institut de Mathématiques Pures
Boîte Postale 116
38402 SAINT MARTIN D'HÈRES