GÉRARD RAUZY

Nombres normaux et processus déterministes

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 263-265
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__263_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

NOMBRES NORMAUX ET PROCESSUS DÉTERMINISTES

par

Gérard RAUZY

-:-:-:-

Le résultat principal de cet exposé, dont on trouvera les démonstrations dans [3] est la caractérisation des translations de $\mathbb{R}$, laissant invariant l'ensemble des nombres normaux dans une base donnée.

Plus précisément, soit r un entier supérieur ou égal à 2, R l'ensemble $\{0, 1, \ldots, r-1\}$, $B(r)$ l'ensemble des nombres réels α normaux en base r, c'est-à-dire, tels que la suite $(\alpha r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit équirépartie modulo 1 et soit, $B^{\perp}(r)$ l'ensemble des nombres réels β tels que :

$$\forall \alpha \in B(r) \quad , \quad \alpha + \beta \in B(r) \quad .$$

Le but est donc de donner une caractérisation de l'ensemble $B^{\perp}(r)$. Pour cela, nous définissons le <u>bruit inférieur</u> et le <u>bruit supérieur</u> d'un nombre réel γ de développement en base r : $\gamma = [\gamma] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n / r^{n+1}$.

Pour $s \geq 1$, $N \geq 1$, on pose :

$$\beta_s(\gamma, N) = \inf_{\varphi \in E_s} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \inf(1, |c_n - \varphi(c_{n+1}, \dots, c_{n+s})|)$$

(E_s désignant l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}$)

puis,
$$\underline{\beta}_s(\gamma) = \varliminf_{N\to\infty} \beta_s(\gamma, N) \quad , \quad \overline{\beta}_s(\gamma) = \varlimsup_{N\to\infty} \beta_s(\gamma)$$

le bruit inférieur de γ est alors la quantité :

$$\underline{\beta}(\gamma) = \lim_{s\to\infty} \underline{\beta}_s(\gamma)$$

et, de même, le bruit supérieur est la quantité

$$\overline{\beta}(\gamma) = \lim_{s\to\infty} \overline{\beta}_s(\gamma) \ .$$

Les bruits inférieurs et supérieurs ne dépendent évidemment que de la classe de γ modulo 1 ; en outre, on a toujours l'inégalité :

$$0 \leq \underline{\beta}(\gamma) \leq \overline{\beta}(\gamma) \leq \frac{r-1}{r} \ .$$

Ces quantités expriment en quelque sorte, le degré moyen "d'imprévisibilité" du chiffre de rang n, étant connus les chiffres de rang $n+1$, $n+2$, ... etc... et on a de manière précise le résultat :

(i) γ <u>appartient à</u> $B(r)$ <u>si et seulement si,</u> <u>il est de bruit maximum</u> <u>c'est-à-dire,</u> <u>si</u> $\underline{\beta}(\gamma) = \frac{r-1}{r}$

(ii) γ <u>appartient à</u> $B^{\perp}(r)$, <u>si et seulement si,</u> <u>il est de bruit minimum,</u> <u>c'est-à-dire,</u> <u>si</u> $\overline{\beta}(\gamma) = 0$.

Une autre caractérisation de $B^{\perp}(r)$ est d'être l'ensemble des nombres r-<u>déterministes</u> au sens de B. Weiss [4] et T. Kamae [2] et, les méthodes employées pour aboutir au résultat énoncé sont proches de celles employées par ces auteurs dans la résolution de problèmes analogues de stabilité de l'ensemble des nombres normaux : elles utilisent essentiellement la notion de disjonction de processus stochastique.

Nous donnons, d'autre part, un exemple de nombre r-déterministe (les nombres dont la suite des chiffres en base r est à caractère presque périodique), ce qui permet de retrouver un résultat dû à H. Daboussi et M. Mendès-France [1].

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

[1] H. DABOUSSI et M. MENDÈS-FRANCE. - Spectrum, almost periodicity and equidistribution modulo 1 (à paraître).

[2] T. KAMAE. - Subsequences of normal sequences. Israël J. of Math. vol. 16, n° 2, 1973.

[3] G. RAUZY. - Nombres normaux et processus déterministes. A paraître in Acta Arithmetica, vol. 29, n° 3.

[4] B. WEISS. - Normal sequences as collectives. Proc. Symp. on Topological Dynamics and Ergodic Theory. Univ. of Kentucky, 1971.

-:-:-:-

Gérard RAUZY
Université d'Enseignement
et de Recherche de
Marseille-Luminy
Mathématique-Informatique
70, route L. Lachamp
13228 MARSEILLE Cédex 2