

# *Astérisque*

MARC REVERSAT  
**Sur les suites eutaxiques**

*Astérisque*, tome 24-25 (1975), p. 267-280

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1975\\_\\_24-25\\_\\_267\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__267_0)>

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LES SUITES EUTAXIQUES

par

Marc REVERSAT

-:-:-:-

§. I. - INTRODUCTION. - Les problèmes d'eutaxie consistent en l'étude de l'ensemble des éléments  $x$ , de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  par exemple, pour lesquels il existe une infinité de solutions  $n$  à l'inéquation : (1)  $\|u_n - x\|_q < \varepsilon_n$  (où  $\|\cdot\|_q$  désigne la norme de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  et  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite donnée de nombres réels positifs, décroissante, telle que la série  $\sum \varepsilon_n^q$  soit divergente).

Si l'ensemble des éléments  $x$  de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  pour lesquels l'inéquation (1) admet une infinité de solutions est de complémentaire négligeable relativement à la mesure de Haar, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite eutaxique relativement à la suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite eutaxique si elle est eutaxique relativement à toute suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante, telle que la série  $\sum \varepsilon_n^q$  soit divergente. Cette notion a été introduite par J. Lesca ([2]).

Le plus ancien résultat d'eutaxie est le théorème métrique de Khintchine (Khinčîn). De nombreux auteurs ont étudié le problème d'eutaxie suivant ([8]) :

soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels positifs et  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications d'un pavé  $S$  de  $\mathbb{R}^p$ , à valeurs dans  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  ( $p$  et  $q$  entiers positifs). Soit  $\theta \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ . Quelle est la mesure de l'ensemble des éléments  $x$  de  $S$  pour lesquels (2)  $\|\varphi_n(x) - \theta\|_q < \varepsilon_n$  (où l'inconnue est l'entier  $n$ ) possède une infinité de solutions ?

Les cas suivants ont été étudiés :

- Par W. M. Schmidt lorsque la suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et  $(\varphi_n)$  l'application de  $\mathbb{R}^q$  dans  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  définie par :  $\varphi_n(x) = P(n)x \pmod{\mathbb{Z}^q}$ ,  $P$  étant un polynôme à coefficients entiers ([9]).

- Par W. Philipp lorsque  $\varphi_n$  est l'application de l'intervalle  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  définie par :  $\varphi_n(x) = x \alpha^n \pmod{1}$ ,  $\alpha$  étant un réel supérieur à 1 ([5]).

- Par B. de Mathan pour les applications  $\varphi_n : x \rightarrow \alpha x^n \pmod{1}$  ( $\alpha$  étant un réel positif) définies dans l'intervalle  $]1, +\infty[$  ([3]).

Dans ces trois exemples, il est montré que tout  $\theta \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ , l'inéquation (2) possède pour presque tout  $x \in S$  une infinité de solutions lorsque la série  $\sum_n \varepsilon_n^q$  diverge.

Ce type de résultat implique que pour une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée, la suite  $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est eutaxique pour presque tout  $x$ , relativement à la suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Mais cela n'implique pas que la suite  $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  soit eutaxique pour presque tout  $x$ , car l'ensemble complémentaire négligeable formé des  $x$  pour lesquels la suite  $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est eutaxique par rapport à une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée dépend de cette suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ainsi il a été démontré par J. Lesca ([2]) que la suite  $(nx)_{n \in \mathbb{N}}$  est eutaxique dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  si et seulement

si  $x$  est de constante de Markov finie, i. e. pour presque aucun  $x$ .

Ce résultat avait conduit J. Lesca et B. de Mathan à conjecturer que presque aucune suite (relativement à la mesure de Haar du groupe compact  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ ) ne serait eutaxique. Dans cet article nous démontrons qu'il n'en est rien et qu'en fait presque toute suite d'éléments de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  est eutaxique. Pour cela nous établissons un critère suffisant d'eutaxie à l'aide de certaines fonctions  $\lambda$  définies sur l'ensemble des suites d'éléments de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ . Ce critère permet également d'étudier l'eutaxie de la suite  $(nx)_{n \in \mathbb{N}}$  en dimension  $q$ . Cette suite est eutaxique si et seulement si  $M_q(x) = \limsup_{n > 0} (1/n^{1/q} \|nx\|_q)$  est finie. En dimension 1, J. Lesca démontrait ce théorème en utilisant le développement de  $x$  en fractions continues, permettant d'obtenir des propriétés très fortes de répartition sur la suite  $(nx)_{n \in \mathbb{N}}$ , propriétés qui ne peuvent s'étendre aux dimensions supérieures à 1. Notre critère permet également d'étudier l'eutaxie des suites  $(a_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ , soit lorsque la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croît "très lentement", soit lorsqu'elle croît "très vite".

Notations : Si  $x$  est un nombre réel,  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ , et  $\{x\}$  l'élément de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  associé à  $x$  par la surjection canonique  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Nous désignons par  $q$  un entier positif, par  $\|\cdot\|_q$  la norme de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  ( $\|(x_1, \dots, x_q)\|_q = \sup_{i=1, \dots, q} \|x_i\|_1$ ), et par  $\mu_q$  la mesure de Haar normalisée de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ . Nous dirons qu'un élément  $(x_1, \dots, x_q)$  de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  est rationnel s'il appartient à  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^q$ .

Nous ferons souvent l'abus de notations consistant à confondre un intervalle de  $\mathbb{R}$  inclus dans  $[0, 1[$  et son image canonique dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Ainsi, si  $N$  est un entier positif et si  $k = (k_1, \dots, k_q)$  est un  $q$ -uplet d'entiers tels que

$0 \leq k_i < [N^{1/q}]$ , nous désignons par  $P(k; N)$  l'hypercube de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  défini par :

$$P(k; N) = P(k_1, \dots, k_q; N) = \prod_{i=1}^q \left[ \frac{k_i}{[N^{1/q}]}, \frac{k_i+1}{[N^{1/q}]} \right[ .$$

§. II. - EUTAXIE ET RÉPARTITION. - Soient  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  et  $K$  un hypercube de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ , de mesure non nulle. Soit  $N$  un entier positif. Désignons par  $\lambda(K, u, N)$  le nombre de  $q$ -uplets d'entiers  $k = (k_1, \dots, k_q)$  tels que  $0 \leq k_i < [N^{1/q}]$  pour  $i = 1, \dots, q$  et tels que le pavé  $K \cap P(k; N)$  contienne au moins un point  $u_n$  avec  $1 \leq n \leq N$ . On pose :

$$\lambda(K, u) = \liminf_N \frac{\lambda(K, u, N)}{N \mu_q(K)}$$

$$\chi(u) = \inf_K \lambda(K, u)$$

( $K$  décrivant la famille des hypercubes de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  de mesures non nulles et à sommets rationnels).

Remarquons que les fonctions  $\lambda(K, \cdot)$  et  $\chi$  sont invariantes par l'application de  $((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q)^{\mathbb{N}}$  dans lui-même qui à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $v_n = u_{n+1}$  (Shift-endomorphism).

THÉORÈME I. - Soit  $u$  une suite d'éléments de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ . Si  $\chi(u)$  est strictement positif, alors la suite  $u$  est eutaxique.

Nous démontrons d'abord le lemme suivant : Soit  $t$  un entier positif. Pour tout pavé  $K$  de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  désignons par  $N_q(K, t)$  le nombre de  $q$ -uplets d'entiers  $k = (k_1, \dots, k_q)$  tels que  $0 \leq k_i < t$  pour  $i = 1, \dots, q$  et tels que l'hypercube  $P(k; t^q)$  rencontre  $K$  sans être inclus dans  $K$ . Si  $\alpha$  désigne un nombre

réel positif, soit :  $N_q(\alpha, t) = \sup_K N_q(K, t)$  ( $K$  décrivant la famille des pavés de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  dont chaque côté est de mesure au plus  $\alpha$ ).

LEMME I. 1. -  $N_q(\alpha, t) \leq 2^{q+1} (\max(\alpha t, 2))^{q-1}$ .

Preuve : Pour  $i = 1, \dots, q$ , soit  $I_i$  un intervalle de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  de mesure  $\alpha_i \leq \alpha$  et soit  $K = \prod_{i=1}^q I_i$ .

Le nombre  $N_q(K, t)$  est majoré par la différence du nombre de pavés de forme  $P(k_1, \dots, k_q; t^q)$  ( $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k_i < t$  pour  $i = 1, \dots, q$ ) qui rencontrent  $K$  et du nombre de ceux qui sont contenus dans  $K$ . Le nombre d'intervalles de la forme  $[\frac{k}{t}, \frac{k+1}{t}]$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k < t$ ) rencontrant l'intervalle  $I_i$  est au plus  $[\alpha_i t] + 2 \leq \alpha_i t + 2$ , et le nombre de ceux inclus dans  $I_i$  est au moins  $\max(\alpha_i t - 2, 0)$ .

Donc :

$$N_q(K, t) \leq \prod_{i=1}^q (\alpha_i t + 2) - \prod_{i=1}^q \max(\alpha_i t - 2, 0).$$

Pour  $j = 1, \dots, q$ , la fonction

$$\alpha_j \rightarrow \prod_{i=1}^q (\alpha_i t + 2) - \prod_{i=1}^q \max(\alpha_i t - 2, 0) \quad (\alpha_i \text{ fixé pour } i \neq j)$$

est croissante, par conséquent :

$$N_q(K, t) \leq (\alpha t + 2)^q - (\max(\alpha t - 2, 0))^q$$

d'où il résulte la majoration cherchée.

Démonstration du théorème I : Posons  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(q)})_{n \in \mathbb{N}}$ . Soit  $(\epsilon_n)$  une suite décroissante de nombres réels positifs. Soit  $V_n$  l'hypercube de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  obtenu comme produit des intervalles ouverts de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  de centres  $u_n^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, q$ ) et de rayons  $\epsilon_n$ , et soit  $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$ . Il suffit de montrer que si la série  $\sum_n \epsilon_n^q$  est divergente, on a  $\mu_q(V) = 1$ . En effet, la fonction  $\lambda(K, \cdot)$

étant invariante par le Shift-endomorphisme, on aura alors  $\mu_q(\bigcup_{n \geq N} V_n) = 1$  pour tout entier positif  $N$  et par suite  $\mu_q(\bigcap_{N > 0} \bigcup_{n \geq N} V_n) = 1$ .

Soit  $a$  un nombre réel tel que  $0 < a < \chi(u)$ . Le fait que  $\mu_q(V) = 1$  résultera des lemmes suivants :

**LEMME I. 2.** - Soit  $(\varepsilon_n)$  une suite décroissante de nombres réels positifs. S'il existe un hypercube  $K$  de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  de mesure non nulle et à sommets rationnels tel que  $\mu_q(K \cap V) \leq \frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K)$ , alors, pour toute suite  $(t_s)_{s \in \mathbb{N}}$  d'entiers positifs telle que  $t_s/t_{s-1} > (2/a \mu_q(K))^{1/q}$ , il existe un entier  $s_0$  tel que  $\varepsilon_q < \frac{1}{2t_s}$  pour  $s > s_0$ .

Preuve : Soit  $(t_s)_{s \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers positifs tels que  $t_s/t_{s-1} > (2/a \mu_q(K))^{1/q}$  et soit  $s_1$  tel que  $\lambda(K, u, t_s^q) > a \mu_q(K) t_s^q$  pour tout  $s > s_1$ . Soit  $s > s_1$  et supposons que  $\varepsilon_s \geq \frac{1}{2t_s}$ . Soit  $U_s = \bigcup_{t_{s-1}^q < n \leq t_s^q} V_n$ .

Le nombre d'hypercubes  $P(k_1, \dots, k_q; t_s^q)$  ( $k_i \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k_i < t_s$  pour  $i = 1, \dots, q$ ) tels que  $P(k_1, \dots, k_q; t_s^q) \cap K$  contienne au moins un point  $u_n$  avec  $t_{s-1}^q < n \leq t_s^q$  est au moins  $(a \mu_q(K) t_s^q - t_{s-1}^q)$ . Le nombre de ces hypercubes contenus dans  $K$  est donc au moins  $(a \mu_q(K) t_s^q - t_{s-1}^q - 2^{q+1} t_s^{q-1})$ , puisque, d'après le lemme I. 1., le nombre d'hypercubes  $P(k_1, \dots, k_q; t_s^q)$  qui rencontrent  $K$  sans être contenus dans  $K$  est majoré par  $2^{q+1} (\max(\mu_q(K)^{1/q} t_s, 2))^{q-1} \leq 2^{q+1} t_s^{q-1}$ .

Pour chaque hypercube  $P(k_1, \dots, k_q; t_s^q)$  ( $k_i \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k_i < t_s$  pour  $i = 1, \dots, q$ ) tel que  $P(k_1, \dots, k_q; t_s^q)$  soit inclus dans  $K$  et tel qu'il existe un entier  $n$  avec  $t_{s-1}^q < n \leq t_s^q$  et  $u_n \in P(k_1, \dots, k_q; t_s^q)$ , on a :

$$\mu_q(U_s \cap P(k_1, \dots, k_q; t_s^q)) \geq \frac{1}{2^q t_s^q}$$

puisque  $\varepsilon_n \geq \varepsilon_{t_s^q} \geq \frac{1}{2t_s}$  et que pour chaque indice  $i = 1, \dots, q$  l'un au moins des

deux intervalles  $]u_n^{(i)}, u_n^{(i)} + \frac{1}{2t_s}[$  ou  $]u_n^{(i)} - \frac{1}{2t_s}, u_n^{(i)}[$  est contenu dans  $[\frac{k_i}{t_s}, \frac{k_i+1}{t_s}[$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \mu_q(U_s \cap K) &\geq \frac{1}{2^q t_s^q} (a \mu_q(K) t_s^q - t_{s-1}^q - 2^{q+1} t_s^{q-1}) \\ &\geq \frac{a}{2^{q+1}} \mu_q(K) - \frac{2}{t_s}. \end{aligned}$$

On aura donc  $\mu_q(U_s \cap K) > \frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K)$  pour  $s$  suffisamment grand.

LEMME I. 3. - Soit  $(\varepsilon_n)$  une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série  $\sum \varepsilon_n^q$  soit divergente. Alors, pour tout hypercube  $K$  de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  de mesure non nulle et à sommets rationnels, l'on a :

$$\mu_q(K \cap V) > \frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K).$$

Preuve : La démonstration se fait par l'absurde. Supposons qu'il existe un hypercube  $K$  de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  de mesure non nulle et à sommets rationnels tel que

$$\mu_q(V \cap K) \leq \frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K). \text{ Soit } \delta \text{ un entier positif tel que } \delta > \frac{q 2^{q+3}}{a \mu_q(K)} \text{ (donc } \delta > (\frac{2}{a \mu_q(K)})^{1/q}). \text{ Soit } (v_n) \text{ la suite définie par :}$$

$$v_n = \varepsilon_{\delta^{qs}} \quad \text{si} \quad \delta^{q(s-1)} < n \leq \delta^{qs} \quad (v_1 = \varepsilon_1).$$

Soit  $V'_n$  l'hypercube de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  obtenu comme produit des intervalles de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} ]u_n^{(i)} - v_n, u_n^{(i)} + v_n[$  ( $i=1, \dots, q$ ) et pour tout entier positif  $s$ , soit

$W_s = \bigcup_{n \leq \delta^{qs}} V'_n$ . Comme  $V'_n \subset V_n$ , on a  $\mu_q(W_s \cap K) \leq \frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K)$  pour tout entier  $s$ .

Evaluons  $\mu_q(K \cap (W_s \setminus W_{s-1}))$  : d'après le lemme I. 2., on peut supposer  $s$  suffisamment grand pour que  $\varepsilon_{\delta^{qs}} < \frac{1}{2\delta^s}$ . Le nombre d'hypercubes  $P(k_1, \dots, k_q; \delta^{qs})$  ( $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k_i < \delta^s$  pour  $i=1, \dots, q$ ) contenus dans l'ensemble  $K \cap W_{s-1}$  est au plus  $(\frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K) \delta^{qs})$  puisque, par hypothèse,

$\mu_q(K \cap W_{s-1}) \leq \frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K)$ . Le nombre d'hypercubes  $P(k_1, \dots, k_q; \delta^{qs})$  qui rencontrent  $K \cap W_{s-1}$  sans être contenus dans cet ensemble est majoré par le nombre de ces hypercubes qui rencontrent les ensembles  $K \cap V'_n$  ( $0 < n \leq \delta^{q(s-1)}$ ) et qui ne sont pas contenus dans ces ensembles. Donc, d'après le lemme I.1., le nombre d'hypercubes  $P(k_1, \dots, k_q; \delta^{qs})$  qui rencontrent  $K \cap W_{s-1}$  sans être contenus dans cet ensemble est majoré par

$$\sum_{0 < n \leq \delta^{q(s-1)}} 2^{q+1} ((2v_n \delta^s)^{q-1} + 2^{q-1})$$

puisque pour chaque  $n$ ,  $K \cap V'_n$  est contenu dans l'hypercube  $V'_n$  de mesure  $(2v_n)^q$ . On a :

$$\sum_{0 < n \leq \delta^{q(s-1)}} (2v_n \delta^s)^{q-1} = \sum_{1 \leq k \leq s-1} (2(2\varepsilon_{\delta^k} \delta^s)^{q-1} (\delta^{qk} - \delta^{q(k-1)})) + (2\varepsilon_1 \delta^s)^{q-1} \leq \delta^{s(q-1)} \frac{\delta^q - 1}{\delta - 1} \frac{\delta^s - 1}{\delta^q} + O(\delta^{s(q-1)})$$

puisque pour  $k$  assez grand on a  $\varepsilon_{\delta^k} < \frac{1}{2\delta^k}$ . On majore  $\delta^s - 1$  par  $\delta^s$ ,  $\frac{\delta^{q-1}}{\delta - 1}$  par  $q\delta^{q-1}$ . Finalement : il existe une constante  $L$  (dépendant éventuellement de  $\delta$  mais non de  $s$ ) telle que le nombre d'hypercubes

$P(k_1, \dots, k_q; \delta^{qs})$  ( $k_i \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k_i < \delta^s$  pour  $i = 1, \dots, q$ ) qui rencontrent  $K \cap W_{s-1}$  soit majoré par :

$$\frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K) \delta^{qs} + q 2^{q+1} \delta^{qs-1} + L \delta^{s(q-1)} + 2^q \delta^{q(s-1)}$$

D'autre part les hypercubes  $P(k_1, \dots, k_q; \delta^{qs})$  contenus dans  $K$  et contenant un point  $u_n$  avec  $\delta^{q(s-1)} < n \leq \delta^{qs}$  sont pour  $s$  suffisamment grand, d'après les calculs du lemme I.2., au moins au nombre de  $(a \mu_q(K) \delta^{qs} - \delta^{q(s-1)} - 2^{q+1} \delta^{s(q-1)})$ .

Il existe donc au moins

$$\frac{2^{q+2}-1}{2^{q+2}} a \mu_q(K) \delta^{qs} - (1+2^{2q}) \delta^{q(s-1)} - (2^{q+1}+L) \delta^{s(q-1)} - q 2^{q+1} \delta^{sq-1}$$

hypercubes  $P(k_1, \dots, k_q; \delta^{qs})$  contenus dans  $K$  disjoints de  $W_{s-1}$  et contenant un point  $u_n$  avec  $\delta^{q(s-1)} < n \leq \delta^{qs}$ . Or, pour un tel hypercube

$P(k_1, \dots, k_q; \delta^{qs})$  on a  $\mu((W_s \setminus W_{s-1}) \cap P(k_1, \dots, k_q; \delta^{qs})) \geq \frac{\epsilon^q}{\delta^{qs}}$  puisque, pour  $\delta^{q(s-1)} < n \leq \delta^{qs}$ ,  $v_n = \epsilon_{\delta^{qs}} < \frac{1}{2\delta^s}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \mu_q(K \cap (W_s \setminus W_{s-1})) &\geq \left( \frac{2^{q+2}-1}{2^{q+2}} a \mu_q(K) \delta^{qs} - (1+2^{2q}) \delta^{q(s-1)} - (2^{q+1}+L) \delta^{s(q-1)} - q 2^{q+1} \delta^{sq-1} \right) \frac{\epsilon^q}{\delta^{qs}} \\ &\geq \left( \frac{2^q-1}{2^q} a \mu_q(K) - \frac{2^{q+1}+L}{\delta^s} \right) \delta^{qs} \frac{\epsilon^q}{\delta^{qs}} \end{aligned}$$

puisque  $\delta > \frac{q 2^{2q+3}}{a \mu_q(K)}$ . Donc, pour  $s$  suffisamment grand :

$$\mu_q(K \cap (W_s \setminus W_{s-1})) \geq \frac{2^q-1}{2^{q+1}} a \mu_q(K) \delta^{qs} \frac{\epsilon^q}{\delta^{qs}}.$$

Mais ceci est contraire au lemme suivant :

LEMME I. 4. - La série  $\sum_{s \geq 0} \delta^{qs} \frac{\epsilon^q}{\delta^{qs}}$  est divergente.

Preuve : On a :

$$\delta^{qs} \frac{\epsilon^q}{\delta^{qs}} \geq \frac{1}{\delta^{q-1}} \sum_{\delta^{qs} < n \leq \delta^{q(s+1)}} \epsilon_n^q$$

puisque la suite  $(\epsilon_n)$  est décroissante. Donc

$$\sum_{s \geq 0} \delta^{qs} \frac{\epsilon^q}{\delta^{qs}} \geq \frac{1}{\delta^{q-1}} \sum_{n > \delta^q} \epsilon_n^q$$

ce qui démontre le lemme puisque la série  $\sum_{n \geq 1} \epsilon_n^q$  est divergente.

Fin de la démonstration du théorème I : Le lemme I. 3. prouve que  $V$  a une densité positive en tout point de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ , par suite que  $V$  est de mesure 1. En effet, le complémentaire de  $V$  est négligeable puisqu'il admet la densité 1 en aucun point de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  et que, d'après un théorème de Lebesgue, tout sous-ensemble mesurable de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  a la densité 1 en presque tous ses points.

Remarques : Dans la démonstration du théorème I on n'utilise pas le fait que les hypercubes intervenant dans la définition de la fonction  $\chi$  soient à sommets rationnels. Ce sont les théorèmes mesurant des ensembles de suites eutaxiques qui nécessitent la restriction à une famille dénombrable d'hypercubes.

Une autre modification de la fonction  $\chi$  donne une condition suffisante d'eutaxie plus faible que celle du théorème I : Soit  $u$  une suite d'éléments de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ . Pour tout  $x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  soit  $\chi_x(u) = \inf_K \lambda(K, u)$  ( $K$  décrivant la famille des hypercubes de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ , contenant  $x$ , de mesures non nulles et à sommets rationnels). La même démonstration que celle du théorème I permet de prouver le :

THÉORÈME I bis. - Si  $\chi_x(u) > 0$  pour presque tout  $x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ , la suite  $u$  est eutaxique.

La réciproque du théorème I est fausse ([1], [8]) et nous ne savons pas si celle du théorème I bis est vraie. Cependant, la même démonstration que celle de [4] (voir aussi [7]) permet de montrer le :

THÉORÈME II. - Soit  $u$  une suite d'éléments de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ . S'il existe un hyper-cube  $K$  de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  de mesure non nulle tel que  $\lambda(K, u) = 0$ , alors  $u$  n'est pas eutaxique.

§. III. - MESURES DE CERTAINS ENSEMBLES DE SUITES EUTAXIQUES

Soit  $\pi$  la mesure de Haar normalisée du groupe  $((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q)^{\mathbb{N}}$ . Le théorème I permet de mesurer l'ensemble des suites eutaxiques :

THÉORÈME III. - Presque toute suite d'éléments de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  (relativement à la mesure  $\pi$ ) est eutaxique.

On peut en effet montrer par une méthode analogue à celle du théorème 2 de [4] que pour  $\pi$ -presque toute suite  $n$ , on a  $\chi(u) \geq t$ , où  $t$  est le nombre de l'intervalle  $]0, 1[$  tel que  $t^t(e(1-t)^{1-t}) = 1$ .

Ce résultat peut être précisé dans certains cas. Par exemple, les méthodes du chapitre 3 de [3] (voir aussi [7]) permettent de montrer :

THÉORÈME IV. - Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels positifs. Alors, si la série  $\sum_n \frac{a_n}{a_{n+1}}$  est convergente, la suite  $a(x) = (\{a_n x\})_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est eutaxique pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On peut en effet montrer que pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $\chi(a(x)) \geq t$ . Le théorème I permet alors de conclure.

§. IV. - LA SUITE  $(n x)$  EN DIMENSION  $q$ . - Si  $x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ , nous désignons par  $M_q(x)$  le nombre  $(\liminf_n n^{1/q} \|n x\|_q)^{-1}$  si ce nombre est fini. Sinon nous posons  $M_q(x) = +\infty$ .

THÉORÈME V. - Soit  $x$  un élément de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ . La suite  $(n x)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  est eutaxique si et seulement si  $M_q(x)$  est fini.

Cet énoncé généralise le résultat analogue obtenu par J. Lesca en dimension 1 ([2]). La démonstration découle du résultat plus général suivant :

THÉORÈME VI. - Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante d'entiers positifs, de densité inférieure strictement positive, et soit  $x$  un élément de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ .

Alors :

- si la suite  $(a_n x)$  est eutaxique,  $M_q(x)$  est fini ;
- reciproquement, si la suite  $(a_n x)$  est  $\nu$ -répartie, où  $\nu$  est une mesure sur  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  telle que  $\inf \frac{\nu(K)}{\mu_q(K)} > 0$ . ( $K$  décrivant la famille des hypercubes de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  de mesures non nulles), et si  $M_q(x)$  est fini, alors la suite  $(a_n x)$  est eutaxique.

Preuve : Désignons par  $\frac{1}{d}$  la densité inférieure de la suite  $(a_n)$  et soit  $\rho > 0$  une constante telle que :  $\inf \frac{\nu(K)}{\mu_q(K)} \geq \rho$  ( $K$  décrivant la famille des hypercubes de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  de mesures non nulles). On peut montrer ([7]) que pour tout hypercube  $K$  de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  de mesure non nulle :

$$\frac{\rho}{(1+d^{1/q} M_q(x))^q} \leq \lambda(K, (a_n x)) \leq \frac{(5d)^q}{M_q(x)^{q/q+1}}$$

l'inégalité de gauche étant vraie sous réserve que la suite  $(a_n x)$  soit  $\nu$ -répartie (cet encadrement n'est pas le meilleur possible : [6], [7]). La conclusion de la

démonstration vient alors des théorèmes I et II.

Il résulte en particulier du théorème VI :

**COROLLAIRE.** - Soit  $(a_n)$  une suite strictement croissante d'entiers positifs, de densité inférieure strictement positive, alors la suite  $(a_n x)$  d'éléments de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$  n'est eutaxique que pour presque aucun  $x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ .

En effet,  $M_q(x)$  est infini pour presque tout  $x$ , comme il résulte du théorème métrique de Khintchine.

-:-:-

Remarque : Les démonstrations complètes des résultats de cet exposé figurent dans un article dont la publication a été demandée à "Acta Arithmetica".

-:-:-

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. DELMER. - Une remarque sur l'eutaxie. C. R. A. S. Paris, t. 279, série A, p. 395-397, 1974.
- [2] J. LESCA. - Sur les approximations diophantiennes à une dimension. Thèse Sc. Math., Grenoble (1968).
- [3] B. de MATHAN. - Approximations diophantiennes dans un corps local. Bull. Soc. Math. France, mémoire 21, (1970) 93 pages.
- [4] B. de MATHAN. - Un critère de non-eutaxie. C. R. A. S. Paris, t. 273, A, p. 433-436 (1971).
- [5] W. PHILIPP. - Some metrical theorems in number theory. Pacific J. Math. 20, 1, (1967) p. 109-127.
- [6] M. REVERSAT. - Un critère d'eutaxie. C. R. A. S. Paris, t. 277, A, n° 10, p. 405-408 (1973).

- [7] M. REVERSAT. - Approximations diophantiennes par les éléments de certaines suites. Thèse de spécialité, Math. Bordeaux (1973).
- [8] M. REVERSAT. - Les suites eutaxiques. Séminaire de Théorie des Nombres (Delange-Pisot-Poitou), 1973-1974.
- [9] W. M. SCHMIDT. - Metricals theorems on fractional parts of sequences. Trans. Amer. Math. Soc. 110, 3, (1964).

-:-:-

Marc REVERSAT  
Centre de Mathématiques  
de l'Ecole Polytechnique  
17, rue Descartes  
75230 PARIS CEDEX 05  
et  
E. R. A. au C. N. R. S. n°362  
U. E. R. de Mathématiques  
et d'Informatique  
Université de B ordeaux I  
351, cours de la Libération  
33405 TALENCE