

Astérisque

NICOLE MOSER

Unités et nombre de classes d'une extension diédrale de \mathbb{Q}

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 29-35

http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__29_0

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNITÉS ET NOMBRE DE CLASSES D'UNE EXTENSION DIÉDRALE DE \mathbb{Q}

par

Nicole MOSER

-:-:-:-

Nous nous proposons d'étudier la structure du groupe des unités d'une extension diédrale de \mathbb{Q} , en tant que module sur l'algèbre du groupe de Galois, et d'en tirer quelques conséquences sur le nombre de classes.

Soit K/\mathbb{Q} une extension galoisienne finie, dont on note U_K le groupe des unités, et V_K le sous-groupe des unités de torsion. Posons $E_K = U_K/V_K$, et $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

DÉFINITION. - Une unité ϵ de K est dite unité de Minkowski si de l'ensemble $\{\epsilon^s\}_{s \in G}$, on peut extraire un système d'unités fondamentales.

Il est clair que lorsque K est une extension galoisienne totalement réelle de \mathbb{Q} , il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :

α) il existe dans K une unité de Minkowski ;

β) E_K est $\mathbb{Z}[G]$ -monogène.

Supposons maintenant que K soit une extension galoisienne totalement réelle de \mathbb{Q} , de degré n . Le théorème de Dirichlet sur les unités montre que E_K est un \mathbb{Z} -module libre de rang $n-1$. Posons $T = \sum_{s \in G} s$; c'est un élément de l'annulateur de E_K dans $\mathbb{Z}[G]$. On vérifie aisément que pour que E_K soit $\mathbb{Z}[G]$ -monogène, il faut et il suffit qu'il soit $\mathbb{Z}[G]$ -isomorphe au module $R = \mathbb{Z}[G] / T \mathbb{Z}[G]$.

PROPOSITION 1. - Pour tout sous-groupe γ de G , posons $T_\gamma = \sum_{s \in \gamma} s$, et notons R^γ l'ensemble des éléments de R invariants par γ . Alors

$$R^\gamma = T_\gamma R .$$

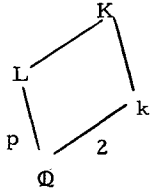
COROLLAIRE. - Soit K une extension galoisienne totalement réelle de \mathbb{Q} , admettant une unité de Minkowski. Quelle que soit la sous extension K' de K ,

$$N_{K/K'} E_K = E_{K'} .$$

Si de plus K' est galoisienne sur \mathbb{Q} , elle admet une unité de Minkowski, qui est norme sur K' de l'unité de Minkowski de K .

ÉTUDE DU CAS DIÉDRAL TOTALEMENT RÉEL

Notations :



Le groupe de Galois G est engendré par deux générateurs, σ et τ , liés par les relations $\sigma^p = \tau^2 = 1$ et $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$. La lettre L désigne le sous-corps fixe par τ , et k est le sous corps fixe par σ . De plus, nous noterons :

$\mathbb{Q}^{(p)} = \mathbb{Q}(\zeta)$ le p ième corps cyclotomique,

A l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}^{(p)}$,

$A_{\mathbb{O}}$ l'anneau des entiers du sous-corps réel maximal de $\mathbb{Q}^{(p)}$.

On munit A d'une structure de $\mathbb{Z}[G]$ -module en définissant l'action de σ comme la multiplication par ζ , et celle de τ comme la conjugaison complexe. M. P. Lee utilise cette structure pour donner dans [7] la classification des représentations intégrales du groupe diédral. Ses résultats montrent que E_K est isomorphe à une, et à une seule, des sommes directes suivantes :

$$\alpha) \mathfrak{A}_1 A \oplus \mathfrak{A}_2 A \oplus S$$

$$\beta) (1-\zeta) \mathfrak{A}_1 A \oplus \mathfrak{A}_2 A \oplus S$$

$$\gamma) (1-\zeta) \mathfrak{A}_1 A \oplus (1-\zeta) \mathfrak{A}_2 A \oplus S$$

$$\delta) \mathfrak{A}_1 A \oplus (\mathfrak{A}_2 A, S)$$

$$\epsilon) (1-\zeta) \mathfrak{A}_1 A \oplus (\mathfrak{A}_2 A, S),$$

où les \mathfrak{A}_i sont des idéaux de $A_{\mathbb{O}}$, où S est le $\mathbb{Z}[G]$ -module \mathbb{Z} , sur lequel σ agit trivialement, et τ agit comme la multiplication par -1 , et où $(\mathfrak{A}_2 A, S)$ est une extension non triviale de S par $\mathfrak{A}_2 A$.

THÉORÈME 2. - Les cinq cas ci-dessus sont caractérisés par les valeurs des

indices $a = (E_K : E_L E_L^\sigma E_k)$ et $b = (E_k : N_{K/k} E_k)$

- | | |
|--------------|-----------|
| α) $a = 1$ | $b = p$ |
| β) $a = p$ | $b = p$ |
| γ) $a = p^2$ | $b = p$ |
| δ) $a = p$ | $b = 1$ |
| ε) $a = p^2$ | $b = 1$. |

Remarque 1 : Dans tous les cas, $E_L = N_{K/L} E_K$.

Remarque 2 : On vérifie que le $\mathbb{Z}[G]$ -module R est du type δ) .

COROLLAIRE. - Pour qu'une extension diédrale totalement réelle admette une
unité de Minkowski, il faut que $a = p$ et $b = 1$. Si de plus A_0 est principal,
cette condition est suffisante.

Etude du nombre de classes

Dans [8], J. Martinet étudie la décomposition d'un nombre premier p dans une extension diédrale, ce qui permet de comparer les fonctions "zêta" des corps K , L , k et \mathbb{Q} . Grâce à la formule analytique du nombre de classes, on obtient la relation entre nombres de classes h et régulateurs R :

$$h_K = h_L^2 h_k \times \frac{R_k R_L^2}{R_K} .$$

Un calcul direct sur les régulateurs permet d'énoncer alors :

PROPOSITION 3. - $h_K = a \frac{h_L^2 h_k}{2}$, où a est l'indice $(E_K : E_L E_{L\sigma} E_k)$.

Exemples, dans le cas $p = 3$

D'après la proposition 3, pour que $a = 9$, il suffit que h_L et h_k soient premiers à 3.

1) Prenons pour L le corps cubique de discriminant 1076 ; alors $k = \mathbb{Q}(\sqrt{269})$, et les tables de [2] donnent $h_L = h_k = 1$. Dans K/k , il existe un seul idéal ramifié. D'après un résultat de Kuroda, [6], si K est une extension cyclique de degré premier impair d'un corps de nombres k , ramifiée en une place finie au plus, $U_k = N_{K/k} U_K$. Donc $b = 1$, et cet exemple illustre le cas ϵ).

2) Si L est le corps cubique de discriminant 756, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{21})$, et on vérifie encore que L et k sont principaux. Donc $a = 9$, et $h_K = 1$. Comme il existe deux idéaux ramifiés dans K/k , la formule des classes ambiges [3] permet de conclure que $b = 3$. C'est le cas γ).

3) Considérons enfin le corps L de discriminant 229 ; $h_L = 1$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{229})$, $h_k = 3$. Il n'existe pas d'idéaux ramifiés dans K/k . Kisilevsky énonce dans [5] le résultat suivant : si k est un corps de nombres, dont le p -groupe des classes est cyclique d'ordre p , la p -tour de classes de k est de longueur 1. Donc la proposition 3 donne $a = 3$, b vaut 1 d'après [6], et K est de type δ).

CAS DIÉDRAL IMAGINAIRE

PROPOSITION 4. - Soit K/\mathbb{Q} une extension diédrale imaginaire. Il y a deux structures de $\mathbb{Z}[G]$ -modules possibles pour E_K , caractérisées par

$$\alpha) \quad a = 1 \qquad \beta) \quad a = 3 .$$

PROPOSITION 5. - Si A_0 est principal, K admet une unité de Minkowski.

Remarque : Dans les deux cas, $N_{K/L} E_K = E_L$.

PROPOSITION 6. - $h_K = a \frac{h_L^2 h_k}{p}$.

Cette dernière formule se trouve pour $p = 3$ dans les articles de Barrucand et Cohn [1], et de Ishida [4]. Dans [1], des exemples sont donnés où $a = 1$ et $a = 3$.

-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARRUCAND and COHN. - Remarks on principal factors in a relative cubic field. J. Number theory t. 3, 1971, p. 226-239.
- [2] BOREVIĆ and SCHAFAREVIĆ. - Number theory. Academic press 1966 .
- [3] CHEVALLEY. - Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. Fac. Sc. Tokyo, Sect. 1, t. 21, 1933.

EXTENSIONS DIÉDRALES DE \mathbb{Q}

- [4] ISHIDA. - Fundamental units of certain algebraic number fields.
Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, t. 39, 1973.
- [5] KISILEVSKY. - Some results related to Hilbert's theorem 94 . J. of
Number theory, t. 2, 1970.
- [6] KURODA. - Über die Klassenzahl eines relativzyklischen Zahlkörpers
von Primzahlgrade. Proc. Japan Acad. t. 40, 1964.
- [7] LEE M. -P. - Integral representations of dihedral groups of order $2p$.
Trans. Amer. Math. Soc. t. 110, 1964.
- [8] MARTINET J. - Sur l'arithmétique des extensions galoisiennes à groupe
de Galois diédral d'ordre $2p$. Ann. Inst. Fourier, tome XIX,
1969

-:~::~:-

Nicole MOSER
Université Scientifique et
Médicale de Grenoble
Institut de Mathématiques
Pures
Boîte Postale 116
38402 SAINT MARTIN
D'HÈRES