

# *Astérisque*

HEDI DABOUSSI

**Fonctions multiplicatives presque périodiques  $B$**

*Astérisque*, tome 24-25 (1975), p. 321-324

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1975\\_\\_24-25\\_\\_321\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__321_0)>

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS MULTIPLICATIVES PRESQUE PÉRIODIQUES B

par

Hedi DABOUSSI

(d'après un travail commun avec Hubert DELANGE)

-:-:-:-

I. - Une fonction  $f$  de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{C}$  est multiplicative si

$$f(1) = 1 \text{ et } f(m, n) = f(m).f(n) \text{ toutes les fois que } (m, n) = 1 .$$

Une fonction arithmétique  $f$  est presque périodique B (B pour Bésicovitch) si  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists P_\epsilon$  polynôme trigonométrique,  $P_\epsilon(x) = \sum a_j e^{2\pi i \alpha_j x}$  avec  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  tel que

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n) - P_\epsilon(n)| \leq \epsilon .$$

Des conditions suffisantes pour qu'une fonction multiplicative soit presque périodique B ont été déterminés par Erdős, Hartman, Kac, Van Kampen et Wintner [5, 6, 7, 10, 11], Novoselov [9] a fourni une nouvelle démonstration de ces résultats.

Nous allons, dans la suite, considérer les fonctions multiplicatives  $f$  de

module au plus égal à un et déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient presque périodiques B .

II. - Il est clair qu'une fonction presque périodique B admet des coefficients de Fourier Besicovitch, c'est-à-dire que la limite quand  $x \rightarrow +\infty$  de  $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) e^{2\pi i n \alpha}$  existe pour tout  $\alpha$  réel.

THÉORÈME 1. - Pour tout  $\alpha$  irrationnel  $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) e^{2\pi i n \alpha}$  tend vers zéro quand  
 $x \rightarrow +\infty$  .

Le théorème 1 découle des deux lemmes suivants :

LEMME 1. -  $\exists c > 0$  tel que pour tout  $a_n \in \mathbb{C}$  , pour tout  $y \leq \sqrt{x}$  on a :

$$\sum_{p \leq y} \frac{1}{p} \left| \sum_{n \leq x} a_n - \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} a_n \right|^2 \leq c \cdot \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |a_n|^2 .$$

Le lemme 1 se déduit de l'inégalité de Turan Kubilus [8, 4], il se déduit également d'inégalités du type "grand crible".

LEMME 2. - Pour tout  $y > 0$  et pour tout  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  ,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \sum_{p \leq y} \frac{1}{p} \left| \sum_{n \leq \frac{x}{p}} f(n) e^{2\pi i n \alpha p} \right|^2 \leq 1 .$$

THÉORÈME 2. - a) Si pour tout caractère de Dirichlet  $\chi$  et tout nombre réel u  
on a  $\sum \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re}(f(p) \chi(p) p^{iu})) = +\infty$  alors  $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) e^{2\pi i n \alpha}$  tend vers zéro pour tout  
 $\alpha$  rationnel.

b) S'il existe un nombre réel a et un caractère de Dirichlet  $\chi$   
tel que  $\sum \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re}(f(p) \chi(p) p^{ia}))$  soit convergente, alors :

FONCTIONS MULTIPLICATIVES

$\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) e^{2\pi i n \alpha} = C_{\alpha} x^{i\alpha} \exp iA(x) + o(1)$ , où  $C_{\alpha} \in \mathbb{C}$  et  $A$  est une fonction réelle telle que  $\sup_{x \leq y \leq x^2} |A(y) - A(x)| = o(1)$ .

On peut prendre  $A(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} (\text{Im } f(p) \chi(p) p^{-i\alpha})$ .

De plus il existe au moins un  $\alpha \in \mathbb{Q}$  telle que  $C_{\alpha} \neq 0$ .

Ce théorème se déduit des résultats de Delange [3], concernant les valeurs moyennes sur une progression arithmétique des fonctions multiplicatives.

III. - Les théorèmes 1 et 2 entraînent qu'une fonction  $f$  est presque périodique non triviale [1] seulement si  $\sum_p \frac{1 - \chi(p) f(p)}{p}$  est convergente où  $\chi$  est un caractère de Dirichlet. Cette condition est en fait suffisante et nous avons :

THÉORÈME 3. - Une fonction  $f$  est presque périodique B si et seulement si il existe un caractère de Dirichlet  $\chi$  tel que la série  $\sum_p \frac{1 - \chi(p) f(p)}{p}$  converge.

En effet, si  $\chi$  est le caractère constant égal à un, on obtient, grâce au théorème de Delange [2]:

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n) - f_y(n)|^2 = 0$$

où  $f_y$  est la fonction multiplicative périodique définie par :

$$f_y(p^r) = \begin{cases} 1 & \text{si } p^r > y \\ f(p^r) & \text{si } p^r \leq y. \end{cases}$$

Dans le cas général, la fonction  $\chi(n) f(n)$  est presque périodique B, et le résultat découle du lemme de "transfert" suivant :

LEMME 3. - Si  $\chi(n) f(n)$  est presque périodique B, alors  $f$  est presque périodique B.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]  $f$  est presque périodique  $B$  avec un spectre vide si et seulement si on a  
$$\sum \frac{1-|f(p)|}{p} = +\infty .$$
- [2] DELANGE. - Annales E. N. S. 78, 1961, pp. 273 -304.
- [3] DELANGE. - Comptes rendus 275, série A, 1972, p. 781.
- [4] PDTA ELLIOT. - On connections between the Turan Kubilus inequality and the large sieve. Procee. symposia. Math. Vol. XXIV, pp. 77-82.
- [5] ERDÖS, WINTNER. - Additive functions and almost periodicity  $B^2$ . A. J. Math. 62, 1940, pp. 635-645.
- [6] HARTMAN, WINTNER. - On the almost periodicity of additive number theoretical functions. Am. J. Math. 62, 1940, pp. 753-758.
- [7] KAC, VAN KAMPEN, WINTNER. - Ramanujan sums and almost periodic functions. Am. J. Math. 62, 1940, pp. 107-114.
- [8] KUBILUS. - Probabilistic Methods in the theory of numbers. Transl. Math. Monographs, Vol. 11, Am. Math. Soc. Providence.
- [9] NOVOSELOV. - A new method in probabilistic number theory. Am. Math. S. Transl. 52, 1966, pp. 217-275.
- [10] VAN KAMPEN, WINTNER. - On the almost periodic behavior of multiplicative number theoretical functions. Am. J. Math. 62, 1940, pp. 613-626.
- [11] WINTNER. - Number Theoretical almost periodicities. Am. J. Math. 67, 1945, pp. 173-193.

-:-:-:-

Hedi DABOUSSI  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences  
B. P. 347  
51062 REIMS