

# Astérisque

HELMUT KOCH

B. B. VENKOV

**Über den  $p$ -klassenkörperturm eines imaginär-  
quadratischen Zahlkörpers**

*Astérisque*, tome 24-25 (1975), p. 57-67

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1975\\_\\_24-25\\_\\_57\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__57_0)

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÜBER DEN  $p$ -KLASSENKÖRPERTURM EINES  
IMAGINÄR-QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPERS

von

Helmut KOCH und B. B. VENKOV

-:-:-:-

Sei  $k$  ein imaginär-quadratischer Zahlkörper,  $p$  eine von 2 verschiedene Primzahl und  $K$  die maximale unverzweigte  $p$ -Erweiterung von  $k$ . Im folgenden interessieren wir uns für die Struktur der Galoisschen Gruppe  $G$  von  $K/k$  als Pro- $p$ -Gruppe. Dabei gehen wir von bekannten arithmetischen Sätzen über die Struktur von  $G$  aus. Die hier durchgeführte Untersuchung ist rein gruppentheoretischer Natur.

Insbesondere interessieren wir uns für den Fall, daß  $G$  endlich ist, d. h. daß der Klassenkörperturm  $K/k$  nach endlich vielen Schritten abbricht.

Bezüglich der verwendeten gruppentheoretischen Bezeichnungen und Rechenregeln, insbesondere über höhere Kommutatoren, verweisen wir auf [1], Kapitel 10, und [3], § 7.

1. - Nach I. R. Schafarewitsch (siehe [3]) ist  $G$  eine Pro- $p$ -Gruppe, deren Erzeugendenrang  $d$  gleich dem Relationenrang gleich dem Rang der  $p$ -Klassengruppe von  $k$  ist. Auf  $G$  operiert der Automorphismus  $\sigma$ , der jedes Element von  $k$  in

sein konjugiert-komplexes überführt.  $\sigma$  hat die Ordnung 2. Aus der Klassenkörpertheorie ist bekannt, daß  $\sigma$  auf  $G/[G, G]$ , d. h. auf der  $p$ -Klassengruppe, durch Übergang zum Reziproken operiert. Wir bezeichnen eine endlich erzeugte Pro- $p$ -Gruppe  $G$  mit den folgenden drei Eigenschaften als Schursche  $\sigma$ -Gruppe :

- 1) Der Erzeugendenrang ist gleich dem Relationenrang
- 2)  $G/[G, G]$  ist endlich
- 3) Auf  $G$  operiert ein Automorphismus  $\sigma$  der Ordnung 2, der auf  $G/[G, G]$  den Übergang zum Reziproken erzeugt.

Wir interessieren uns im folgenden für die Struktur der Schurschen  $\sigma$ -Gruppen.

2. - Für eine beliebige Pro- $p$ -Gruppe  $H$  bezeichnet  $H^{(n)}$  das  $n$ -te Glied der absteigenden Zentralreihe.

Sei  $1 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 1$  eine Repräsentation von  $G$  durch die freie Pro- $p$ -Gruppe  $F$  mit den Erzeugenden  $s_1, \dots, s_d$  und dem Relationenmodul  $R$  mit den Erzeugenden  $r_1, \dots, r_d$ . Wir setzen  $\sigma$  zu einem Automorphismus von  $F$  fort, der ebenfalls mit  $\sigma$  bezeichnet wird.

Die in 1. aufgezählte Information über  $G$  läßt sich folgendermaßen ausdrücken :

Die Erzeugenden  $s_1, \dots, s_d$  können so gewählt werden, daß für  $i=1, \dots, d$

$$(1) \quad r_i \equiv s_i^{q_i} \pmod{F^{(2)}}$$

und

$$(2) \quad s_i^\sigma \equiv s_i^{-1} \pmod{R \cdot F^{(2)}}$$

$$(3) \quad s_i^{\sigma^2} \equiv s_i \pmod{R}$$

gilt, wobei  $q_i$  eine durch  $p$  teilbare  $p$ -Potenz ist.

$$(4) \quad R \text{ ist invariant bei } \sigma .$$

3. - LEMMA 1. - Bei passender Wahl der Erzeugenden  $s_1, \dots, s_d$  gilt

$$s_i^\sigma \equiv s_i^{-1} \pmod{R} \quad \text{für } i = 1, \dots, d .$$

Beweis :  $s'_i = s_i^{\frac{1}{2}} s_i^{-\frac{1}{2}\sigma}$  unterscheidet sich von  $s_i$  nur um ein Element aus  $RF^{(2)}$ ,

und es wird

$$s_i^{\sigma} \equiv s_i^{\frac{1}{2}\sigma} s_i^{-\frac{1}{2}} \equiv (s_i^{\frac{1}{2}} s_i^{-\frac{1}{2}\sigma})^{-1} \equiv s_i'^{-1} \pmod{R} .$$

Daher ist  $\{s'_i \mid i = 1, \dots, d\}$  ein Erzeugendensystem von  $F$  mit den gewünschten Eigenschaften.

LEMMA 2. - Bei passender Fortsetzung von  $\sigma$  auf  $F$  gilt  $\sigma^2 = 1$  und  
 $h^\sigma \equiv h^{(-1)^n} \pmod{F^{(n+1)}}$  für  $h \in F^{(n)}$  .

Beweis : Die erste Behauptung ist klar wegen Lemma 1 : Bei passender Wahl der Erzeugenden können wir  $s_i^\sigma = s_i^{-1}$  setzen. Zum Beweis der zweiten Behauptung bemerken wir, daß  $F^{(n)} \pmod{F^{(n+1)}}$  von den Elementen der Form  $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$  erzeugt wird, wobei  $1 \leq i_k \leq d$  für  $k = 1, \dots, n$  ist. Weiter ist

$$(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})^\sigma \equiv (s_{i_1}^{-1}, \dots, s_{i_n}^{-1}) \equiv (s_{i_1}, \dots, s_{i_n})^{(-1)^n} \pmod{F^{(n+1)}} .$$

Im folgenden setzen wir immer  $\sigma^2 = 1$  und  $h^\sigma \equiv h^{-1} \pmod{F^{(2)}}$  für  $h \in F$  voraus.

SATZ 1. - Die erzeugenden Relationen  $r_1, \dots, r_d$  einer Schurschen  $\sigma$ -Gruppe können stets so gewählt werden, daß

$$r_i = \rho_i \rho_i^{-\sigma}, \quad i = 1, \dots, d,$$

gilt, wobei  $\rho_i$  ein Element von  $F$  mit

$$\rho_i \equiv s_i^{\frac{1}{2}} q_i \pmod{F^{(2)}} \quad (5)$$

ist.

Seien andererseits  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, d$  beliebige Elemente von  $F$  mit (5).

Dann genügt der von  $\{r_i = \rho_i \rho_i^{-\sigma} \mid i = 1, \dots, d\}$  erzeugte Relationenmodul  $R$  den Bedingungen (1), (4) und  $F/R$  ist eine Schursche  $\sigma$ -Gruppe. Genauer gilt

$$r_i^\sigma = r_i^{-1}. \quad (6)$$

Beweis : Sei  $\{r_1, \dots, r_d\}$  ein erzeugendes Relationensystem, das den Bedingungen (1), (4) genügt.  $r'_i = r_i^{\frac{1}{2}} r_i^{-\frac{1}{2}\sigma}$  unterscheidet sich von  $r_i$  nur um ein Element aus  $F^{(2)} = [F, F]$ .

$$\{r'_i, r_i r_i'^{-1} \mid i = 1, \dots, d\}$$

ist ein nichtminimales erzeugendes Relationensystem, aus dem gewisse  $d$  Relationen weggelassen werden dürfen. Eine Relation der Form  $r'_i$ , kann nicht weggelassen werden, da  $G/[G, G]$  endlich ist. Daher ist  $\{r'_i \mid i = 1, \dots, d\}$  erzeugendes Relationensystem, das mit  $\rho_i = r_i^{\frac{1}{2}}$  den Bedingungen des ersten Teils von Satz 1 genügt. Der zweite Teil ist offensichtlich.

Sei  $\{F_i \mid i = 1, 2, \dots\}$  die Zassenhaus-Filtrierung (siehe [3], § 7) von  $F$

Das Relationensystem  $\{r_i \mid i = 1, \dots, d\}$  werde minimal bezüglich der Zassenhaus-Filtrierung folgendermaßen gewählt : Wir konstruieren induktiv

*p*-KLASSENKÖRPERTURM

Teilrelationensysteme  $R_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , und setzen dann

$$\{r_i \mid i = 1, \dots, d\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Sei  $R_1 = \emptyset$ . Wenn  $R_{n-1}$  schon konstruiert ist, setzen wir

$$R_n = R_{n-1} \cup \{r_1^{(n)}, \dots, r_{a_n}^{(n)}\},$$

wobei die  $r_1^{(n)}, \dots, r_{a_n}^{(n)}$  zusammen mit den Elementen aus  $R_{n-1} \bmod F_{n+1}$  ein minimales Erzeugendensystem von  $RF_{n+1}/F_{n+1}$  als Normalteiler von  $F/F_{n+1}$  bilden. Die natürlichen Zahlen  $a_n$  sind dann Invarianten von  $G$  (siehe hierzu [2]).

Offenbar gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = d.$$

SATZ 2. - Die Invarianten  $a_n$  einer Schurschen  $\sigma$ -Gruppe können nur für ungerades  $n$  von 0 verschieden sein.

Bemerkung : Wir erinnern daran, daß wir grundsätzlich  $p \neq 2$  voraussetzen.

Für  $p < n$  besagt Satz 2, daß die Relationen  $r_i \in F_n$ ,  $r_i \notin F_{n+1}$  abgesehen von  $p$ -ten Potenzen mit Kommutatoren von ungeradem Gewicht  $n$  beginnen :

$$r_i \in F^{(n)} F^p, \quad r_i \notin F^{(n+1)} F^p.$$

Beweis von Satz 2. : Wie man leicht sieht, kann man ein Relationensystem gleichzeitig minimal bezüglich der Zassenhaus-Filtrierung und mit der Eigenschaft (6) wählen.

$F_n$  wird  $\bmod F_{n+1}$  von den Elementen der Form

$$(s_{i_1}, \dots, s_{i_k})^{p^\lambda} \quad \text{mit } kp^\lambda = n$$

erzeugt. Daher gilt bei  $p \neq 2$

$$h^\sigma \equiv h^{(-1)^n} \bmod F_{n+1} \quad \text{für } h \in F_n.$$

Für gerades  $n$  wird also

$$r_i^\sigma \equiv r_i \pmod{F_n}$$

und wegen (6)

$$r_i \equiv 1 \pmod{F_{n+1}}, \quad \text{q. e. d.}$$

COROLLAR. - Sei  $G$  endlich. Dann ist  $d \leq 2$ . Für  $d = 2$  gibt es bezüglich der Invarianten  $a_n$  höchstens drei Typen :  $a_3 = 2$ ,  $a_3 = a_5 = 1$ ,  $a_3 = a_7 = 1$ .

Beweis : Nach [3], Satz 7.2. wäre für  $d \geq 3$  und  $R \subset F_3$

$$d > \frac{d^3}{3} \cdot 2^2 \geq \frac{d}{3} 2^2.$$

Für  $d = 2$ ,  $R \subset F_5$  wäre

$$2 > \frac{2^5}{5^5} \cdot 4^4 = \frac{4^9}{10^5} = \left(\frac{1024}{1000}\right)^2 \cdot \frac{10}{4}$$

Nach [3], Satz 7.20, wäre im Falle  $a_3 = a_9 = 1$ .

$$\varphi(t) = 1 - 2t + t^3 + t^9 > 0 \quad \text{für } 0 < t < 1.$$

Jedoch wird  $\varphi(0,7) < 0$ .

Daraus folgt die Behauptung. (Tatsächlich sind schon die Pro- $p$ -Gruppen mit zwei Erzeugenden und zwei Relationen vom Typ  $a_3 = a_8 = 1$  unendlich).

4. - In Ergänzung zu Satz 1 beweisen wir den folgenden Fortsetzungssatz für Relationen.

SATZ 3. - Sei  $r \in F$  mit

$$r^\sigma \equiv r^{-1} \pmod{F^{(n)}}.$$

Für ungerade  $n$  gilt dann

$$(7) \quad (rx)^\sigma \equiv (rx)^{-1} \pmod{F^{(n+1)}} \text{ für alle } x \in F^{(n)}.$$

Für gerades  $n$  gibt es  $\pmod{F^{(n+1)}}$  genau ein  $x \in F^{(n)}$  mit

$$(8) \quad (rx)^\sigma \equiv (rx)^{-1} \pmod{F^{(n+1)}}.$$

Beweis : Sei  $r^\sigma \equiv r^{-1}y \pmod{F^{(n+1)}}$ ,  $y \in F^{(n)}$ . Für ungerades  $n$  wird

$$r = r^{\sigma^2} = (r^{-1}y)^\sigma \equiv (r^{-1}y)^{-1}y^{-1} = ry^{-2} \pmod{F^{(n+1)}}$$

und daher  $y \in F^{(n+1)}$ .

Weiter gilt  $(rx)^\sigma \equiv r^{-1}x^{-1} \equiv (rx)^{-1} \pmod{F^{(n+1)}}$ .

Für gerades  $n$  und  $x \in F^{(n)}$  wird

$$(rx)^\sigma \equiv r^{-1}yx \equiv (rx)^{-1}yx^2 \pmod{F^{(n+1)}}$$

(8) ist daher genau dann erfüllt, wenn  $x \equiv y^{-\frac{1}{2}} \pmod{F^{(n+1)}}$  gesetzt wird.

5. - In diesem Abschnitt geben wir zwei Beispiele, die das vorhergehende illustrieren.

Beispiel. - Sei  $r_1 = s_1^{q_1}(s_1, s_2, s_1)^{\alpha_1}(s_1, s_2, s_2)^{\beta_1}$ ,  $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Z}_p$

$$r_2 = s_2^{q_2}(s_1, s_2, s_1)^{\alpha_2}(s_1, s_2, s_2)^{\beta_2}, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Z}_p$$

$$\alpha_1 q_2 q_1^{-1} + \beta_2 \neq 0 \pmod{p}, \quad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0 \pmod{p}.$$

Dann ist  $G = F/(r_1, r_2)$  eine endliche Schursche  $\sigma$ -Gruppe vom Typ  $a_3 = 2$  mit  $G^{(4)} = \{1\}$ .



Beweis : Offenbar ist

$$r_i^\sigma \equiv r_i^{-1} \pmod{F^{(4)}}, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(s_1, s_2, s_1, s_1) = h_1, \quad (s_1, s_2, s_1, s_2) = h_2, \quad (s_1, s_2, s_2, s_2) = h_3.$$

Dann wird

$$(r_1, s_1) \equiv h_1^{\alpha_1} h_2^{\beta_1} \pmod{F^{(5)}}, \quad (r_2, s_2) \equiv h_2^{\alpha_2} h_3^{\beta_2} \pmod{F^{(5)}}$$

$$(r_1, s_2)^{q_2 q_1^{-1}} (r_2, s_1) \equiv (s_1, s_2)^{q_1} h_2^{q_2 q_1^{-1}} h_1^{\alpha_1 q_2 q_1^{-1}} h_3^{\beta_1 q_2 q_1^{-1}} (s_2, s_1)^{q_2} h_1^{\alpha_2} h_2^{\beta_2} \pmod{F^{(5)}}.$$

Wegen

$$(s_1, s_2)^{q_1} (s_2, s_1)^{q_2 q_1^{-1}} \equiv 1 \pmod{R F^{(5)}}$$

erhält man insgesamt

$$h_1^{\alpha_1} h_2^{\beta_1} \equiv 1, \quad h_2^{\alpha_2} h_3^{\beta_2} \equiv 1, \quad h_1^{\alpha_2} h_2^{\alpha_1 q_2 q_1^{-1} + \beta_2} h_3^{\beta_1 q_2 q_1^{-1}} \equiv 1 \pmod{R F^{(5)}}.$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_2, \alpha_1 q_2 q_1^{-1} + \beta_2, \beta_1 q_2 q_1^{-1} \end{vmatrix} = (\alpha_2 \beta_1 - \beta_2 \alpha_1) (\alpha_1 q_2 q_1^{-1} + \beta_2)$$

ist nach Voraussetzung  $\not\equiv 0 \pmod{p}$ . Daher folgt

$$h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv 1 \pmod{R F^{(5)}}, \quad \text{d. h.}$$

$$F^{(4)} \subseteq R F^{(5)}. \quad (10)$$

Aus (10) folgt

$$F^{(n)} \subseteq R F^{(n+1)} \quad \text{für } n \geq 4$$

und daher

$$F^{(4)} \subseteq R. \tag{11}$$

(11) ist gleichbedeutend mit  $G^{(4)} = \{1\}$ . Da  $G/G^{(4)}$  offenbar endlich ist, folgt, daß  $G$  endlich ist.  $G$  ist Schursche  $\sigma$ -Gruppe wegen (9) und (11).

Wir wollen jetzt zeigen, daß Schursche  $\sigma$ -Gruppen vom Typ  $a_3 = 1$ ,  $a_5 = 1$  und daher erst recht vom Typ  $a_3 = 1$ ,  $a_7 = 1$  unendlich sein können. Dazu bedienen wir uns der Methode von Golod-Schafarewitsch. Wir müssen von der Zassenhaus-Filtrierung zu allgemeineren Filtrierungen übergehen, die von Lazard [4] untersucht wurden und daher im folgenden als Lazard-Filtrierungen bezeichnet werden :

Der vervollständigte Gruppenring  $F_p[[F]]$  der freien Pro- $p$ -Gruppe  $F$  mit den Erzeugenden  $s_1, \dots, s_d$  über den Körper  $F_p$  mit  $p$  Elementen ist isomorph zum nichtkommutativen Potenzreihenring  $F_p[[x_1, \dots, x_d]]$  in den Unbestimmten  $x_1, \dots, x_d$ . Der Isomorphismus ist gegeben durch die Zuordnung

$$s_i \longrightarrow 1 + x_i \quad \text{für } i = 1, \dots, d.$$

Im folgenden identifizieren wir  $F_p[[F]]$  mit  $F_p[[x_1, \dots, x_d]]$ . In  $F_p[[x_1, \dots, x_d]]$  führen wir eine Bewertung  $\nu$  ein, indem wir für  $\nu(x_i)$  beliebige positive ganze Zahlen  $\tau_i$  nehmen. Für eine beliebige Potenzreihe

$$P(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} \quad \text{setzen wir}$$

$$\nu(P(x_1, \dots, x_d)) = \min \left\{ \sum_{\lambda=1}^k \nu(x_{i_\lambda}) \mid a_{i_1, \dots, i_k} \neq 0 \right\}.$$

Als Lazard-Filtrierung von Typ  $\tau_1, \dots, \tau_d$  bezeichnen wir dann die Filtrierung

$\{F^{(\lambda)} \mid \lambda \in \mathbb{N}\}$  von  $F$ , die durch

$$F^{(\lambda)} = \{h \in F \mid \nu(h-1) \geq \lambda\}$$

gegeben ist

Sei  $G$  eine Pro- $p$ -Gruppe, die durch die Repräsentationen

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

gegeben ist, wobei  $R$  von den Relationen  $r_1, \dots, r_b$  erzeugt werde. Wir definieren  $d_k$  als Anzahl der Erzeugenden  $s_i$  mit  $\nu(s_i - 1) = k$  und  $b_k$  als Anzahl der Relationen  $r_i$  mit  $\nu(r_i - 1) = k$ . Dann gilt

SATZ 4. - Sei  $G$  endlich. Dann ist

$$\varphi(t) = 1 + (b_1 - d_1)t + (b_2 - d_2)t^2 + \dots > 0$$

für  $0 < t < 1$ .

Der Beweis von Satz 4 ist vollständig analog zum Beweis von Satz 7. 20 in [3] (\*).

Beispiel 2. - Sei  $R = (r_1, r_2)$ ,

$$r_1 = s_1^p (s_1, s_2, s_2) (s_1^{-1}, s_2^{-1}, s_2^{-1})^{-1} s_1^p$$

$$r_2 = s_2^p (s_1, s_2, s_1, s_1, s_2) (s_1^{-1}, s_2^{-1}, s_1^{-1}, s_2^{-1}, s_2^{-1})^{-1} s_2^p.$$

Dann ist  $G = F/R$  eine Schursche  $\sigma$ -Gruppe vom Typ  $a_3 = 1, a_5 = 1$ , die für genügend großes  $p$  unendlich ist.

Beweis : Wegen Satz 1 ist  $G$  eine Schursche  $\sigma$ -Gruppe. Man rechnet leicht nach, daß  $r_2 F_6$  nicht in  $(r_1) F_6 / F_6$  enthalten ist (hier bezeichnet  $(r_1)$  den von  $r_1$  erzeugten Normalteiler von  $F$ ). Daher ist  $G$  vom Typ  $a_3 = 1, a_5 = 1$ . Weiter wenden wir Satz 4 an und setzen dazu  $\nu(s_1 - 1) = 1, \nu(s_2 - 1) = \tau$ . Dann gehört

---

(\*) Satz 4 wurde unabhängig und bereits früher von I. V. Andojskij bewiesen.

## *p*-KLASSENKÖRPERTURM

bei  $p \geq 1+2\tau$  zu  $G$  das Polynom  $\varphi(t) = 1 - t^\tau - t + t^{1+2\tau} + t^{3+2\tau}$ . Wir wollen zeigen, daß dieses Polynom für genügend großes  $\tau$  negativ wird. Dazu setzen wir

$$t = 1 - \frac{1}{\tau}.$$

Dann wird

$$\varphi(t) = \frac{1}{\tau} - \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^\tau + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{1+2\tau} + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{3+2\tau} = \psi(\tau)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \psi(\tau) = -e^{-1} + 2e^{-2} < 0, \quad \text{q. e. d.}$$

-:-:-

### LITERATUR

- [1] M. HALL. - The theory of groups, New York, (1959).
- [2] H. KOCH. - Zum Satz von Golod-Schafarewitsch, Math. Nachr. 42, (1969), 321-333.
- [3] H. KOCH. - Galoissche Theorie der  $p$ -Erweiterungen, Berlin, (1970).
- [4] M. LAZARD. - Groupes analytiques  $p$ -adiques. Publ. math. I. H. E. S. 26 (1965), 389-603.

-:-:-

Die vorliegende Arbeit gibt nur einen Teil meines Vortrags in Bordeaux wieder.

Der andere Teil erscheint demnächst im Crelle-Journal.

-:-:-

Helmut KOCH  
108 BERLIN-DDR,  
Mohrenstr. 39, ZIMM  
Akademie der Wissenschaften  
der DDR