

# *Astérisque*

ROBERT CORI

## **Un code pour les graphes planaires et ses applications**

*Astérisque*, tome 27 (1975)

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1975\\_\\_27\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__27__1_0)

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Introduction .....	3
<u>CHAPITRE PREMIER</u>	
<u>CONSTRUCTION D'UN CODE POUR LES CARTES PLANAIRES POINTÉES</u> .....	9
<u>I. Premières définitions</u>	
1) Les hypercartes .....	12
2) Les cartes .....	13
3) Le genre .....	14
<u>II. Représentations des cartes et des hypercartes</u>	
1) Carte topologique .....	19
2) Représentation d'une hypercarte par une carte .....	20
3) Dissections .....	25
<u>III. Les cartes pointées et différents types de cartes</u>	
1) Isomorphismes de deux hypercartes .....	28
2) Cartes pointées .....	28
3) Différents types de cartes .....	28
<u>IV. Codes des hypercartes pointées planaires ayant un seul sommet</u>	
1) Mots emboîtés .....	30
2) Un autre codage : le langage de Luckasciewicz .....	34
3) Énumération des hypercartes pointées ayant un seul sommet ....	37
<u>V. Codes des hypercartes planaires pointées ayant un nombre quelconque de sommets</u>	
1) Propriété préliminaire .....	40
2) Algorithme de numérotation des brins .....	41
3) Démonstration du théorème de codage .....	42
4) Mot associé à une hypercarte pointée .....	44
5) Caractérisation des mots codes .....	46
<u>VI. Le langage codant les cartes planaires pointées</u>	
1) L'opérateur $\nabla_k$ .....	50
2) Le langage .....	50

3) Généralisation .....	53
 <u>CHAPITRE DEUXIÈME</u>	
<u>APPLICATIONS COMBINATOIRES ET ALGÈBRIQUES DU CODAGE</u> .....	57
<u>I. Un théorème de transfert</u>	
1) Géométrie du codage .....	59
2) Deux propriétés fines du code des hypercartes uniformes .....	64
3) Le transfert élémentaire .....	68
4) Hypercartes étiquetées .....	73
5) Le théorème de transfert .....	74
6) Applications à l'énumération .....	76
<u>II. Un code sur quatre lettres</u>	
1) Quelques propriétés des ensembles $B_s$ .....	79
2) Construction d'un langage intermédiaire .....	80
3) Le langage $L$ de Lehman-Lenormand .....	83
4) Premières propriétés du langage $L$ .....	87
5) Le langage $L'$ .....	92
<u>III. Valuations d'une hypercarte sur un groupe</u>	
1) Valuations appliquant sommets et hypercartes sur l'élément neutre de $G$ .....	101
2) Hypercarte planaire associée à un mot neutre d'un groupe défini par générateurs et relations .....	105
 <u>CHAPITRE TROISIÈME</u>	
<u>APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CODAGE</u> .....	115
<u>I. Les séries formelles en variables non commutatives</u>	
1) Définitions, séries rationnelles .....	118
2) Opérateurs contractants, séries algébriques .....	120
3) Image commutative .....	121
4) Transductions .....	123
<u>II. Les transductions <math>d</math>, <math>D</math>, <math>A</math> et <math>\nabla</math></u>	
1) Leurs définitions .....	126
2) Quelques propriétés .....	128
3) Relation entre $\nabla$ , $D$ et les cartes planaires .....	133
<u>III. De certaines équations en <math>d</math> et <math>D</math></u>	
1) Les équations linéaires en $D$ dans $\mathfrak{K}\langle X \rangle$ .....	136
2) Des équations linéaires en $d$ dans $\mathfrak{S}\langle X \rangle$ .....	145

3) Equations dans la semi-algèbre $\mathcal{A} \ll X \gg$ .....	147
4) Une équation non linéaire .....	149
<b>IV. <u>De certaines équations en <math>\Lambda</math> et <math>\nabla</math></u></b>	
1) Une conséquence de la propriété III.10 .....	150
2) Les équations linéaires en $\Lambda$ et $\nabla$ .....	152
3) Equations non linéaires .....	153
<b>V. <u>Applications à l'énumération</u></b>	
1) Les cartes .....	155
2) Les cartes simples .....	157
3) Les arbres. ....	161
 BIBLIOGRAPHIE .....	 164
ABSTRACT .....	169





## I N T R O D U C T I O N

L'intérêt porté aux graphes planaires remonte à la conjecture célèbre des quatre couleurs (que O. DRE [48] attribue à Guthrie) :

"Il est possible de colorier les pays d'une carte de géographie en quatre couleurs, de telle façon que deux pays ayant une frontière commune soient de couleurs différentes".

Malgré les nombreuses contributions, le problème reste ouvert (c. f. H. Whitney W. T. Tutte [74]).

Trouver le nombre de graphes planaires à  $n$  sommets, dont on sait qu'ils sont 4 - coloriables (par exemple ceux qui possèdent un cycle hamiltonien) et le comparer au nombre total de graphes planaires (à  $n$  sommets), tel était le but fixé par W. T Tutte, lorsqu'il entama dans la série des "Census Papers" ([58], [59], [60], [61]) l'énumération des cartes planaires. Ceci lui permit d'énoncer un certain nombre de résultats concer-

nant, par exemple, le "comportement asymptotique" de la conjecture [66].

Mais le but primitif a été rapidement dépassé; l'élégance des formules trouvées, l'algébricité des séries génératrices de pratiquement toutes les classes de graphes comptées, ont de quoi étonner et fournissent un thème de réflexion en dehors de toute référence à la célèbre conjecture. C'est là une des sources de notre travail, et notre premier but a été de montrer que l'algébricité des séries génératrices des "slicings" résultait de l'existence d'une bijection entre ceux-ci et les mots d'un langage algébrique (ou context-free).

Dans un cas particulier, nous avons trouvé un langage quasi rationnel, ce qui implique alors la rationalité des séries génératrices [15].

Les graphes planaires interviennent aussi dans une voie toute différente, il s'agit de l'étude du problème du mot dans un groupe défini par des générateurs et relations. On peut associer à toute présentation d'un tel groupe un 2 - complexe dont les arêtes sont associées aux générateurs et dont les faces sont les relations de définition. A tout mot neutre, on fait correspondre un sous-complexé (graphe) planaire. Ce résultat (dû semble-t-il à Van Kampen [69]) a été utilisé par Lyndon [38], Weinbaum [73], et Schupp [52] pour établir la décidabilité du problème du mot pour différentes classes de groupes. Nous verrons que cette problématique peut se traiter par des méthodes combinatoires analogues à celles mises en jeu pour l'énumération des graphes.

Notons enfin que les nombreuses applications pratiques des graphes planaires (circuits imprimés, molécules organiques ...) ont conduit de nombreux informaticiens à s'intéresser à ces objets. Il s'agit pour eux de résoudre les deux problèmes essentiels suivants :

- reconnaître si un graphe peut être tracé dans le plan sans que ses arêtes se coupent, (Demoucron, Malgrange Pertuiset [18], Lempel [37], Tarjan [57], Mondschein [40] ...)

- trouver une "bonne" représentation de ces graphes en machine, (J. Lederberg [35], contrat graphes de A. Jacques et C. Lenormand).

Plus généralement, le problème des rapports entre la structure spatiale du graphe et sa représentation linéaire en machine peut être envisagé sous l'aspect d'un codage auquel s'appliquent les techniques que nous développons.

Notre exposé se veut unificateur des différentes approches des graphes planaires :

Nous définissons les cartes planaires d'une façon purement combinatoire (due à Edmonds [19] et Gustin [28] et développée par d'autres auteurs Jacques [32], Walsh et Lehman [71], [72], Weinbaum [73]).

Cette définition nous permet de nous placer dans le cadre plus général des hypercartes (couple de permutations  $(\sigma, \alpha)$  engendrant un groupe transitif sur un ensemble fini) que l'on peut considérer comme des représentations topologiques des hypergraphes. Jacques [30] a montré que l'on pouvait

définir un genre  $g(\sigma, \alpha)$  pour un tel couple ; nous définissons donc une hypercarte planaire comme un couple  $(\sigma, \alpha)$  de permutations de genre nul. Notre résultat central, que nous appelons théorème de codage, s'énonce ainsi :

$(\sigma, \alpha)$  est une hypercarte planaire si et seulement si il existe une permutation circulaire  $\mathcal{S}$  telle que

$$g(\alpha, \mathcal{S}) = g(\sigma, \mathcal{S}) = 0$$

Ce théorème a de nombreuses conséquences :

Dans le chapitre premier nous l'utilisons pour construire un codage pour les hypercartes planaires, déduit de deux codages différents (construits par les théorèmes I et II) des hypercartes planaires ne possédant qu'un seul sommet (c'est à dire où l'une des permutations est circulaire). Nous démontrons que dans certains cas l'ensemble des mots codes constitue un langage algébrique (Théorème IV et V).

Dans le chapitre second le théorème de codage nous permet de démontrer un théorème de transfert (Théorème VI), que nous avons utilisé dans notre thèse de 3<sup>e</sup> cycle, pour obtenir une démonstration purement combinatoire de la formule de W. T. Tutte sur les "slicings".

La démonstration que nous donnons ici est nouvelle et elle nous permet d'étendre ce théorème de transfert, sans difficulté supplémentaire, aux hypercartes uniformes (dont tous les cycles de  $\alpha$ , ont même nombre d'éléments).

D'autre part, le théorème de codage nous permet aussi de généraliser les résultats de Lyndon et Weinbaum en définissant des hypercartes opérant sur un groupe  $G$  : on associe alors à tout mot neutre d'un groupe défini par générateurs et relations, une hypercarte planaire dont un des sommets est le mot

neutre en question, et dont tous les autres ainsi que les hyperarêtes, sont des relations de définition. Une réciproque à ce résultat généralisant un théorème de Weinbaum est ainsi donnée (théorèmes VII et VIII).

Enfin dans le troisième chapitre, nous définissons un opérateur  $D$  sur l'ensemble des langages formels ; les langages, construits à partir du théorème de codage et dont les mots codent certaines familles de graphes planaires sont solutions d'équations faisant intervenir  $D$ . Les problèmes d'énumération se ramènent alors à la résolution d'équations intégrodifférentielles dans l'algèbre large du monoïde libre.

C'est à la résolution de ce type d'équations, qui nécessite l'élaboration de méthodes permettant de calculer dans une algèbre non commutative, qu'est consacré ce chapitre. Les théorèmes essentiels sont obtenus dans le cas linéaire (théorème IX et X) : la solution est un langage algébrique lorsque les coefficients sont des langages rationnels. Le passage à l'image commutative nous permet alors de retrouver les résultats classiques de W. T. Tutte et de les étendre.

Notre travail permet ainsi de donner une explication de l'algébricité des séries génératrices de différents types de cartes : elles sont les images commutatives de langages (dont les mots codent les cartes) qui sont algébriques pour l'une des deux raisons suivantes :

- par construction : on part du langage restreint de Dyck sur une lettre et on effectue une suite de transductions rationnelles permettant d'ajouter des lettres.

- comme solution d'une équation linéaire en  $D$  sur l'algèbre large du monoïde libre.

Si notre travail clot, dans une certaine mesure, l'étude de l'algébricité des séries génératrices des cartes planaires, il suggère des directions d'étude qui ne sont ici qu'abordées :

- l'étude systématique des hypergraphes représentables par des hypercartes planaires, une telle famille venant d'être mise en évidence par J. G. Penaud.

- les applications possibles du théorème de codage au problème du mot, ce problème n'est ici qu'effleuré et les premiers résultats sont encourageants.

- l'étude des équations non-linéaires en des opérateurs de type différentiels dans l'algèbre large du monoïde libre.

- enfin le théorème de codage permet de transformer la structure spatiale de carte en une structure linéaire agréable à manipuler en machine. Une première application en est le dessin automatique d'un graphe planaire en connaissant, par exemple, sa matrice d'incidence. Ce premier résultat dans cette direction nous paraît prometteur.

Je tiens à exprimer ici ma très vive reconnaissance à Monsieur M. P. SCHUTZENBERGER. Il est à l'origine de ce travail et les conseils qu'il m'a de nombreuses fois prodigués, ont été pour moi un précieux soutien. Au moment de publier ce mémoire mes pensées vont aussi à mon ami J. RICHARD. Une partie des résultats du troisième chapitre de cette publication sont les fruits d'une collaboration scientifique enrichissante, menée peu avant qu'il disparaisse.

## **Chapitre Premier**

# **CONSTRUCTION D'UN CODE POUR LES CARTES PLANAIREES POINTÉES**



## CODE DES GRAPHE PLANAIRES

Comme l'indique son titre, ce chapitre est essentiellement consacré à la construction du code des cartes et hypercartes planaires.

Dans le paragraphe I nous donnons les définitions combinatoires de ces objets : une hypercarte est un couple de permutations dont le groupe engendré opère transitivement sur un ensemble. C'est une carte lorsque l'une des permutations est une involution sans point fixe. On établit aussi deux propriétés simples du genre (défini par A. Jacques [39]) lorsqu'on supprime une arête ou lorsqu'on multiplie par une transposition disconnectante.

Le paragraphe II relie les définitions combinatoires données aux définitions topologiques classiques, on utilise pour cela un théorème d'Edmonds [19]. On définit aussi une application  $\Gamma$  qui associe à toute hypercarte une carte de même genre. Le genre qui a une signification topologique précise pour une carte (c'est celui de la surface sur laquelle elle est dessinée) se trouve donc défini de manière plus explicite pour les hypercartes. La restriction de  $\Gamma$  aux cartes permet aussi de définir une bijection entre celles-ci et les dissections (ou "slicings") énumérées par W.T. Tutte.

Dans le paragraphe III nous définissons le pointage d'une hypercarte, pointage qui détruit toutes les symétries.

Dans le paragraphe IV nous commençons par construire le code des hypercartes planaires ayant un seul sommet ; deux codes sont utilisés :

- les mots emboîtés
- les mots d'un langage de Lukasiewicz (utilisé par Raney [49])

pour une démonstration de la formule d'inversion de Lagrange-Bürman, voir aussi Schützenberger [55]).

Le paragraphe V est consacré à la démonstration du théorème de codage (voir introduction); nous déduisons alors, des deux codes construits au paragraphe IV, un code pour les hypercartes planaires pointées ayant un nombre quel-

## CONSTRUCTION D'UN CODE

conque de sommets. Ce code généralise celui que nous avons défini pour les cartes ([13], [15], [17]). Nous donnons aussi une caractérisation combinatoire des mots codant les hypercartes planaires.

Enfin, dans le paragraphe VI, nous démontrons que lorsqu'on fixe le nombre de sommets et les longueurs des arêtes le langage de ces codes est un langage algébrique. Ceci a pour conséquence l'algébricité des séries génératrices énumérant ces hypercartes.

I. PREMIÈRES DÉFINITIONS.

1. LES HYPERCARTES.

Une hypercarte est un couple  $(\sigma, \alpha)$  de permutations opérant sur un ensemble fini  $B$  (ensemble de brins), tel que le groupe engendré par  $\{\alpha, \sigma\}$  opère transitivement sur  $B$ . On dit que l'on a affaire à l'hypercarte vide si  $B = \emptyset$ . Les orbites de  $\sigma$  sont appelées les sommets de l'hypercarte ; le degré du sommet  $s$  est le nombre d'éléments de cette orbite. Les orbites de  $\alpha$  sont les hyperarêtes de l'hypercarte.

Un sommet  $s$  et une hyperarête  $a$  sont incidents si  $a \cap s \neq \emptyset$ . Une hyperarête  $a$  est une boucle si elle est incidente à un seul sommet (i.e. s'il existe  $s$  tel que  $a \subset s$ ). Le degré d'une hyperarête est aussi le nombre de ses éléments. Deux sommets sont dits adjacents s'il existe une hyperarête  $a$ , dont on dira qu'elle les joint, incidente aux deux.

Hypercarte duale : A tout hypercarte  $H = (\sigma, \alpha)$  on associe l'hypercarte  $H = (\alpha^{-1}\sigma, \alpha)$ , appelée duale de  $H$ . Remarquons que la transitivité de  $(\sigma, \alpha)$  entraîne celle de  $(\alpha^{-1}\sigma, \alpha)$ . Les orbites de  $\alpha^{-1}\sigma$ , donc les sommets de  $\tilde{H}$ , sont appelés faces de  $H$ .

Une boucle de  $\tilde{H}$  est appelée isthme de  $H$ . Le degré d'une face  $f$  est le nombre d'éléments de l'orbite  $f$ . Une face  $f$  et une hyperarête  $a$  sont incidentes si  $a \cap f \neq \emptyset$ . On dira aussi que l'hyperarête borde la face  $f$ . Deux faces  $f_1$  et  $f_2$  sont dites adjacentes s'il existe une hyperarête  $a$  (dont on dira qu'elle les sépare) incidente à  $f_1$  et  $f_2$ .

Chaîne : Soit  $(\sigma, \alpha)$  un couple de permutations opérant sur un ensemble  $B$ . Une chaîne joignant deux cycles  $s$  et  $s'$  de  $\sigma$  est une suite  $s_1 = s, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n = s'$  de cycles de  $\sigma$  tels que :

pour tout  $i = 1, 2, \dots, n-1$  il existe  $b_i$  appartenant à  $s_i$  et  $b'_i$  à  $s_{i+1}$  qui appartiennent tous deux à un même cycle de  $\alpha$ .

Il est alors clair que la transitivité du groupe engendré par  $\{\sigma, \alpha\}$  est équivalente à la propriété :

pour tout couple  $(s, s')$  de cycles de  $\sigma$  il existe une chaîne joignant  $s$  à  $s'$ .

## CONSTRUCTION D'UN CODE

### 2. LES CARTES.

Une hypercarte  $(\sigma, \alpha)$  est une carte si  $\alpha$  est une involution sans point fixe. Les hyperarêtes sont alors appelées arêtes et ont toutes exactement deux éléments.

Deux arêtes sont dites parallèles si elles joignent deux mêmes sommets.

Multigraphe sous-jacent à une carte : Un multigraphe est la donnée d'un ensemble  $X$  et d'une famille  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  d'éléments du produit cartésien  $X \times X$  dans laquelle un même couple peut figurer plusieurs fois.

A toute carte  $C$  on associe le multigraphe  $G$  défini comme suit : l'ensemble  $X$  est l'ensemble des sommets de  $C$  et à toute arête  $\{b_1, b_2\}$  de  $C$  on fait correspondre les couples  $u = (s_1, s_2)$  et  $u' = (s_2, s_1)$  où  $b_1 \in s_1$  et  $b_2 \in s_2$ . On obtient ainsi la famille  $U$  dont les éléments sont tous les couples  $u$  et  $u'$ .

$C$  est dit le multigraphe sous-jacent à  $C$ .

$C$  est dite représentation de  $G$ .

Si  $C$  n'a ni boucle ni arêtes parallèles, le multigraphe sous-jacent est alors un graphe connexe (ou graphe simple connexe au sens de Berge [3]).

Remarquons que l'on peut définir de la même façon un hypergraphe sous-jacent à une hypercarte.

Pour une carte  $C$  donnée, nous ferons un certain nombre d'opérations dont une des plus simples est la suivante :

Suppression d'une arête : Soit  $\{b_1, b_2\}$  une arête d'une carte  $C$  dont l'ensemble des brins est  $B$ . Sur l'ensemble  $B' = B \setminus \{b_1, b_2\}$ , nous définissons le couple de permutations  $\{\sigma', \alpha'\}$  comme suit :

- $\alpha'$  est la restriction de  $\alpha$  à  $B'$  (ceci est bien défini car  $\{b_1, b_2\}$  est un cycle de  $\alpha$ ) ;
- $\sigma' b = \sigma b$  pour  $b \neq \sigma^{-1} b_1 = b'_1$  et  $b \neq \sigma^{-1} b_2 = b'_2$  ;
- $\sigma' b'_1 = \sigma b_1$  ;  $\sigma' b'_2 = \sigma b_2$  .

Il est clair que  $\sigma'$  est une permutation sur  $B$  obtenue à partir de l'écriture en cycles de  $\sigma$  par suppression de  $b_1$  et  $b_2$  ; néanmoins  $\{\sigma', \alpha'\}$  n'est pas nécessairement une carte, car la transitivité n'est plus assurée.

Une arête d'une carte  $(\sigma, \alpha)$  pour laquelle  $(\sigma', \alpha')$  n'est pas une carte est appelée arête disconnectante.

## CODE DES GRAPHE PLANAIRES

PROPRIÉTÉ I.1. - L'arête  $\{b_1, b_2\}$  est disconnectante pour une carte  $C$  si et seulement s'il n'existe pas de chaîne joignant les sommets  $s_1$  et  $s_2$  ( $b_1 \in s_1$  et  $b_2 \in s_2$ ) dans  $(\sigma', \alpha')$  quand ceux-ci sont aussi sommets de  $(\sigma', \alpha')$ .

- S'il n'existe pas de chaîne dans  $(\sigma', \alpha')$  entre  $s_1$  et  $s_2$  il est alors immédiat que ce couple n'est pas une carte et il est alors clair que  $(\sigma', \alpha')$  se décompose en deux cartes composées l'une des sommets joints à  $s_1$  par une chaîne, l'autre de ceux joints à  $s_2$  par une chaîne.

- S'il existe une telle chaîne,  $(\sigma, \alpha)$  étant une carte, entre deux sommets  $s$  et  $s'$  il existe une chaîne de  $(\sigma, \alpha)$ ; si  $s_1, s_2$  intervient dans cette chaîne, il suffit d'ajouter la chaîne qui les joint dans  $(\sigma', \alpha')$  pour obtenir une chaîne de  $(\sigma', \alpha')$  entre  $s$  et  $s'$ .

Suppression d'un sommet : On supprime un sommet  $s$  en supprimant toutes les arêtes incidentes à ce sommet.

Remarque : Supprimer un sommet de degré 1 est équivalent à la suppression d'une seule arête. D'autre part, d'après la propriété ci-dessus toute arête incidente à un sommet de degré 1 n'est pas disconnectante.

### 3. GENRE.

DÉFINITION. - On appelle genre de la carte  $C = (\sigma, \alpha)$  la quantité  $g(\sigma, \alpha) = g(C) = 1 + \frac{1}{2} [z(\alpha) - z(\sigma) - z(\alpha\sigma)]$ , où pour toute permutation  $\theta$   $z(\theta)$  désigne le nombre de cycles de la permutation  $\theta$ . Ainsi  $z(\sigma)$ ,  $z(\alpha)$ ,  $z(\alpha\sigma)$  sont respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces (puisque  $\alpha = \alpha^{-1}$ ) de la carte  $C$ .

Si  $C$  est la carte vide, nous posons par définition son genre égal à zéro.

Nous verrons au paragraphe II l'explication topologique du genre.

PROPRIÉTÉ I.2. - Lorsqu'on supprime une arête  $\{b, b'\}$  d'une carte  $C$  :

(i) Si cette arête n'est pas disconnectante on obtient une carte  $C'$  telle que  $g(C') = g(C)$  ou bien  $g(C') = g(C) - 1$  ;

(ii) Si cette arête est disconnectante on obtient deux cartes  $C_1$  et  $C_2$  telles que :

$$g(C) = g(C_1) + g(C_2) .$$

Pour démontrer cette propriété, nous avons besoin du lemme suivant dû à Serret [56], (voir aussi Berge [2.]) de démonstration immédiate.

## CONSTRUCTION D'UN CODE

LEMME I.1. - Soit  $\sigma$  une permutation sur un ensemble  $B$ ,  $\tau = (b, b')$  une transposition sur cet ensemble.

1°) Si  $b$  et  $b'$  appartiennent au même cycle de  $\sigma$  alors dans  $\sigma\tau$  et  $\tau\sigma$ ,  $b$  et  $b'$  sont sur des cycles différents, plus précisément :

$$\begin{aligned} \text{si } \sigma &= (b, b_1, \dots, b_i, b', b'_1, \dots, b'_j) \sigma_1 \text{ alors} \\ \sigma\tau &= (b, b'_1, b'_2, \dots, b'_j)(b', b_1, b_2, \dots, b_i) \sigma_1 \text{ et} \\ \tau\sigma &= (b, b_1, \dots, b_i)(b', b'_1, \dots, b'_j) \sigma_1 . \end{aligned}$$

2°) Si  $b$  et  $b'$  appartiennent à deux cycles distincts de  $\sigma$  alors ils appartiennent à un même cycle de  $\sigma\tau$  et  $\sigma'\tau$ , plus précisément :

$$\begin{aligned} \text{si } \sigma &= (b, b_1, \dots, b_i)(b', b'_1, \dots, b'_j) \sigma_1 \text{ alors} \\ \sigma\tau &= (b, b'_1, b'_2, \dots, b'_j, b', b_1, \dots, b_i) \sigma_1 \text{ et} \\ \tau\sigma &= (b, b_1, b_2, \dots, b_i, b', b'_1, \dots, b'_j) \sigma_1 . \end{aligned}$$

Démonstration de la propriété I.2. : Nous distinguerons trois cas suivant que :

- 1°)  $\{b, b'\}$  est incidente à un sommet de degré 1
- 2°)  $\{b, b'\}$  n'est pas un isthme
- 3°)  $\{b, b'\}$  est un isthme incident à des sommets de degré supérieurs à 1.

1°) Remarquons, tout d'abord, que si  $\{b, b'\}$  est incidente à deux sommets de degré 1, puisque  $\{\sigma, \alpha\}$  opère transitivement, la carte  $C$  se réduit à  $\sigma = (b)(b')$ ,  $\alpha = (b, b')$  de genre 0. La carte  $C'$  est alors la carte vide qui est aussi de genre 0. La propriété est bien vérifiée dans ce cas.

Supposons donc que  $\{b\}$  constitue un sommet de degré 1 et que  $b'$  appartient à un sommet de degré supérieur à 1.  $\sigma$  et  $\alpha$  s'écrivent alors :

$$\sigma = (b)(b', b'_1, \dots, b'_j) \sigma_1 \quad \alpha = (b, b') \alpha_1 .$$

Définissons  $\alpha'$  et  $\sigma''$  par  $\sigma'' = (b)(b')(b'_1, b'_2, \dots, b'_j) \sigma_1$  et  $\alpha'' = (b)(b') \alpha_1$ ; il est clair que  $\sigma'' = (b)(b')\sigma' = \sigma(b', b'_j)$ ;  $\alpha'' = (b, b')\alpha'$  et que  $\alpha''\sigma'' = (b)(b')\alpha'\sigma' = (b, b')\alpha\sigma(b', b'_j)$ .

D'après le lemme I.1,  $z(\alpha''\sigma'') = z(\alpha\sigma) + 2$  et donc  $z(\alpha'\sigma') = z(\sigma\sigma)$ . Par conséquent, le genre reste inchangé  $g(C) = g(C')$ .

2°) Si  $\{b, b'\}$  n'est pas un isthme,  $b$  et  $b'$  sont contenus dans deux faces distinctes,  $\alpha\sigma$  s'écrit alors (en remarquant que  $\sigma^{-1}b = b_0$  et  $\sigma^{-1}b' = b'_0$  entraînent  $\alpha\sigma b_0 = b'$  et  $\alpha\sigma b'_0 = b$ ).

*CODE DES GRAPHEs PLANAIRES*

$\alpha\sigma = (b_0, b', b'_1, \dots, b'_j)(b'_0, b, b_1, \dots, b_1) \theta_1$ . Posons  $\sigma'' = \sigma'(b)(b')$ ,  $\alpha'' = \alpha'(b)(b')$ , alors :  $\sigma'' = \sigma(b_0, b)(b'_0, b')$  et  $\alpha'' = (b, b')\alpha$ . D'où :

$$\alpha''\sigma'' = (b)(b')\alpha'\sigma' = (b, b')\alpha\sigma(b_0, b)(b'_0, b') .$$

En appliquant trois fois successives le lemme I.1, on obtient :

$$\alpha''\sigma'' = (b)(b')(b'_0, b'_1, \dots, b'_j, b_0, b_1, \dots, b_j) \theta_1 .$$

Ainsi, on montre que  $s$  et  $s'$  (sommets incidents à  $b$  et  $b'$ ) sont reliés par une chaîne dans  $(\sigma', \alpha')$  (puisque  $b_0$  et  $b'_0$  appartiennent à un même cycle de  $\alpha'\sigma'$ ) et  $(\sigma', \alpha')$  est bien une carte d'après la propriété I.1.

D'autre part,  $z(\alpha') = z(\alpha) - 1$  ;  $z(\alpha'\sigma') = z(\alpha\sigma) - 1$  ;  $z(\sigma) = z(\sigma')$  et donc  $g(C) = g(C')$  .

3°)  $\{b, b'\}$  est un isthme. Notons toujours  $\sigma^{-1}b = b_0$  et  $\sigma^{-1}b' = b'_0$  ;  $\alpha\sigma$  s'écrit alors :  $\alpha\sigma = (b_0, b', b'_1, b'_2, \dots, b'_j, b'_0, b, b_1, b_2, \dots, b_1) \theta_1$  .

Posons :  $\sigma'' = \sigma'(b)(b')$ ,  $\alpha'' = \alpha'(b)(b')$ , on a aussi :

$$\alpha''\sigma'' = (b)(b')\alpha'\sigma' = (b, b')\alpha\sigma(b_0, b)(b'_0, b') .$$

En appliquant le lemme I.1, on obtient cette fois :

$$\alpha''\sigma'' = (b)(b')(b'_0, b'_1, b'_2, \dots, b'_j)(b_0, b_1, b_2, \dots, b_1) \theta_1 ,$$

et on ne peut rien dire sur la transitivité de  $(\sigma', \alpha')$  .

- Si  $\alpha', \sigma'$  est transitif,  $C' = (\sigma', \alpha')$  est une carte et puisque  $z(\alpha') = z(\alpha) - 1$  ;  $z(\sigma') = z(\sigma)$ ,  $z(\alpha'\sigma') = z(\alpha\sigma) + 1$ , on obtient :

$$g(C) = g(C) - 1 .$$

- Sinon,  $B'$  se décompose en  $B' = B'_1 \cup B'_2$ ,  $\sigma$  en  $\sigma_1 \sigma_2$  et  $\alpha$  en  $\alpha_1 \alpha_2$  ;  $(\sigma_1, \alpha_1)$  et  $(\sigma_2, \alpha_2)$  opérant respectivement sur  $B_1$  et  $B_2$ . Alors :  $z(\sigma) = z(\sigma_1) + z(\sigma_2)$ ,  $z(\alpha) = z(\alpha_1) + z(\alpha_2) - 1$  et  $z(\alpha\sigma) = z(\alpha_1\sigma_1) + z(\alpha_2\sigma_2) + 1$ , ce qui implique :

$$g(\sigma_1, \alpha_1) + g(\sigma_2, \alpha_2) = g(C) .$$

La propriété I.2 est ainsi démontrée.

COROLLAIRE 1. - Le genre d'une carte est un entier positif ou nul.

En effet, la carte vide vérifie cette propriété ; la démonstration est ensuite immédiate par récurrence sur le nombre d'arêtes.

## CONSTRUCTION D'UN CODE

COROLLAIRE 2. - Toute arête disconnectante est un isthme ; réciproquement, un isthme est ou bien une arête disconnectante, ou bien une arête qui, supprimée, diminue le genre de la carte.

Ce corollaire résulte immédiatement de la démonstration de la propriété (cas 2°).

DÉFINITION : Une carte est dite planaire si son genre est nul.

Le problème de la caractérisation des multigraphes représentables par une carte planaire est bien connu ; il a été résolu par Kuratowski (cf. Berge [1]). Dans le cas d'un genre  $g$  donné ( $\neq 0$ ), le problème est ouvert.

Genre d'une hypercarte.

La notion de genre a été étendue des cartes aux hypercartes par A. Jacques [30] qui donne la définition suivante :

DÉFINITION : Soit  $H = (\sigma, \alpha)$  une hypercarte d'ensemble de brins  $B$  le genre de  $H$  est donné par :

$$g(H) = 1 + \frac{1}{2} (|B| - z(\sigma) - z(\alpha) - z(\alpha^{-1}\sigma)) .$$

On dira qu'une hypercarte  $(\sigma, \alpha)$  est planaire si  $g(\sigma, \alpha) = 0$ . On peut faire immédiatement les remarques suivantes :

1. - Dans le cas où  $(\sigma, \alpha)$  est une carte  $C$  on a  $|B| = 2z(\alpha)$  et  $\alpha^{-1} = \alpha$  par conséquent  $g(C)$  est bien le genre de la carte  $C$  défini plus haut.

2. - On a  $g(\alpha, \sigma) = g(\sigma, \alpha)$ , en effet :  $z(\alpha^{-1}\sigma) = z(\sigma^{-1}\alpha)$  car  $\sigma^{-1}\alpha$  est l'inverse de  $\alpha^{-1}\sigma$ .

Nous démontrerons dans le paragraphe II que toute hypercarte est représentable par une carte de même genre, par conséquent le genre d'une hypercarte est aussi un entier positif ou nul.

On a aussi la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ I.3. - (Transposition disconnectante).

Soit  $(\sigma, \alpha)$  une hypercarte opérant sur un ensemble  $B$  de brins,  $\tau$  une transposition telle que le couple  $(\sigma\tau, \alpha)$  soit composé de deux hypercartes  $\{\sigma_1, \alpha_1\}$  et  $\{\sigma_2, \alpha_2\}$  opérant sur deux sous-ensembles disjoints  $B_1$  et  $B_2$  (c'est-à-dire :  $B = B_1 \cup B_2$ ,  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ,  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ ,  $\sigma\tau = \sigma_1 \sigma_2$ ). Alors :

$$g(\sigma, \alpha) = g(\alpha_1, \sigma_1) + g(\alpha_2, \sigma_2) .$$



## CODE DES GRAPHES PLANAIRES

On sait, d'après le lemme I.1 que si  $\tau$  est une transposition,  $\sigma\tau$  a un cycle de moins ou un cycle de plus que  $\sigma$  suivant que  $\tau$  échange deux éléments appartenant au même cycle ou à deux cycles distincts de  $\sigma$  . .

Si le couple  $(\alpha, \sigma)$  est transitif et que  $(\alpha, \sigma\tau)$  ne l'est plus, c'est que  $\tau$  échange deux éléments appartenant au même cycle de  $\sigma$  . De plus  $\{\alpha, \sigma\}$  est transitif en même temps que  $(\alpha, \alpha\sigma^{-1})$  et on en déduit que  $\tau$  échange deux brins appartenant à une même face ; on a donc :

$$z(\sigma\tau) = z(\sigma) + 1 \quad ; \quad z(\alpha^{-1}\sigma\tau) = z(\alpha^{-1}\sigma) + 1 .$$

Ainsi, en remarquant que

$$z(\alpha) = z(\alpha_1) + z(\alpha_2) ,$$

$$z(\sigma\tau) = z(\sigma_1) + z(\sigma_2) ,$$

$$z(\alpha^{-1}\sigma\tau) = z(\alpha_1^{-1}\sigma_1) + z(\alpha_2^{-1}\sigma_2) ,$$

on obtient le résultat.

## CONSTRUCTION D'UN CODE

### II. REPRÉSENTATIONS DES CARTES ET DES HYPERCARTES.

#### 1. CARTE TOPOLOGIQUE.

DÉFINITION. - Soit  $\Sigma$  une surface orientable de  $R^3$ , on appelle carte topologique  $C$  sur  $\Sigma$  une décomposition de  $\Sigma$  en trois sous-ensembles disjoints  $S$ ,  $A$  et  $F$  tels que :

- 1°)  $\Sigma = S \cup A \cup F$  ;
- 2°)  $S$  est un ensemble fini de points ;
- 3°)  $A$  est union finie disjointe d'arcs simples ouverts de Jordan dont les extrémités (confondues ou non) appartiennent à  $S$  ;
- 4°)  $F$  est union finie disjointe de domaines simplement connexes dont les frontières sont des réunions d'éléments de  $A$  et  $S$ .

A toute carte topologique on associe une carte, au sens défini plus haut, de la manière suivante :

Carte associée : - L'ensemble  $B$  des brins est composé des couples dont la première composante est un point  $s$  de  $S$  et la deuxième un arc simple  $a$  de  $A$  ayant une extrémité en  $s$  ; si  $a$  a des extrémités confondues, il donne néanmoins naissance à 2 brins, ainsi  $|B| = 2 |A|$ .

- La permutation  $\sigma$  est définie comme suit : soit  $s_i \in S$  et  $B_i$  l'ensemble des brins ayant  $s_i$  comme première composante ; en tournant autour de  $s$  dans le sens positif on définit une permutation circulaire des arêtes incidentes à  $s_i$ , donc des brins de  $B_i$ ,  $\sigma$  est alors égale au produit des permutations  $\sigma_i$  ainsi associées à tous les éléments  $s_i$  de  $S$ .

- Pour tout brin  $b$ ,  $\alpha(b)$  est le brin qui a même deuxième composante que  $b$  ;  $\alpha$  est ainsi une involution sans point fixe.

Le couple  $(\sigma, \alpha)$  définit alors une carte, la transitivité de  $\alpha, \sigma$  étant assurée par le fait que les éléments de  $F$  sont simplement connexes ; les sommets de cette carte sont ainsi en correspondance avec les éléments de  $S$ , les arêtes avec les éléments de  $A$ .

On remarque d'autre part que les faces (cycles de  $\alpha\sigma$ ) correspondent aux éléments (domaines simplement connexes) de  $F$ , chaque orbite de  $\alpha\sigma$  est composée de brins dont l'arête est frontière d'un élément  $f$  de  $F$ . Plus précisément, on peut montrer qu'à la carte topologique duale (cf. par exemple O. Ore [48]) est associée la carte  $(\alpha\sigma, \alpha)$  duale (au sens donné plus haut) de la carte  $(\sigma, \alpha)$ .

Nous avons donc associé à toute carte topologique  $\mathcal{C}$  une carte  $C$  définie de manière purement combinatoire, réciproquement, on doit à Edmonds [19] le résultat suivant :

## CODE DES GRAPHES PLANAIRES

THÉORÈME. - Pour toute carte C il existe une représentation de C par une carte topologique  $\mathcal{C}$  sur une surface  $\Sigma$ , telle que C soit associée à  $\mathcal{C}$  par le procédé défini ci-dessus. De plus, toutes les représentations topologiques de C sont homéomorphes dans  $\mathbb{R}^3$ .

Le genre  $g$  de la carte  $C$  est égal au genre de la surface orientée  $\Sigma$  qui est  $g = 1 + \frac{1}{2} (|A| - |F| - |S|)$ , ce qui donne une signification de cette quantité. Ainsi si  $g = 0$ , la surface  $\Sigma$  est homéomorphe à la sphère et la carte  $\mathcal{C}$  est alors planaire. Dans ce cas, on obtient  $|A| - |F| - |S| + 2 = 0$  qui n'est autre que la relation bien connue d'Euler.

Nous avons ainsi une identité complète entre deux notions :

- la notion de carte, purement combinatoire ;
- la notion de carte topologique.

Dans la suite, nous confondrons ces deux notions, la première étant plus agréable à manier ; c'est elle que nous utiliserons le plus souvent, mais nous n'oublierons pas que lorsque nous parlerons d'une carte, il existe une représentation topologique de celle-ci.

### 2. REPRÉSENTATION D'UNE HYPERCARTE PAR UNE CARTE.

Soit  $H = (\sigma, \alpha)$  une hypercarte définie sur un ensemble  $B$  de brins, nous définissons une carte  $C = \Gamma(H) = (\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha})$  sur un ensemble  $\tilde{B}$  associé à  $H$  et obtenons donc d'après 1), une représentation topologique de  $H$ .

DEFINITION (\*). - L'ensemble des brins  $\tilde{B}$  de  $\Gamma(H)$  est obtenu en construisant 4 exemplaires de l'ensemble  $B$  ; nous posons ainsi  $\tilde{B} = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ . Soient  $u_1, u_2, u_3, u_4$  les bijections de  $B$  respectivement sur  $B_1, B_2, B_3$  et  $B_4$ .

- La permutation  $\tilde{\sigma}$  est donnée par sa décomposition en cycles (tous de longueur 4) :

$$\tilde{\sigma} = \prod_{b \in B} (u_1(b), u_2(b), u_3(b), u_4(b)) .$$

- La permutation  $\tilde{\alpha}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(u_1(b)) &= u_4(\alpha(b)) & \tilde{\alpha}(u_2(b)) &= u_3(\sigma(b)) \\ \tilde{\alpha}(u_3(b)) &= u_2(\sigma^{-1}(b)) & \tilde{\alpha}(u_4(b)) &= u_1(\alpha^{-1}(b)) . \end{aligned}$$

Il est clair que  $\tilde{\alpha}$  est une involution (on vérifie que  $\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}(u_i(b)) = u_i(b)$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ ), d'autre part,  $\tilde{\alpha}$  est sans point fixe puisque  $\tilde{\alpha}(B_1) = B_4$ ,  $\tilde{\alpha}(B_2) = B_3$ .  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha})$  est donc une carte, la transitivité étant assurée par celle de  $\{\sigma, \alpha\}$ .

(\*) Cette construction a été faite indépendamment par A. Jacques (communication personnelle).

**CONSTRUCTION D'UN CODE**

PROPRIÉTÉ II.1. - La carte  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha})$  a même genre que l'hypercarte  $(\sigma, \alpha)$ .

Nous connaissons déjà le nombre de cycles de  $\tilde{\sigma}$  ( $|B|$ ) et de  $\tilde{\alpha}$  ( $2|B|$ ), il nous faut calculer celui de  $\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}$ .

-  $\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}$  opère sur  $B_2$  de la même façon que  $\sigma^{-1}$  opère sur  $B$ , et sur  $B_4$  de la même façon que  $\alpha$  opère sur  $B$ ; en effet :

$$\text{Pour tout } b \text{ de } B : \tilde{\alpha}\tilde{\sigma}u_2(b) = \tilde{\alpha}u_3(b) = u_2(\sigma^{-1}b)$$

$$\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}u_4(b) = \tilde{\alpha}u_1(b) = u_4(\alpha b).$$

-  $\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}$  échange  $B_1$  et  $B_3$  et  $(\tilde{\alpha}\tilde{\sigma})^2$  opère sur  $B_1$  (resp. sur  $B_3$ ) comme  $\alpha^{-1}\sigma$  (resp. comme  $\sigma\alpha^{-1}$ ) opère sur  $B$ , en effet :

$$\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}u_1b = \tilde{\alpha}u_2b = u_3\sigma b ; \tilde{\alpha}\tilde{\sigma}u_3b = \tilde{\alpha}u_4b = u_1\alpha^{-1}(b),$$

$$\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}u_1b = \tilde{\alpha}\tilde{\sigma}u_3\sigma b = \tilde{\alpha}u_4\sigma b = u_1\alpha^{-1}\sigma b$$

$$\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}u_3b = \tilde{\alpha}\tilde{\sigma}u_1\alpha^{-1}b = \tilde{\alpha}u_2\alpha^{-1}b = u_4\sigma\alpha^{-1}b.$$

Par conséquent :

$$z(\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}) = z(\alpha) + z(\sigma) + z(\alpha^{-1}\sigma).$$

Donc :

$$\begin{aligned} g(\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha}) &= 1 + \frac{1}{2} [2|B| - |B| - z(\alpha) - z(\sigma) - z(\alpha^{-1}\sigma)] \\ &= g(\sigma, \alpha). \end{aligned}$$

COROLLAIRE. - Le genre d'une hypercarte est un entier positif ou nul [30].

Exemple d'une hypercarte et de sa carte associée. Soit :

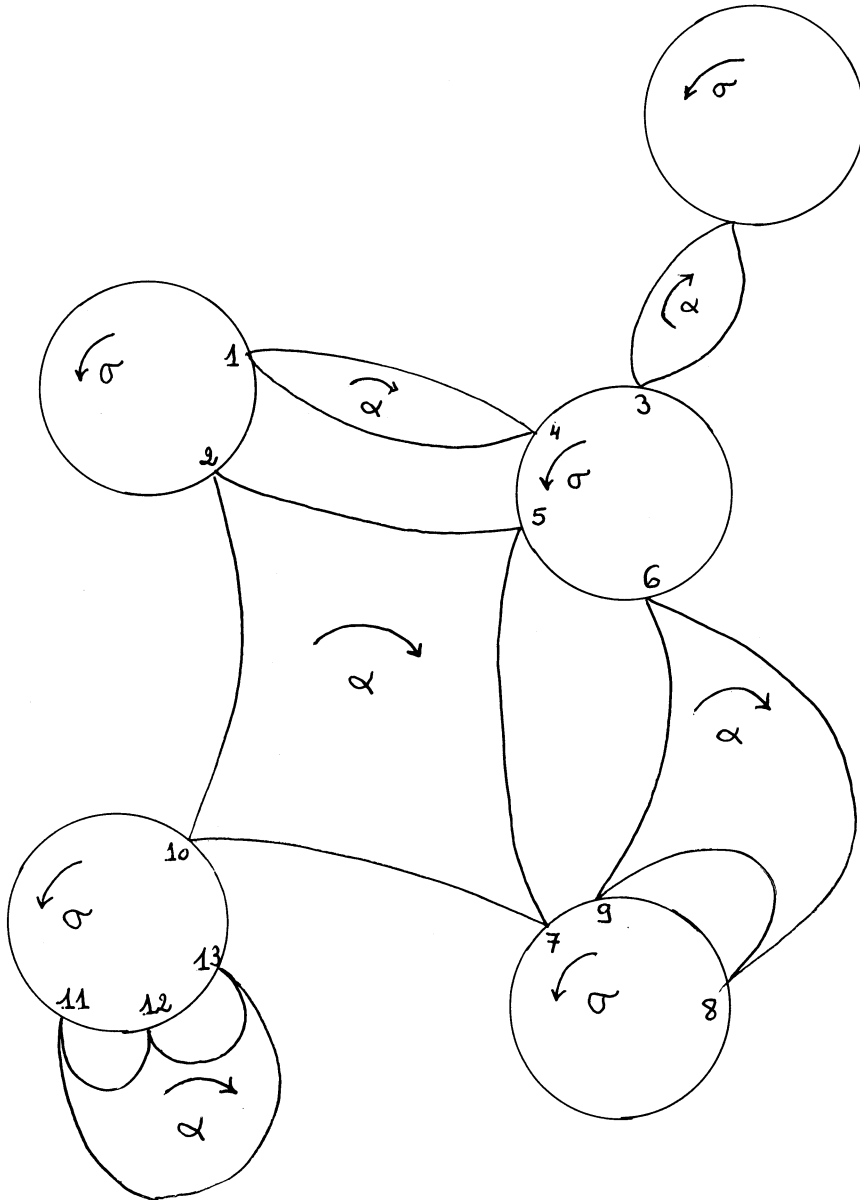
$$\sigma = (1,2)(3,4,5,6)(7,8,9)(10,11,12,13)(14)$$

$$\alpha = (1,4)(2,5,7,10)(3,14)(6,8,9)(11,12,13).$$

Ainsi :

$$\alpha^{-1}\sigma = (1,10,13,7,6,14,3)(2,4)(5,9)(8)(11)(12)$$

$$g(\sigma, \alpha) = 1 + \frac{1}{2} [14-5-5-6] = 0.$$



## CONSTRUCTION D'UN CODE

Propriétés de la carte  $\Gamma(H)$  .

Pour caractériser les cartes  $C$  images par  $\Gamma$  d'une hypercarte  $H$  , il nous faut introduire la notion de graphe de contact d'une famille de faces.

DÉFINITION. - Soit  $F' \subset F$  une famille de faces d'une carte  $C$  , le graphe de contact  $G_{F'}$  de  $F'$  est le graphe dont l'ensemble des sommets est  $F'$  , et tel que  $(f_1, f_2)$  est une arête si et seulement s'il existe un sommet  $s$  tel que  $s \cap f_1 \neq \emptyset$  et  $s \cap f_2 \neq \emptyset$  .

Dans ces conditions nous avons :

PROPRIÉTÉ II.2. - Soit  $H$  une hypercarte et  $\Gamma(H)$  la carte associée.  $\Gamma(H)$  vérifie les propriétés suivantes :

- (1) Tous les sommets de  $\Gamma(H)$  sont de degré 4 ;
- (2) Il existe une partition des faces de  $\Gamma(H)$  en deux sous-familles  $F_1$  et  $F_2$  , telle que toute arête  $a$  sépare deux faces appartenant l'une à  $F_1$  , l'autre à  $F_2$  (ce qui exclut les isthmes)<sup>(\*)</sup> et que le graphe de contact de  $F_1$  est deux coloriable (pour les sommets). Réciproquement, si  $C$  est une carte vérifiant (1) et (2), alors il existe une hypercarte  $H$  telle que  $C = \Gamma(H)$  .

Preuve : (1) est immédiate

(2) on définit la partition de  $F$  en  $F_1 \cup F_2$  par :

Une face  $f$  appartient à  $F_1$  si elle est incluse dans  $B_2$  ou dans  $B_4$  , à  $F_2$  si elle est incluse dans  $B_1 \cup B_3$  . Par définition de  $\tilde{\alpha}$  il est alors clair que toute arête étant de la forme  $(u_1(b), u_4(b'))$  , ou bien  $(u_2(b), u_3(b'))$  , elle sépare bien deux faces de familles différentes.

D'autre part,  $F_1$  peut être décomposée en deux sous-familles  $F_1'$  et  $F_1''$  , une face  $f$  appartient à  $F_1'$  si elle est incluse dans  $B_2$  à  $F_1''$  , si elle est incluse dans  $B_4$  ; cette décomposition revient à colorier le graphe de contact  $G_{F_1}$  en deux couleurs : en effet, une arête de  $G_{F_1}$  correspond à un sommet de  $\Gamma(H)$  où sont en "contact" deux faces l'une incluse dans  $B_2$  , l'autre dans  $B_4$  .

Réciproquement, nous nous donnons une carte  $C$  vérifiant (1) et (2), nous construisons une hypercarte  $H$  , et vérifions ensuite que  $C$  est isomorphe à  $\Gamma(H)$ .

(\*) Une telle carte est dite 2-coloriable pour les faces.

CODE DES GRAPHE PLANAIRES

Construction de H : Soit  $C = (\sigma, \alpha)$  une carte et  $B, S, F = F_1 \cup F_2$ , respectivement l'ensemble des brins, sommets et faces de  $C$ . Pour la commodité de l'exposition, nous dirons que les éléments de  $F_1$  sont des faces noires et ceux de  $F_2$  des faces blanches. La bicoloration du graphe de contact  $G_{F_1}$  de  $F_1$  revient à se donner une partition de  $F_1$  en deux sous-ensembles  $F_1 = F_1' \cup F_1''$ .

Soit  $s$  un sommet de la carte  $C$  par (1)  $s$  est de degré 4, soient donc  $b, \sigma b, \sigma^2 b$  et  $\sigma^3 b = \sigma^{-1} b$  les brins appartenant à ce sommet.

Remarquons que pour tout brin  $b, \alpha b$  et  $\sigma^{-1} b (= \sigma^3 b)$  appartiennent à la même face, puisque  $\alpha \sigma (\sigma^{-1} b) = \alpha b$ . L'arête  $\{b, \alpha b\}$  sépare donc les faces de  $b$  et  $\sigma^{-1} b$  qui ne peuvent être de la même couleur. Il en est évidemment de même pour l'arête  $\{\sigma b, \alpha \sigma b\}$  qui sépare les faces de  $\sigma b$  et  $\sigma^2 b$  qui ne peuvent être de la même couleur. Nous supposons que  $b$  et  $\sigma^2 b$  appartiennent à des faces noires,  $\sigma b$  et  $\sigma^3 b$  à des faces blanches (on peut remplacer  $b$  par  $\sigma b$  si cela est nécessaire).

Du fait de la bicoloration du graphe de contact de  $F_1$ , on déduit que les faces de  $b$  et  $\sigma^2 b$  sont l'une élément de  $F_1'$ , l'autre élément de  $F_1''$ ; nous supposons que  $b$  appartient à une face de  $F_1'$  (on peut échanger  $b$  et  $\sigma^2 b$  si nécessaire). On décompose ainsi l'ensemble  $B$  en quatre sous-ensembles  $B_1, B_2, B_3, B_4$  de la manière suivante :

Pour tout sommet  $s$  de  $S$ , soit  $b_s$  le brin incident à une face blanche de  $F_1'$  (d'après ce qui vient d'être vu, on sait que celui-ci existe, et est unique). Alors posons :

$$b_s \in B_2, \sigma b_s \in B_3, \sigma^2 b_s \in B_4, \sigma^3 b_s \in B_1.$$

De plus, on définit les bijections  $u_1, u_2, u_3, u_4$  de  $s$  dans  $B_1, B_2, B_3, B_4$  :

$$u_1(s) = \sigma^3 b_s; u_2(s) = b_s; u_3(s) = \sigma b_s; u_4(s) = \sigma^2 b_s.$$

- Les brins de  $H$  sont alors les sommets  $S$  de  $C$ .

-  $H = (\sigma_o, \alpha_o)$  où ces deux permutations sont données par :

$\sigma_o(s)$  est le sommet auquel appartient le brin  $\sigma u_2(s)$ , ce que nous notons  $\sigma_o s = \bar{\sigma} \alpha u_2 s$  ;

$\alpha_o(s) = \bar{\sigma} \alpha u_1 s$ , qui est le sommet auquel appartient le brin  $\alpha u_1(s)$ .

Nous avons déjà une partition de  $B$  en 4 sous-ensembles  $B_1, B_2, B_3, B_4$ . Le fait que  $\sigma_o = \sigma$  est immédiat. Il reste à vérifier que  $\tilde{\alpha}_o = \alpha$ . Pour cela, remarquons que tout brin  $b$  de  $C$  appartient à la même face que  $\sigma^{-1} \alpha b$  (car  $\alpha \sigma (\sigma^{-1} \alpha b) = b$ ); par conséquent, par la définition des ensembles  $B_1, B_2, B_3, B_4$

*CONSTRUCTION D'UN CODE*

si  $b$  appartient à  $B_2$ , il en est de même de  $b' = \sigma^{-1} \alpha b$  et  $\alpha b = \sigma b'$  appartient à  $B_3$ .  $\alpha$  échange donc  $B_1$  et  $B_3$ . D'autre part,  $b$  et  $\alpha b$  ne peuvent appartenir à des faces de même couleur, par conséquent si  $b$  appartient à  $B_1$ ,  $\alpha b$  est nécessairement élément de  $B_2$  ou de  $B_4$ , et d'après ce qui a été dit plus haut  $\alpha b$  est élément de  $B_4$ .  $\alpha$  échange  $B_1$  et  $B_4$ .

Par définition de  $\Gamma(H)$  :  $\tilde{\alpha}_0 u_1 s = u_4 \alpha_0 s$  et par définition de  $\alpha_0$ ,  $\alpha_0 s = \bar{\sigma} \alpha u_1 s$ ,  $\alpha u_1 s$  appartenant à  $b_4$  :  $u_4 \bar{\sigma} (\alpha u_1 s) = \alpha u_1 s$ ; on a ainsi  $\alpha_0 u_1 s = \alpha u_1 s$ . On démontrerait de même que  $\tilde{\alpha}_0 u_2 s = \alpha u_2 s$ ,  $\tilde{\alpha}_0 u_3 s = \alpha u_3 s$ ,  $\tilde{\alpha}_0 u_4 s = \alpha u_4 s$ . Ainsi  $\tilde{\alpha}_0 = \alpha$ , et la propriété II.2 est ainsi démontrée.

Remarque : Dans le cas planaire la propriété devient :

Une carte  $C$  planaire est image par  $\Gamma$  d'une hypercarte  $H$ , si et seulement si tous les sommets de  $C$  ont pour degré 4.

3. DISSECTIONS.

La restriction de  $\Gamma$  aux cartes va nous permettre de construire une bijection entre celles-ci et ce que nous appelons les dissections (\*).

DÉFINITION. - Une  $k$ -dissection ( $k \geq 1$ ) est une carte dont tous les sommets sont de degré 3 et telle qu'il existe une famille  $F' \subset F$ , composée de  $k$  faces, telle que pour tout sommet  $s$  il existe une face  $f$  et une seule, élément de  $F'$  vérifiant :

$$f \cap s \neq \emptyset \quad \text{et} \quad |f \cap s| = 1 .$$

PROPRIÉTÉ II.3. - Il existe une bijection  $\beta$  entre les  $k$ -dissections et les cartes ayant  $k$  sommets, d'autre part  $g(\beta(C)) = g(C)$ .

Pour démontrer cette propriété, nous utilisons la notion d'arête homéomorphe que nous définissons et dont nous donnons d'abord quelques propriétés.

Arêtes homéomorphes : Deux arêtes  $a_1 = \{b_1, b'_1\}$  et  $a_2 = \{b_2, b'_2\}$  d'une carte  $C$  sont dites homéomorphes si  $\sigma b_1 = b_2$  et  $\sigma b'_1 = b'_2$ . (On a évidemment  $\alpha b_1 = b'_1$ ,  $\alpha b_2 = b'_2$ ).

Remarquons la propriété suivante :

---

(\*) Celles-ci sont appelées "slicings" par W.T. Tutte



## CODE DES GRAPHES PLANAIRES

- Si  $a_1$  et  $a_2$  sont deux arêtes homéomorphes d'une carte  $C$ , soient  $C'_1$  et  $C'_2$  les cartes obtenues respectivement par suppression de  $a_1$  et de  $a_2$ , alors  $C'_1$  est isomorphe à  $C'_2$  et  $g(C) = g(C_1) (= g(C_2))$ .

Il est clair que l'application  $\lambda$  de  $B \setminus \{b_1, b'_1\}$  sur  $B \setminus \{b_2, b'_2\}$  définie par  $\lambda b_2 = b_1$ ,  $\lambda b'_2 = b'_1$  et qui est l'identité ailleurs réalise une isomorphie de  $C'_1$  sur  $C'_2$ .

D'autre part,  $a_1$  et  $a_2$  étant homéomorphes,  $\{b_1, b'_1\}$  constitue une face,  $\{b_1, b'_1\}$  et  $\{b_2, b'_2\}$  ne sont donc pas des isthmes et si on supprime l'une ou l'autre on obtient une carte de même genre (Propriété I.2).

### Insertion d'une arête homéomorphe à une arête donnée :

Soit  $C = (\sigma, \alpha)$  une carte opérant sur un ensemble  $B$  de brins,  $\underline{a} = (b, b')$  une arête de cette carte ; on obtient la carte  $C_1 = (\sigma_1, \alpha_1)$  par insertion d'une arête homéomorphe à  $\underline{a}$  en posant :

$$B_1 = B \cup \{b_1, b'_1\} \quad (\text{où } b_1, b'_1 \notin B)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma \quad \text{sur } B \setminus \{b, \sigma^{-1}b'\} & \sigma_1 b &= b_1, & \sigma_1 (\sigma^{-1}b') &= b'_1, & \sigma_1 b_1 &= \sigma b, & \sigma_1 b'_1 &= b' \\ \alpha_1 &= \alpha \quad \text{sur } B & \alpha_1 b_1 &= b'_1, & \alpha_1 b'_1 &= b_1. \end{aligned}$$

Il est alors clair que  $C$  est obtenue à partir de  $C_1$  par suppression de l'arête  $a_1$ , d'après ce qui a été vu plus haut :  $g(C) = g(C_1)$ .

Remarquons que les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \sigma_1 b &= b'_1 ; & \alpha_1 \sigma_1 b'_1 &= b \\ \alpha_1 \sigma_1 (\sigma^{-1}b') &= b_1, & \alpha_1 \sigma_1 b_1 &= \alpha \sigma b \\ \alpha_1 \sigma_1 b' &= \alpha \sigma b' \end{aligned}$$

impliquent que  $C_1$  a une face de plus que  $C$  constituée de deux brins  $\{b, b'_1\}$  ; que la face contenant  $b'$  est restée identique ; que dans la face contenant  $b$  on a remplacé ce brin par  $b_1$  ; enfin, que les autres faces de  $C$  (qui n'avaient pas de brins en commun avec  $\{b, b'\}$ ) sont restées inchangées.

### Démonstration de la propriété II.3 :

- Pour une carte  $C$  nous construisons la  $k$ -dissection  $\beta(C)$  par suppression d'arêtes de la carte  $\Gamma(C)$ . Nous étudions donc tout d'abord  $\Gamma(C)$  lorsque  $C$  est une carte (et non une hypercarte). Dans  $\Gamma(C)$  pour tout élément  $b$  de  $B$  l'arête  $\{u_1(b), u_4(\alpha(b))\}$  est homéomorphe à l'arête  $\{u_4(b), u_1(\alpha^{-1}(b))\}$  ; en effet, puisque  $\alpha = \alpha^{-1}$ ,  $\tilde{\sigma} u_1 b = u_4 b$  et  $\tilde{\sigma} u_1 \alpha^{-1} b = u_4 \alpha b$ .

## CONSTRUCTION D'UN CODE

Soit  $\beta(C) = (\hat{\sigma}, \hat{\alpha})$  la carte obtenue en supprimant pour tout élément  $b$  de  $B$  une sur deux des arêtes  $\{u_1(b), u_4 \alpha b\}$  ou  $\{u_4 b, u_1 \alpha b\}$  ; il est alors clair que tous les sommets de  $\beta(C)$  sont de degré 3, d'autre part les faces de  $F'_1$  étant composées de brins de  $B_2$ , elles demeurent faces de  $\beta(C)$  : (on a :  $\hat{\alpha} \hat{\sigma} u_2 b = \hat{\alpha} u_3 b = u_2 \sigma^{-1} b = \tilde{\alpha} \tilde{\sigma} u_2 b$ ). Si on pose  $F' = F'_1$   $F'$  vérifie bien la propriété demandée, la conservation du genre résulte de la remarque précédente.

$\beta$  est ainsi une application de l'ensemble des cartes ayant  $k$  sommets dans l'ensemble des  $k$ -dissections, pour montrer que  $\beta$  est une bijection, nous construisons  $\beta^{-1}$  :

- Soit  $D = (\sigma, \alpha, F')$  une  $k$ -dissection, pour tout sommet  $s$  de  $D$  soit  $b_s$  le brin appartenant à  $s$  et à une face de  $F'$ .

L'arête  $\{\sigma^{-1} b_s, \alpha \sigma^{-1} b_s\}$  n'a alors aucun de ses brins incident à une face de  $F'$ , en effet :

- Si  $\sigma^{-1} b_s$  appartenait à une telle face, le sommet  $s$  aurait deux de ses brins éléments d'une face de  $F'$ .

- Si  $\alpha \sigma^{-1} b_s$  appartenait à une face de  $F'$ , puisque  $\sigma^3 = 1$ ,  $\alpha \sigma^{-1} b_s = \alpha \sigma^2 b_s = \alpha \sigma(\sigma b_s)$  et  $\sigma b_s$  appartiendrait alors à une face de  $F'$  (la même que  $\alpha \sigma^{-1} b_s$ ),  $s$  aurait deux de ses brins incidents à une telle face.

Soit  $D'$  la carte obtenue à partir de  $D$  en insérant une arête homéomorphe à chaque arête de la forme  $\{\sigma^{-1} b_s, \alpha \sigma^{-1} b_s\}$ , il est clair que  $D'$  est une carte dont tous les sommets sont de degré 4.

L'insertion d'une arête homéomorphe à une arête donnée crée une face de degré 2, soit  $F''$  la famille des faces ainsi créées. D'après ce qui vient d'être vu, les faces de  $F'$  ne sont pas modifiées et restent des faces pour  $D'$ .

Posons  $F_1 = F' \cup F''$  et définissons  $F_2$  comme la famille des faces de  $D'$  qui n'appartiennent ni à  $F'$  ni à  $F''$ , on obtient ainsi une bicoloration des faces (on vérifie que toute arête a exactement un de ses brins qui appartient à une face de  $F'$  ou une face de  $F''$ ). D'autre part, la partition  $F_1 = F' \cup F''$  constitue une bicoloration du graphe de contact  $G_{F_1}$ , la carte  $D'$  vérifie les conditions de la propriété II.2. Il existe donc une  $1$ -hypercarte  $H$  telle que  $D' = \Gamma(H)$ ;  $F''$  étant composée de faces toutes de degré 2  $H$  est une carte  $C$ . On vérifie alors facilement que  $\beta(C) = D$ .

## CODE DES GRAPHS PLANAIRES

### III. LES CARTES POINTÉES ET DIVERS TYPES DE CARTES.

Nous nous intéresserons essentiellement dans la suite à l'énumération des cartes planaires pointées au sens que nous définissons ci-dessous ; nous verrons en particulier que le fait de pointer une carte supprime les automorphismes de celle-ci.

#### 1. ISOMORPHISME DE DEUX HYPERCARTES.

Deux hypercartes  $(\sigma_1, \alpha_1)$  opérant sur  $B_1$  et  $(\sigma_2, \alpha_2)$  opérant sur  $B_2$  sont dites isomorphes s'il existe une bijection  $\lambda$  entre  $B_1$  et  $B_2$ , telle que  $\alpha_1 = \lambda^{-1} \alpha_2 \lambda$  et  $\sigma_1 = \lambda^{-1} \sigma_2 \lambda$ . Un automorphisme  $\lambda$  de la carte  $(\sigma, \alpha)$  opérant sur  $B$  est une bijection  $\lambda$  de  $B$  sur lui-même, telle que  $\alpha = \lambda^{-1} \alpha \lambda$ ,  $\sigma = \lambda^{-1} \sigma \lambda$ .

#### 2. CARTES POINTÉES.

Une hypercarte est dite pointée si on distingue un élément  $b^*$  de l'ensemble des brins. Le sommet, l'arête, la face qui contiennent ce brin sont respectivement appelés sommet, arête, face distinguée.

Deux hypercartes pointées  $(\sigma_1, \alpha_1, b_1^*)$  et  $(\sigma_2, \alpha_2, b_2^*)$  sont isomorphes si elles sont isomorphes en tant qu'hypercartes, et si de plus  $\lambda b_1^* = b_2^*$ . Dans la suite, nous énumérerons des cartes planaires pointées vérifiant certaines conditions ; or il est clair que pour une carte pointée il existe une infinité de cartes pointées isomorphes, nous appellerons donc carte pointée un représentant de la classe d'équivalence définie par l'isomorphie.

PROPRIÉTÉ III.1. - Soit  $(\sigma, \alpha, b^*)$  une hypercarte pointée, si  $\lambda$  est un automorphisme de cette hypercarte pointée alors  $\lambda$  est l'identité.

Remarquons que si  $b \in B$  est tel que  $\lambda b = b$ , alors  $\lambda \alpha b = \alpha b$  et  $\lambda \sigma b = \sigma b$  ; en effet  $\lambda \sigma \lambda^{-1} = \sigma$  et  $\lambda \alpha \lambda^{-1} = \alpha$  entraînent  $\lambda \sigma = \sigma \lambda$  et  $\lambda \alpha = \alpha \lambda$ .

Soit alors  $B'$  le sous-ensemble des brins  $b'$  de  $B$  tels que  $\lambda b' = b'$  ;  $B'$  n'est pas vide car il contient  $b^*$ . D'autre part,  $(\sigma, \alpha)$  opérant transitivement sur  $B$ , si  $B' \neq B$  il existe nécessairement  $b'_1$  éléments de  $B'$  tel que  $\alpha b'_1$  ou  $\sigma b'_1$  n'appartienne pas à  $B'$ , or ceci est contraire à la remarque que nous venons de faire

#### 3. DIFFÉRENTS TYPES DE CARTES.

Nous étudierons essentiellement deux types de cartes : celles qui ont peu

## CONSTRUCTION D'UN CODE

d'arêtes (les arbres et les cartes simples), et celles qui en ont beaucoup (les triangulations).

Un arbre est une carte planaire qui n'a qu'une seule face ainsi, d'après la relation donnant le genre, le nombre de ses arêtes est  $k-1$  si  $k$  est le nombre de ses sommets, cette propriété étant évidemment caractéristique.

Une carte simple est une carte pour laquelle il existe une face  $f^*$  incidente à toutes les arêtes (pour toute arête  $a$  ;  $f^* \cap a \neq \emptyset$ ). Il est clair que tout arbre est une carte simple.

Une carte simple pointée est une carte simple où l'image par  $\alpha$  du brin distingué appartient à la face  $f^*$  incidente à toutes les arêtes.

Une carte  $C$  est dite séparable s'il existe une partition de l'ensemble des arêtes en deux parties  $A_1$  et  $A_2$  partition telle qu'il existe un sommet et un seul incident à une arête de  $A_1$  et une arête de  $A_2$ . Un tel sommet d'une carte séparable est appelé point d'articulation. Remarquons qu'une carte  $C$  possédant une boucle  $C$  est séparable, en effet :  $A_1$  est constituée de la seule boucle et  $A_2$  de toutes les autres arêtes.

### Triangulations :

Une triangulation est une carte où une face a été distinguée (elle est appelée face externe) et où toutes les autres faces (et peut-être la face externe aussi) sont de degré 3.

Une triangulation pointée est une triangulation où un brin appartenant à la face externe a été distingué.

On appellera externes les sommets et les arêtes coupant la face externe, internes les autres.

Les triangulations pour lesquelles les formules d'énumération ont été données, sont :

- Les triangulations pointées non séparables (par Mullin [41] et [42]).
- Les triangulations pointées graphiques qui sont non-séparables et qui n'ont pas d'arêtes multiples (par Brown [5]).
- Les triangulations pointées a-diagonales qui sont des triangulations pointées graphiques telles que toute arête est incidente à au moins un sommet interne (par Tutte [58]).

## CODE DES GRAPHE PLANAIRES

### IV. CODES DES HYPERCARTES POINTÉES PLANAIRES AYANT UN SEUL SOMMET.

#### 1. MOTS EMBOÎTÉS.

Dans la suite, nous associons à toute hypercarte pointée un mot qui la code ; nous donnons tout d'abord quelques notations et définitions qui permettent de manipuler ces mots.

Soit  $X$  un alphabet (qui sera un ensemble fini ou infini).  $X^*$  le monoïde libre engendré par  $X$  a pour éléments des mots ; ceux-ci peuvent être considérés comme une application  $f$  de  $[n]$  dans  $X$ .  $n$  est alors la longueur du mot  $f$ . On écrit  $f = f(1).f(2)... f(n)$ . Le mot vide, que nous noterons  $\underline{1}$ , est l'application de  $\emptyset$  dans  $X$ , il a pour longueur zéro.

Un mot  $f$  est facteur du mot  $g$  si  $g$  s'écrit  $g = g'fg''$  où  $g'$  et  $g''$  appartiennent à  $X^*$ . Si  $g' = \underline{1}$ , (resp.  $g'' = \underline{1}$ )  $f$  est facteur gauche (resp. facteur droit) de  $g$ . Un mot  $f$ , de longueur  $n$ , est sous-mot du mot  $g$  si  $g$  s'écrit  $g = g_0f(1)g_1f(2)... g_{i-1}f(i)... f(n)g_n$  où  $g_i \in X^*$  pour  $i = 0, n$ .

Permutation associée à un mot :

Soit  $f$  un mot de longueur  $n$ , nous associons à  $f$  une permutation  $\bar{f}$  de  $\mathfrak{S}_n$  donnée par :

Soit  $R_f$  l'équivalence d'application de  $f$ , c'est-à-dire que  $a R_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ , alors pour tout  $i \in [n]$   $\bar{f}(i)$  est le suivant immédiat de  $i$  dans sa  $R_f$  classe (pour l'ordre naturel des entiers) si  $i$  n'est pas le plus grand élément de celle-ci ;  $\bar{f}(i)$  est le plus petit élément de la  $R_f$  classe de  $i$  si  $i$  est le plus grand élément de celle-ci.

Par exemple, au mot  $x^2y^2zx^3yz^2x$  appartenant à  $[x,y,z]^*$  est associée la permutation  $(1,2,6,7,8,12)(3,4,9)(5,10,11)$  notée comme produit de ses cycles.

On dit qu'une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  présente un excédent  $[23]$  au point  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) si  $\sigma(k) > k$ . La propriété suivante est de démonstration immédiate.

PROPRIÉTÉ IV.1. - La permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  est telle qu'il existe  $f$  vérifiant  $\bar{f} = \sigma$ , si et seulement si elle a  $k$  cycles et présente exactement  $n-k$  excédents.

DÉFINITION : Un mot  $f$  est dit emboîté si pour tout couple de lettres  $x, y \in X \times X$ , le mot  $xyxy$  n'est pas sous-mot de  $f$ .

Il résulte immédiatement de la définition que tout facteur, tout sous-mot d'un mot emboîté est un mot emboîté.

**CONSTRUCTION D'UN CODE**

PROPRIÉTÉ IV.2. - L'ensemble des mots emboîtés sur un alphabet fini X est un langage rationnel.

Si E est ce langage, on a en effet :

$$E = \bigcap_{\substack{(x,y) \in X \times X \\ x \neq y}} (X^* x X^* y X^* x X^* y)$$

LEMME IV.1. - Si f est un mot emboîté, alors il existe une lettre  $x_0$  de X telle que  $f = f'x_0f''$  et  $f'.f'' \in (X \setminus \{x_0\})^*$

Ce lemme se démontre par récurrence sur la longueur du mot f. Si  $f = 1$ , c'est immédiat.

Soit f un mot commençant par la lettre x ; si  $f = x^k$  alors  $x_0 = x$ ,  $f' = f'' = 1$  et le lemme est démontré. Sinon, f s'écrit  $f = x^k g$  où g ne commence pas par x, si g ne contient pas x, alors  $f' = 1$  et  $x = x_0$  ; sinon,  $g = g_1 x g_2$  où  $g_1$  est non vide et ne contient pas x,  $g_1$  est emboîté (comme facteur de f) et est de longueur strictement plus petite que f, alors  $g_1 = g'_1 x^m g''_1$ . Ainsi :  $f = x^k g'_1 x^m g''_1 x g_2$ , et  $x^k g'_1 g''_1 x g_2$  ne contient pas d'occurrence de  $x_0$  puisque  $g'_1 g''_1$  n'en contient pas (hypothèse de récurrence) et que  $g_2$  non plus (sinon  $xx_0xx_0$  serait sous-mot de f).

PROPRIÉTÉ IV.3. - Soit  $f \in X^*$  un mot emboîté de longueur n, alors la permutation  $\bar{F}$  associée à f est telle que l'hypercarte  $(\zeta_n, \bar{F})$  a genre nul.

Nous démontrons cette propriété par récurrence sur le nombre de lettres de l'alphabet X.

Si f appartient à  $\{x\}^*$ , il est alors immédiat que  $\bar{F} = \zeta_n$ , ainsi  $\zeta_n^{-1} \zeta_n = 1$  et  $g(\zeta_n, \zeta_n) = 1 + \frac{1}{2}(n-1-1-n) = 0$ .

Soit f élément de  $X^*$ , d'après le lemme 1 il existe  $x_0$  tel que  $f = f_1 x_0^m f_2$  et  $x_0$  n'apparaît pas dans  $f_1 f_2$ . Ainsi  $\bar{F} = \alpha_1 (i+1 \dots i+m)$  où i est la longueur de  $f_1$ . Soit  $\lambda$  la bijection croissante de  $[n-m]$  sur  $\{1 \dots i\} \cup \{i+m+1 \dots n\}$ , ainsi  $\overline{f_1 f_2} = \lambda^{-1} \alpha_1 \lambda$ . Soit d'autre part  $\tau$  la transposition qui échange i et  $i+m$  ; on constate alors que :

$$\zeta_m^\tau = (1, \dots, i, i+m+1) (i+1 \dots i+m) = \sigma_1 (i+1 \dots i+m) = \sigma_1 \sigma_2$$

et  $\sigma_1$  vérifie  $\zeta_{n-m} = \lambda^{-1} \sigma_1 \lambda$ . On peut alors appliquer la propriété I.3 sur les transpositions disconnectantes, on obtient :

$$g(\zeta_n, \bar{F}) = g(\sigma_1, \sigma_1) + g(\sigma_2, \sigma_2)$$

**CODE DES GRAPHE PLANAIRES**

$g(\sigma_2, \sigma_2) = 0$  par définition du genre. D'autre part :

$$g(\sigma_1, \alpha_1) = g(\lambda \zeta_{n-m} \lambda^{-1}, \lambda \overline{f_1 f_2} \lambda^{-1}) = g(\zeta_{n-m}, \overline{f_1 f_2}) .$$

$f_1 f_2$  est un mot emboité, comme sous-mot de  $f$ , et d'après l'hypothèse de récurrence  $g(\zeta_{n-m}, \overline{f_1 f_2}) = 0$ . La propriété est ainsi démontrée.

On peut démontrer une réciproque à cette propriété, réciproque qui s'énonce :

PROPRIÉTÉ IV.4. - Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  telle que  $g(\zeta_n, \sigma) = 0$  ; alors il existe un mot  $f$  tel que  $\overline{f} = \sigma$  , de plus  $f$  est un mot emboité.

Nous démontrons d'abord les deux lemmes suivants :

LEMME IV.2. - Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  telle que  $g(\zeta_n, \sigma) = 0$  ; soit  $a$  un élément tel que  $a < \sigma a$  , alors tout élément  $b$  tel que  $a < b < \sigma a$  vérifie :

$$a < \sigma b < \sigma a .$$

Preuve du lemme :

Notons  $\tau$  la transposition qui échange  $\sigma a - 1$  et  $a$  et examinons le couple  $(\zeta_n \tau, \sigma)$ , on a :

$$\zeta_n \tau = (1, 2, \dots, a, \sigma a, \dots, n)(a+1, a+2, \dots, \sigma a-1) .$$

Ainsi :  $z(\zeta_n \tau) = 2 = z(\zeta_n) + 1$ .

D'autre part,  $\sigma^{-1} \zeta_n (\sigma a-1) = a$ ,  $\tau$  échange donc deux éléments d'un même cycle de  $\sigma^{-1} \zeta_n$  et d'après le lemme I.1 :  $z(\sigma^{-1} \zeta_n \tau) = z(\sigma^{-1} \zeta_n) + 1$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} [n - z(\sigma) - z(\zeta_n \tau) - z(\sigma^{-1} \zeta_n \tau)] &= \frac{1}{2} [n - z(\sigma) - z(\zeta_n) - z(\sigma^{-1} \zeta_n)] = \\ &= g(\zeta_n, \sigma) - 1 = -1 . \end{aligned}$$

Le couple  $(\zeta_n \tau, \sigma)$  n'est pas une hypercarte et n'est donc pas transitif sur  $[n]$ , ainsi d'après la décomposition en cycles de  $\zeta_n \tau$   $\{a+1, a+2, \dots, \sigma a-1\}$  est réunion de cycles de  $\sigma$  et le lemme est démontré.

LEMME IV.3. - Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $g(\zeta_n, \sigma) = 0$  et soit  $a$  tel que  $\sigma a < a$  , alors tout élément  $b$  tel que  $\sigma a \leq b \leq a$  vérifie  $\sigma a \leq \sigma b \leq a$  .

Notons toujours  $\tau$  la transposition qui échange  $a$  et  $\sigma a-1$ , on obtient cette fois-ci :

$$\zeta_n \tau = (1, 2, \dots, \sigma a-1, a+1, \dots, n)(\sigma a, \sigma a+1, \dots, a-1, a)$$

et puisque  $\zeta_n \tau, \sigma$  n'est pas une hypercarte  $\{\sigma a, \dots, a\}$  est réunion de cycles de  $\sigma$  et le lemme est démontré.

## CONSTRUCTION D'UN CODE

Preuve de la propriété IV.4 :

Démontrons tout d'abord que si  $\sigma$  a  $k$  cycles, elle a exactement  $n-k$  excédents.

Soit  $\{a, \sigma a, \sigma^2 a, \dots, \sigma^i a = \sigma^{-1} a\}$  un cycle de  $\sigma$ , il est clair qu'il existe au moins un élément  $b$  tel que  $b < \sigma b$ , montrons qu'il n'en existe qu'un. Soit en effet,  $c$  tel que  $c < \sigma c$  appartenant à ce cycle.

D'après le lemme IV.3,  $\sigma^2 b, \sigma^3 b, \dots, \sigma^i b$  sont tous compris entre  $b$  et  $\sigma b$ , or  $c$  est de la forme  $\sigma^j b$  et donc  $b \leq c$ . Puisque  $b$  et  $c$  jouent exactement le même rôle on a aussi  $c \leq b$  ainsi  $b = c$ .

Dans chaque cycle de  $\sigma$  il existe un élément  $b$  et un seul tel que  $b < \sigma b$ , le nombre d'excédents de  $\sigma$  est  $n-k$ .

Il existe donc un mot  $f$  tel que  $\bar{f} = \sigma$ , le fait que  $f$  est un mot emboité résulte alors immédiatement du lemme IV.2 et la propriété IV.4 est ainsi démontrée.

Nous avons donc associé à un mot emboité une permutation  $\sigma$  telle que  $g(\zeta_n, \sigma) = 0$ , mais plusieurs mots différents peuvent donner naissance à la même permutation si ceux-ci ne diffèrent que par une permutation des lettres de l'alphabet  $X$ .

Pour que l'application qui à un mot emboité  $f$  associe la permutation  $\bar{f}$  soit une bijection nous définissons des objets plus restreints : les emboitements.

DÉFINITION. - Pour tout nombre  $k \geq 0$ , soit  $X_k$  l'alphabet fini,

$X_k = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ ; un mot emboité  $f \in X_k^*$  est un emboitement si :

- (i)  $f$  commence par  $x_0$ ,  $f \in x_0 X_k^*$
- (ii) pour tout couple  $i, j$  vérifiant  $k \geq i > j > 0$  la première occurrence de  $x_i$  dans  $f$  précède la première occurrence de  $x_j$ .

Remarquons que (ii) implique que toutes les lettres de  $X_k$  apparaissent dans  $f$ .

Nous avons ainsi :

THÉORÈME 1. - Pour tout entier  $k$ , il existe une bijection entre les hypercartes planaires pointées ayant 1 sommet et  $k$  hyperarêtes et les emboitements de  $X_k^*$ ; ceux-ci constituant un langage rationnel.



## CODE DES GRAPHES PLANAIRES

Soit  $(\zeta, \alpha, b^*)$  une telle hypercarte opérant sur un ensemble  $B$  ( $b^* \in B$ ), soit  $n = |B|$ , il existe une bijection  $\lambda$  unique de  $[n]$  dans  $B$  telle que  $\lambda 1 = b^*$  et  $\lambda^{-1} \zeta \lambda = \zeta_n$ . Posons  $\sigma = \lambda^{-1} \alpha \lambda$ , on a  $g(\zeta_n, \sigma) = g(\zeta, \alpha) = 0$ . D'autre part l'hypercarte pointée  $(\zeta_n, \sigma, 1)$  est isomorphe à  $(\zeta, \alpha, b^*)$ , c'est donc la même hypercarte pointée d'après la convention que nous avons adoptée. On associe donc bijectivement un emboitement à toute hypercarte planaire pointée. Le fait que les emboitements constituent un langage rationnel résulte alors immédiatement de la propriété IV.2, puisque si on note  $E'$  les emboitements de  $X_k^*$  et  $E$  les mots emboîtés, on a :

$$E' = E \cap x_0 \cdot \{x_0\}^* \cdot x_k \{x_0, x_k\}^* \cdot x_{k-1} \cdot \{x_0, x_k, x_{k-1}\}^* \dots x_2 \{x_0 x_k \dots x_2\}^* \cdot x_1 x_k^* .$$

### 2. UN AUTRE CODAGE : LE LANGAGE DE LUKASIEWICZ.

DÉFINITION. - Soit  $X_\infty$  l'alphabet :  $X_\infty = \{\bar{x}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , et soit  $\varphi$  le morphisme de  $X_\infty^*$  dans l'anneau  $Z$  des entiers relatifs, considéré comme un monoïde pour l'addition, qui est tel que  $\forall i \geq 0 \quad \varphi(x_i) = i$ , et  $\varphi(\bar{x}) = 1$ .  $L_\infty$  est le langage donné par :

$$f \in L_\infty \Leftrightarrow \varphi f = 0 \text{ et } \varphi(f') \geq 0 \text{ pour tout facteur gauche } f' \text{ de } f .$$

PROPRIÉTÉ IV.6. - Le langage  $L_\infty$  vérifie la relation suivante :

$$L_\infty = 1 + x_0 L_\infty + x_1 L_\infty \bar{x} L_\infty + \dots + x_n L_\infty (\bar{x} L_\infty)^n + \dots$$

1°) Il est clair que le mot vide  $1$  appartient à  $L_\infty$ . Soit  $f$  un mot de  $x_n L_\infty (\bar{x} L_\infty)^n$ . Ainsi  $f$  s'écrit :

$$f = x_n f_1 \bar{x} f_2 \bar{x} f_3 \dots f_n \bar{x} f_{n+1} \text{ où } f_i \in L_\infty \text{ pour } i = 1, \dots, n+1 .$$

$$\varphi(f) = n + \varphi(f_1) - 1 + \varphi(f_2) - 1 + \dots + \varphi(f_n) - 1 + \varphi(f_{n+1}) = 0 .$$

D'autre part pour tout facteur gauche  $f'$  de  $f$  on a :

$$f' = x_n f_1 x f_2 \dots \bar{x} f_i^! \text{ où } f_i^! = f_i^! f_i^{\prime\prime} \in L_\infty .$$

Donc  $\varphi(f_i^!) \geq 0$  et  $\varphi(f') = n + \varphi(f_i^!) - i + 1 \geq 0$  car  $i \leq n+1$ . Ainsi  $f$  appartient à  $L_\infty$ .

2°) Soit  $f$  un mot de  $L_\infty$ , différent du mot vide.  $f$  ne peut avoir  $\bar{x}$  comme première lettre car  $\varphi(\bar{x}) = -1 < 0$ , par conséquent il existe  $n$  tel que  $f = x_n g$ . Et  $\varphi(f) = 0$  implique  $\varphi(g) = -n$ .

## CONSTRUCTION D'UN CODE

Soit  $g_1$  le facteur gauche de  $g$  le plus long ayant une image par  $\varphi$  positive ou nulle, ainsi que tous ses facteurs gauches. Alors il est clair que  $g = g_1 \bar{x} h_1$ , (sinon  $g_1 x_i$  serait un facteur gauche de  $g$  plus long vérifiant la propriété) et que  $\varphi(g_1) = 0$  (sinon  $g_1 \bar{x}$  serait un facteur gauche de  $g$  plus long vérifiant la propriété), on obtient ainsi :

$$\varphi(h_1) = \varphi(g) + 1 = -n + 1 .$$

Soit  $g_2$  le facteur gauche de  $h_1$  le plus long ayant, ainsi que tous ses facteurs gauches, une image par  $\varphi$  positive ou nulle on obtient de la même façon  $h_1 = g_2 \bar{x} h_2$  et  $\varphi(h_2) = -n + 2$  .

On peut poursuivre jusqu'à :

$$f = x_n g_1 \bar{x} g_2 \bar{x} \dots g_n \bar{x} h_n$$

$g_1, g_2, \dots, g_n$  appartiennent à  $L_\infty$  par construction, reste à montrer que  $h_n$  y appartient.

$$\varphi(h_n) = \varphi(f) - \varphi(x_n) - n - \sum_{i=1}^n \varphi(g_i) = 0 .$$

A tout facteur gauche  $h'_n$  de  $h_n$  correspond le facteur gauche  $f' = x_n g_1 \bar{x} \dots g_n \bar{x} h'_n$  de  $f$  et  $\varphi(f') = \varphi(h'_n)$ , par conséquent  $\varphi(h_n) \geq 0$  et  $h_n$  appartient à  $L_\infty$  .

La propriété est ainsi démontrée.

THÉORÈME 2. - Il existe une bijection  $b$  entre les hypercartes  $H$  planaires pointées opérant sur  $[n]$  ayant un seul sommet et les mots de  $L_\infty$  de longueur  $n$ , de plus si  $H$  possède  $j$  arêtes de degré  $i$ ,  $b(H)$  possède  $j$  occurrences de  $x_{i-1}$ .

Nous avons déjà établi une bijection entre ces hypercartes et les emboitements (théorème 1), il reste à établir une bijection  $b'$  entre ces mots et les mots du langage  $L_\infty$  .

Soit  $f \in X_k^*$  un emboitement, construisons  $g = B'(f)$  comme suit : pour toute lettre  $x$  de  $X_k$  soit  $|f|_x$  le nombre d'occurrences de  $x$  dans  $f$  ; alors  $g(m) = x_i$  si et seulement si  $f(m) = x$  vérifie  $|f|_x = i+1$  et  $f(m)$  est la première occurrence de  $x$  dans  $f$  ( $f(m') \neq x$  pour  $m' < m$ ),  $g(m) = \bar{x}$  sinon.

$g$  est bien un mot de  $L_\infty$  puisque :

$$\varphi(g) = \sum_{j=0, k} (|f|_{x_j} - 1) - \sum (|f|_{x_j} - 1) .$$

**CODE DES GRAPHES PLANAIRES**

Le premier terme correspond à la première occurrence de la lettre  $x_j$  dans  $f$ , soit  $\varphi(x_j |f|_{x_j} - 1)$ , le second terme a la somme des  $\varphi(\bar{x})$  correspondant aux autres occurrences de  $x_j$  dans  $f$ , (il y en a évidemment  $|f|_{x_j} - 1$ ).

Il est clair d'autre part, de par la construction de  $g$ , que tout facteur gauche de  $g$  a une image par  $\varphi$  positive ou nulle.

Nous définissons  $b'^{-1}(g)$  pour tout mot  $g$  de  $L_\infty$  par récurrence sur  $|g|$ .

Si  $g = 1$ ,  $b'^{-1}(1) = 1$ .

Si  $|g| > 0$ ,  $g$  se décompose (par la propriété IV.6) en :

$$g = x_n g_1 \bar{x} g_2 \dots \bar{x} g_{n+1} .$$

$b'^{-1}(g)$  est alors donné par :

$$b'^{-1}(g) = x_0 b_1'^{-1}(g_1) x_0 b_2'^{-1}(g_2) \dots x_0 b_{n+1}'^{-1}(g_{n+1}) ,$$

où  $b_i'^{-1}$  est la bijection définie à partir de  $b'^{-1}$  par le changement d'alphabet qui a la propriété suivante :

Si  $x_{i_1}$  apparait dans  $b_i'^{-1}(g_i)$  et  $x_{j_1}$  dans  $b_{i+1}'^{-1}(g_{i+1})$ , alors  $i_1 > j_1$  et  $x_0$  n'apparait dans aucun des  $b_i'^{-1}(g_i)$ .

Il est alors clair que  $f = b'^{-1}(g)$  est un emboitement et que  $b'(f) = g$ .

Exemple : Soit  $(\mathcal{C}_{15}, \sigma, 1)$  l'hypercarte planaire pointée donnée par :

$$\sigma = (1,3,12) (2) (4,7,8,9,10) (5,6) (11) (13,14,15) ;$$

alors l'emboitement associé est :

$$x_0 x_5 x_0 x_4 x_3 x_3 x_4 x_4 x_4 x_4 x_2 x_0 x_1 x_1 x_1$$

et le mot de  $L_\infty$  :

$$x_2 x_0 \bar{x} x_4 x_1 \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x} .$$

COROLLAIRE 1. - Pour toute famille finie d'entiers  $I = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ , il existe une bijection entre les hypercartes planaires pointées ayant un seul sommet et dont les hyperarêtes ont pour degré des éléments de  $I$  et les mots d'un langage algébrique.

En effet, ces hypercartes sont en bijection par  $b$  avec le langage  $L_I$  vérifiant :

$$L_I = L_\infty \cap X_I^* \quad \text{où} \quad X_I = \{\bar{x}, x_{k_1-1}, \dots, x_{k_n-1}\}$$

qui vérifie l'équation :

$$L_I = 1 + \sum_{i=1, \dots, n} x_{k_i-1} L_I(\bar{x} L_I)^{k_i-1} .$$

## CONSTRUCTION D'UN CODE

COROLLAIRE 2. - Il existe une bijection entre les cartes planaires pointées ayant 1 sommet et les mots du langage restreint de Dyck qui vérifie :

$$L_0 = 1 + x_1 L_0 \bar{x} L_0 .$$

Ceci découle du corollaire 1 en posant  $I = \{2\}$ .

### 3. ÉNUMÉRATION DES HYPERCARTES PLANAIRES POINTÉES AYANT UN SEUL SOMMET.

La bijection réalisée entre ces hypercartes et  $L_\infty$  va nous permettre de donner quelques résultats d'énumération :

PROPRIÉTÉ IV.7. - Le nombre d'hypercartes planaires pointées ayant un sommet et (pour  $i=1, \dots, k$ )  $p_i$  hyperarêtes de degré  $i$  est donné par :

$$\frac{n!}{\prod_{i=0, n} p_i!} \quad \text{où } n = \sum_{i=1, k} i p_i \quad \text{et} \quad p_0 = 1 + \sum_{i=1, k} (i-1) p_i .$$

La démonstration de cette propriété est obtenue en modifiant une démonstration due à Raney [49] .

Elle résulte des propriétés (i) et (ii) suivantes :

- (i). Pour tout mot  $f$  de  $X_\infty^*$  tel que  $\varphi(f) = -1$ , il existe un mot  $g$  unique de  $L_\infty$  tel que  $f = f_1 \bar{x} f_2$  et  $g = f_2 f_1$  ;
- (ii). Pour tout mot  $g$  de  $L_\infty$  il existe  $|g|+1$  mots  $f$  différents, de  $X_\infty^*$  tels que  $\varphi(f) = -1$  et  $g = g_1 g_2$  ;  $f = g_2 \bar{x} g_1$  .

Preuve de (i) : Soit  $f$  tel que  $\varphi(f) = -1$ , et soit  $f_0$  le facteur gauche de  $f$  le plus court, parmi les facteurs gauches  $h$ , tels que  $\varphi(h)$  soit minimal. Il est alors clair que  $f_0 = f_1 \bar{x}$ , car si  $f_0 = f_1 x_i$ ,  $\varphi(f_1) = \varphi(f_0) - \varphi(x_i) \leq \varphi(f_0)$  qui contredit soit la minimalité de  $\varphi(f_0)$  si  $i > 0$ , soit le fait que  $f_0$  est le plus court si  $i = 0$ .

Montrons que on pose  $f = f_1 \bar{x} f_2$ , alors  $g = f_2 f_1$  appartient à  $L_\infty$  :  $\varphi(g) = \varphi(f_2) + \varphi(f_1) = \varphi(f) + 1 = 0$ . De plus, si  $f'$  est un facteur gauche de  $g$  tel que  $\varphi(f') < 0$ , deux cas se présentent :

-  $f'$  est facteur gauche de  $f_2$ , alors  $f_2 = f' f'_2$  et  $f = f_1 \bar{x} f' f'_2$ , ce qui implique  $\varphi(f_1 \bar{x} f') < \varphi(f_1 \bar{x})$  qui contredit la minimalité de  $\varphi(f_1 \bar{x})$  ;

-  $f'$  est plus long que  $f_2$ , alors  $f' = f_2 f'_1$  et  $f = f'_1 f_1 \bar{x} f_2$ ,  $\varphi(f) = -1$  et  $\varphi(f') < 0$  impliquent alors  $\varphi(f'_1) + \varphi(f_1) + \varphi(f_2) = 0$  et  $\varphi(f'_1) > 0$ , ce qui entraîne  $\varphi(f_1 \bar{x}) = \varphi(f'_1) + \varphi(f_1) - 1 \geq \varphi(f_1)$  et qui contredit ou bien la minimalité de  $\varphi(f_1 \bar{x})$  ou le fait que  $f_1 \bar{x}$  est le plus court.

CODE DES GRAPHE PLANAIRES

Unicité de la décomposition  $f = f_1 \bar{x} f_2$ . Soit  $f = f_1' \bar{x} f_2'$  tel que  $f_2' f_1'$  appartienne à  $L_\infty$ .

- Si  $f_1'$  est plus long que  $f_1$ , alors :  $f_1' = f_1 \bar{x} f_1''$  et  $f_2' f_1' = f_2' f_1 \bar{x} f_1''$ . La minimalité de  $f_1$  implique alors  $\varphi(f_1) \leq \varphi(f_1')$  et par conséquent  $\varphi(f_1'') > 0$ , donc  $\varphi(f_1' f_1 \bar{x}) < 0$ , ce qui est contraire à  $f_2' f_1' \in L_\infty$ .

- Si  $f_1'$  est plus court que  $f_1$ , alors :  $f_1 = f_1' \bar{x} f_1''$  et  $f_2' = f_1'' \bar{x} f_2$ . La définition de  $f_1$  implique  $\varphi(f_1) < \varphi(f_1')$ . Soit  $\varphi(f_1') \leq 0$ ,  $f_2' \bar{x}$  ne peut alors être facteur gauche du mot  $f_2' \bar{x} f_1'$  de  $L_\infty$ .

Par conséquent :  $f_1' = f_1$  et  $f_2' = f_2$ .

Preuve de (ii) : Soit  $g_1 g_2$  une décomposition de  $g$ , on a bien  $\varphi(g_2 \bar{x} g_1) = -1$ . D'autre part, deux tels mots ne peuvent être égaux car si on suppose :

$$g = g_1 g_2 = g_1' g_2' \quad \text{et} \quad f = g_2 \bar{x} g_1 = g_2' \bar{x} g_1' ,$$

$g_2$  est (par exemple) plus court que  $g_2'$ , ainsi :  $g_2' = g_2 \bar{x} g_2''$  et  $f = g_2 \bar{x} g_1 = g_2 \bar{x} g_2'' \bar{x} g_1'$ , ce qui implique  $g_1 = g_2'' \bar{x} g_1'$  et  $g$  est donné par les deux expressions :

$$g = g_2'' \bar{x} g_2' g_2 = g_1' g_2 \bar{x} g_2'' .$$

Si  $\varphi(g_2'') \leq 0$ , alors  $g_2'' \bar{x}$  est un facteur gauche de  $g$  d'image par  $\varphi$  négative si  $\varphi(g_2'') > 0$ ,  $g_1' g_2 \bar{x}$  est facteur gauche de  $g$  d'image par  $\varphi$  négative.

Preuve de la propriété IV.7 :

Soient  $h_1(p_1, p_2, \dots, p_k)$  le nombre de mots de  $L_\infty$  ayant  $p_i$  occurrences de  $x_{i-1}$  pour  $i=1, \dots, k$  ; (c'est d'après le théorème 2, le nombre d'hypercartes planaires pointées à un seul sommet ayant  $p_i$  hyperarêtes de degré  $i$ ) et soit  $h_1^*(p_1, p_2, \dots, p_k)$  le nombre de mots  $f$  de  $X_\infty^*$  ayant  $p_i$  occurrences de  $x_{i-1}$  pour  $i=1, \dots, k$  et tels que  $\varphi(f) = -1$ . Ceux-ci ont pour longueur  $n+1 = (\sum_{i=1, k} i p_i) + 1$  et ont  $p_0 = 1 + \sum_{i=1, k} (i-1) p_i$  occurrences de  $\bar{x}$ .

D'après (i) et (ii), on a :

$$(n+1)h_1 = h_1^* .$$

D'autre part,  $h_1^*$  est le nombre des mots de  $X_\infty^*$  ayant  $p_i$  occurrences de  $x_{i-1}$  (pour  $i > 0$ ) et  $p_0$  occurrences de  $\bar{x}$  ; ce nombre est donc :

$$h_1^* = \frac{(n+1)!}{\prod p_i!}$$

et la proposition IV.7 est démontrée.

CONSTRUCTION D'UN CODE

COROLLAIRE. - Le nombre de cartes planaires pointées ayant 1 sommet et n arêtes est  $\frac{2n!}{n!(n+1)!}$ .

Il suffit de prendre dans la propriété précédente  $p_i = 0$  pour  $i \neq 2$  ( $i > 0$ ) et  $p_2 = n$ , on obtient  $p_0 = n+1$ , d'où le résultat.

PROPRIÉTÉ IV.8. - Le nombre d'hypercartes planaires pointées définies sur  $[n]$  et ayant un seul sommet est égal à  $\frac{2n!}{n!(n+1)!}$ .

D'après le corollaire précédent, il suffit d'établir une bijection  $\beta$  entre les mots de  $L_\infty$  de longueur  $n$  et les mots de  $L_0$  de longueur  $2n$ .

Cette bijection est le morphisme  $\beta$  de  $X_\infty^*$  dans  $\{x_1, \bar{x}\}^*$  donné par  $\beta(x_i) = x_1^{i+1} \bar{x}$ ;  $\beta(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Il est alors clair que si  $f \in L_\infty$ ,  $\beta f \in L_0$ . Si  $f$  a  $p_i$  occurrences de  $x_{i-1}$  pour  $i=1, \dots, k$  alors  $f$  a  $\sum (i-1)p_i$  occurrences de  $\bar{x}$  et pour longueur  $\sum i p_i$ .  $\beta(f)$  a alors pour longueur  $\sum_{i=1,k} (i+1)p_i + \sum (i-1)p_i = 2 \sum i p_i = 2|f|$ .

$\beta$  est une bijection, le "décodage" d'un mot de  $L_1$  s'effectue en cherchant les occurrences de  $\bar{x}$  et en les remplaçant par  $x_i$  si elles sont précédées de  $\bar{x}x_1^{i+1}$  ( $i \geq 0$ ) en ne les changeant pas si elles sont précédées de  $\bar{x}$ .

## CODE DES GRAPHES PLANAIRES

### V. CODE DES HYPERCARTES PLANAIRES POINTÉES AYANT UN NOMBRE QUELCONQUE DE SOMMETS

Nous avons donné dans la partie IV deux méthodes (théorèmes I et II) pour coder les hypercartes planaires pointées ayant un seul sommet. Nous démontrons dans cette partie qu'étant donnée une hypercarte  $(\sigma, \alpha)$  planaire il existe une permutation circulaire  $\zeta$  telle que  $g(\zeta, \sigma) = g(\zeta, \alpha) = 0$ . Nous codons alors  $(\zeta, \sigma)$  par un emboîtement et  $(\zeta, \alpha)$  par un mot de  $L_\infty$ , une "combinaison" de ces deux codages nous donnera alors un code pour  $(\sigma, \alpha)$ .

1. PROPRIÉTÉ PRÉLIMINAIRE V.1. - Soit  $(\sigma, \alpha)$  un couple de permutations opérant sur un ensemble  $B$  et dont le groupe engendré a pour orbites  $B_1, B_2, \dots, B_k$ . Soit  $(\sigma_i, \alpha_i)$  la restriction de  $(\sigma, \alpha)$  à  $B_i$ . S'il existe une permutation circulaire  $\zeta$  de  $B$  telle que  $g(\zeta, \sigma) = g(\zeta, \alpha) = 0$ , alors :

$$g(\sigma_i, \alpha_i) = 0 \text{ pour } i=1, k.$$

En particulier si  $(\sigma, \alpha)$  est transitif ( $k=1$ ) c'est une hypercarte planaire.

Pour démontrer cette propriété, nous introduisons la notion suivante :

Permutation induite sur un sous-ensemble :

Soit  $\sigma$  opérant sur un sous-ensemble fini  $B$ ,  $B'$  un sous-ensemble de  $B$ , nous appelons permutation induite par  $\sigma$  sur  $B$  la permutation  $\hat{\sigma}$  donnée par : pour tout  $b' \in B'$   $\hat{\sigma} b'$  est le premier des éléments suivants qui appartient à  $B'$  :  $\sigma b'$ ,  $\sigma^2 b'$ ,  $\sigma^3 b'$ , ...,  $\sigma^n b'$ . Il est clair qu'il existe au moins un de ces éléments dans  $B'$  puisque  $B$  fini implique  $\exists m, \sigma^m b = b$ .

Lorsque  $\hat{\sigma} b' = \sigma b'$  pour tout  $b'$  de  $B'$ ,  $B'$  est union de cycles de  $\sigma$  et  $\hat{\sigma}$  est simplement la restriction de  $\sigma$  à  $B'$ .

Remarquons que d'après le théorème I (bijection entre les emboîtements et les permutations formant avec  $\zeta$  une hypercarte de genre nul) si  $g(\zeta, \alpha) = 0$ , alors  $g(\hat{\zeta}, \hat{\alpha}) = 0$  pour toute permutation induite  $\hat{\alpha}$ .

Démonstration de la propriété préliminaire :

Cette propriété se démontre par récurrence sur le nombre de cycles de  $\sigma$ .  
- Si  $z(\sigma) = 1$ , alors  $g(\sigma, \zeta) = 0$  s'écrit :  $1 + \frac{1}{2} [ |B| - 1 - z(\sigma^{-1} \zeta) ] = 0$ , soit  $z(\sigma^{-1} \zeta) = |B|$  et  $\sigma^{-1} \zeta = 1$ , la propriété est alors une trivialité.

## CONSTRUCTION D'UN CODE

- Soit  $\sigma$  telle que  $z(\sigma) = n > 1$ . Si le groupe engendré par  $(\sigma, \alpha)$  n'est pas transitif sur  $B$ , alors  $(\sigma_i, \alpha_i)$  sont tels que  $g(\sigma_i, \zeta_i) = g(\alpha_i, \zeta_i) = 0$  et  $\zeta_i$  est une permutation circulaire pour tout  $i$ . Ainsi d'après l'hypothèse de récurrence  $g(\sigma_i, \alpha_i) = 0$  pour  $i=1, \dots, k$ .

Si  $(\sigma, \alpha)$  opère transitivement sur  $B$ ,  $\sigma$  n'étant pas une permutation circulaire, il existe nécessairement un élément  $b$  tel que  $\zeta^{-1}\sigma b = b'$  n'appartienne pas au même cycle de  $\sigma$  que  $b$ .

Soit  $\tau$  la transposition échangeant  $b$  et  $b'$ ; considérons le couple  $(\sigma\tau, \alpha)$ .

On a  $z(\sigma\tau) = z(\sigma) - 1$ , d'après le lemme I.1, puisque  $b$  et  $b'$  n'appartiennent pas à un même cycle de  $\sigma$ .  $z(\zeta^{-1}\sigma\tau) = z(\zeta^{-1}\sigma) + 1$ , car  $\zeta^{-1}\sigma b = b'$  ainsi  $b$  et  $b'$  appartiennent à un même cycle pour  $\zeta^{-1}\sigma$ .

Ainsi  $g(\zeta, \sigma\tau) = g(\zeta, \sigma) = 0$ . Le couple  $(\sigma\tau, \alpha)$  est une hypercarte car  $\sigma\tau$  est obtenu par fusion de deux cycles de  $\sigma$ ; par conséquent, puisque  $z(\sigma\tau) = z(\sigma) - 1$ , on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence ainsi :  
 $g(\sigma\tau, \alpha) = 0$ .

D'autre part,  $z(\alpha^{-1}\sigma\tau) = z(\alpha^{-1}\sigma) \pm 1$  d'après le lemme I.1, ainsi :

$$\begin{aligned} 0 = g(\sigma\tau, \alpha) &= 1 + \frac{1}{2} (|B| - z(\alpha) - z(\sigma\tau) - z(\alpha^{-1}\sigma\tau)) \\ &= 1 + \frac{1}{2} (|B| - z(\alpha) - z(\sigma) - z(\alpha^{-1}\sigma)) \\ &\text{ou } 1 + \frac{1}{2} (|B| - z(\alpha) - z(\sigma) - z(\alpha^{-1}\sigma) + 2) \end{aligned}$$

$$0 = g(\sigma\tau, \alpha) \geq g(\sigma, \alpha). \text{ Or } g(\sigma, \alpha) \geq 0 \text{ implique } g(\sigma, \alpha) = 0.$$

### 2. ALGORITHME DE NUMÉROTATION DES BRINS.

THÉORÈME III (Théorème de Codage). - Soit  $(\sigma, \alpha)$  une hypercarte opérant sur  $B$  planaire (telle que  $g(\sigma, \alpha) = 0$ ), alors il existe une permutation circulaire  $\zeta$  de  $B$  telle que :

$$g(\zeta, \sigma) = g(\zeta, \alpha) = 0.$$

Nous définissons  $\zeta$  de la manière suivante (ce qui revient à numéroter les brins) :

- $b_0$  est choisi quelconque (si  $H = \sigma, \alpha, b^*$  est pointée  $b_0 = b^*$ )
- supposons définis  $b_0, b_1 = \zeta b_0, b_2 = \zeta^2 b_0, \dots, b_p = \zeta^p b_0$ , on définit  $\zeta b_p = b_{p+1}$  comme suit :



## CODE DES GRAPHES PLANAIRES

Procédure A : - Si  $\alpha b_p$  appartient à un sommet (cycle de  $\sigma$ ) sur lequel aucun brin n'appartient à  $\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_p\}$ , alors  $\zeta b_p = \alpha b_p$ .

Procédure B : - Si  $\alpha b_p$  appartient à un sommet sur lequel un brin appartient à  $\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_p\}$ , alors  $\zeta b_p = \sigma b_p$  si  $\sigma b_p$  n'appartient pas à  $\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_p\}$ , sinon :

Procédure C : -  $\zeta b_p$  est le premier élément de la suite  $\sigma b_{p-1}, \sigma b_{p-2}, \sigma b_{p-3}, \dots, \sigma b_2, \sigma b_1, \sigma b_0$  qui n'appartient pas à  $\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_p\}$

$$\zeta b_{|B|-1} = b_0 .$$

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CODAGE.

(a) La vérification de ce que la permutation  $\zeta$  ainsi construite est bien circulaire et de  $g(\zeta, \sigma) = 0$  résulte des deux remarques (i) et (ii) suivantes :

(i) Soient  $b_j$  et  $b_i$  deux brins tels que  $j < i$  et  $\sigma b_j = b_i$ , alors tout brin  $b_k$  tel que  $j < k < i$  n'appartient pas au sommet de  $b_i$  et  $b_j$  ;

(ii) Si  $\sigma b_i = b_j$  est tel que  $j < i$ , alors tous les brins appartenant au même sommet que  $b_i$  sont éléments de  $\{b_0, b_1, \dots, b_i\}$ .

En effet, tous les sommets de  $(\sigma, \alpha)$  sont atteints par  $\zeta$  puisque  $(\sigma, \alpha)$  est transitif, de la remarque (ii) il résulte alors que tous les brins d'un sommet sont numérotés et  $\zeta$  est bien une permutation circulaire.

$g(\zeta, \sigma) = 0$  : des remarques (i) et (ii), on déduit que l'on peut associer un mot  $f$  à  $\sigma$  tel que  $\bar{f} = \sigma$ , ce mot est nécessairement un mot emboîté, en effet si un brin appartient à un sommet  $s$  est numéroté, on ne numérote les brins des sommets rencontrés avant  $s$  qu'après avoir épuisé les brins de  $s$  (on n'applique la procédure A que pour des sommets non encore rencontrés et la procédure C ne s'applique, d'après la remarque (ii), qu'après avoir épuisé les brins d'un sommet).

#### (b) Démonstration des remarques (i) et (ii).

Pour la remarque (i) : s'il existe  $b_k$  tel que  $j < k < i$  appartenant au sommet de  $b_i$  et  $b_j$ , soit  $b_{k_0}$  celui d'indice le plus petit.

Alors  $b_{k_0}$  ne peut avoir été numéroté :

- Par la procédure (A) puisque  $b_j$  ( $j < k_0$ ) appartient au même sommet que lui ;

- Par la procédure (B) car  $b_{k_0-1}$  appartiendrait au même sommet que  $b_j$  et par la minimalité de  $b_{k_0}$  on aurait  $b_{k_0-1} = b_j$ , ce qui est en contradiction

## CONSTRUCTION D'UN CODE

avec  $\sigma b_j = b_i \neq b_{k_0}$  ;

- Par la procédure (C), car on aurait alors :  $b_{k_0} = \sigma b_{j_0}$  avec  $j_0 < j$  (hypothèse de minimalité de  $k_0$ ) et on obtiendrait une contradiction avec la définition de la procédure C :  $b_{k_0}$  doit être le premier élément de la suite  $\sigma b_{k_0-2}, \sigma b_{k_0-3}, \dots, \sigma b_j, \dots, \sigma b_{j_0}, \dots, \sigma b_0$  qui n'appartient pas à  $\{b_{k_0-1}, b_{k_0-2}, \dots, b_0\}$ , or  $\sigma b_j = b_i$  n'appartient pas à cet ensemble (puisqu'il est rencontré après  $i > j$ ) et  $\sigma b_j$  précède  $\sigma b_{j_0} = b_{k_0}$  dans cette suite.

Pour la remarque (ii) : si le sommet de  $b_i$  n'a qu'un seul brin, c'est trivial ( $\sigma b_i = b_i$ ).

Sinon,  $b_i$  n'est pas numéroté par la procédure (A) (puisque  $\sigma b_i = b_j$  est déjà numéroté), par conséquent il existe  $i_1, i_1 < i$  tel que  $\sigma b_{i_1} = b_i$  si le sommet de  $b_i$  n'a que deux brins, la démonstration est terminée sinon, d'après la remarque (i), il n'y a pas de brin  $b_k$  appartenant au même sommet que  $b_i$  et tel que  $i_1 < k < i$ , alors  $j < i_1 < i$ , et on peut répéter le même raisonnement en remplaçant  $i_1$  par  $i$ . On trouve ainsi une suite  $b_i, b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, \dots, b_{i_k}$ , telle que  $i > i_1 > i_2, \dots, > i_k$  et  $b_i = \sigma b_{i_1}, \sigma b_{i_2} = b_{i_1}, \dots$ , qui, puisque les cycles de  $\sigma$  sont finis, se termine nécessairement par  $b_j$  et tous les brins du sommet de  $b_i$  ont un indice plus petit que  $i$ .

(c)  $g(\zeta, \alpha) = 0$ . Nous démontrons cette propriété par récurrence sur le nombre de sommets de l'hypercarte.

Si  $\sigma$  n'a qu'un seul cycle, il est alors clair que dans la construction de  $\zeta$  seule la procédure (B) est employée, alors  $\sigma = \zeta$  et par conséquent  $g(\zeta, \alpha) = g(\sigma, \alpha) = 0$ .

Si  $\sigma$  a  $k$  cycles, on utilise la notion suivante pour construire une hypercarte ayant un sommet de moins et même une permutation circulaire associée que  $(\sigma, \alpha)$ .

### Fusion de deux sommets :

On a vu que  $g(\zeta, \sigma) = 0$ , on peut donc associer à  $\sigma$  un mot emboîté  $f$  tel que  $\bar{F} = \lambda^{-1} \sigma \lambda$  et  $\zeta_n = \lambda^{-1} \zeta \lambda$ , or, d'après le lemme IV.1, il existe une lettre  $x_0$  telle que  $f = f_1 x_0^m f_2$  et  $x_0$  n'apparaît pas dans  $f_1 f_2$ . Cela signifie pour l'hypercarte  $(\sigma, \alpha)$  qu'il existe un sommet  $s_1$  dont tous les brins sont numérotés consécutivement. Soit :

$$b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+m-1} .$$

CODE DES GRAPHE PLANAIRES

Considérons le brin  $b_{i-1}$  et soit  $s_2$  son sommet, on a nécessairement  $\sigma b_{i-1} = b_i$  car  $b_i$  est le premier brin appartenant à  $s_1$  dans la suite  $\{b_0, b_1, \dots, b_i, \dots\}$  qui ne peut avoir été numéroté que par la procédure (A). Soit alors :

$\tau = (b_{i-1}, b_{i+m-1})$  la transposition qui échange  $b_{i-1}$  et  $b_{i+m-1}$  et soit  $\sigma' = \sigma\tau$ .

Dans  $\sigma'$  les sommets  $s_1$  et  $s_2$  sont fusionnés, et on a :

$$z(\sigma) = z(\sigma') - 1 .$$

D'autre part,  $\sigma^{-1}\sigma b_{i+m-1} = \sigma^{-1} b_i = b_{i-1}$ ,  $\tau$  échange deux brins du même cycle de  $\alpha^{-1}\sigma$  et d'après le lemme I.1 :

$$z(\alpha^{-1}\sigma\tau) = z(\alpha^{-1}\sigma) + 1 .$$

Ainsi  $g(\alpha, \sigma) = g(\alpha, \sigma\tau) = 0$ .

Or la permutation circulaire associée à l'hypercarte  $(\sigma\tau, \alpha)$  est aussi  $\zeta$  : en effet, il est clair que si la suite associée à  $\sigma\tau, \alpha$  est  $b'_0, b'_1, b'_2, \dots, b'_n$  on a nécessairement  $b'_j = b_j$  pour  $j \leq i-1$ . Or pour trouver  $b'_i$ , on ne peut appliquer la procédure (A) à  $b'_{i-1} = b_{i-1}$  car  $\sigma b_{i-1} = b_i$  appartient au même cycle que  $b_{i-1}$  pour  $\sigma\tau$ , on applique donc (B) et on trouve :

$$\sigma\tau b_{i-1} = \sigma b_{i+m-1} = b_i, \text{ on a donc } b'_i = b_i .$$

De même, en appliquant encore la procédure (B), on trouve :  $b'_{i+1} = \sigma b_i = b_{i+1}$ , et  $b'_j = b_j$  pour  $j \leq i+m-1$ . A partir de  $b_{i+m-1}$ , on a aussi  $b'_j = b_j$  car les procédures (A), (B) ou (C) s'appliquent de la même façon à  $(\sigma, \alpha)$  et à  $(\sigma\tau, \alpha)$ . L'hypercarte  $(\sigma\tau, \alpha)$  a un sommet de moins que  $(\sigma, \alpha)$ , on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et  $g(\zeta, \alpha) = 0$ . Le théorème du codage est ainsi démontré.

4. MOT ASSOCIÉ A L'HYPERCARTE PLANAIRE POINTÉE  $(\sigma, \alpha, b^*)$ .

Soit  $\zeta$  la permutation circulaire associée à  $(\sigma, \alpha)$  par l'algorithme de numérotation des brins.

Soit  $\lambda$  la bijection entre  $B$  et  $[n]$  telle que  $1 = \lambda b$ ,  $\lambda\zeta\lambda^{-1} = \zeta_n$ .

Soit  $\tilde{\alpha} = \lambda^{-1}\alpha\lambda$  et  $\tilde{\sigma} = \lambda^{-1}\sigma\lambda$ ,  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha}, 1)$  est alors la même hypercarte pointée que  $(\sigma, \alpha, b^*)$  et à  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha}, 1)$  est associé par l'algorithme précédent la permutation circulaire  $\zeta_n$ . Puisque  $g(\tilde{\sigma}, \zeta_n) = 0$ , il existe un emboîtement  $f$  tel que  $\tilde{f} = \tilde{\sigma}$ ,  $f \in \{x_0, x_1, \dots, x_k\}^*$ . (Théorème I). Puisque  $g(\zeta_n, \tilde{\alpha}) = 0$ , il existe un mot  $g$  de  $L_\infty$  qui code  $\tilde{\alpha}$ . (Théorème II). On associe alors à  $(\sigma, \alpha, b^*) = (\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha}, 1)$  le mot  $h$  défini sur l'alphabet

**CONSTRUCTION D'UN CODE**

$$Y_k = \bigcup_{i=0,k} \{ \overline{x_i}, x_i^0, \dots, x_i^p \dots \} \text{ par :}$$

$$h(j) = x_i^p \text{ si } f(j) = x_i \text{ et } g(j) = x_p$$

$$h(j) = \overline{x_i} \text{ si } f(j) = x_i \text{ et } g(j) = \overline{x} .$$

Exemple : Soit l'hypercarte planaire pointée donnée par :  $(\sigma, \alpha, 1)$  opérant sur  $[16]$  :

$$\sigma = (1,2,3) (4,5,6,7) (8,9,10,11) (12,13,14) (15,16)$$

$$\alpha = (1,7) (2,11,6) (3,10) (4,8,15,14) (5) (9,12,16) (13) .$$

On trouve, en appliquant l'algorithme :

$$\zeta = (1,7,4,8,15,14,12,13,16,9,10,11,5,6,2,3) ;$$

ainsi :

$$f = x_0 x_4 x_4 x_3 x_2 x_1 x_1 x_2 x_3 x_3 x_4 x_4 x_0 x_0$$

$$g = x_1 \overline{x_3} \overline{x_3 x_3} x_2 x_0 \overline{x_3 x_1} x_2 x_0 \overline{x_3 x_3}$$

$$h = x_0 \overline{x_4} x_4 \overline{x_3} x_2 \overline{x_1} x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_3} x_4 \overline{x_4} x_0 \overline{x_0} .$$

oo0oo

5. CARACTERISATION DES MOTS CODES.

Dans la suite, nous notons  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , les morphismes de  $Y_k^*$  sur  $X_\infty^*$  et  $X_k^*$  donnés par :

$$\begin{aligned} \pi_1(x_i^j) &= x_j \quad \text{pour } i, j \geq 0 & \pi_1(\bar{x}_i) &= \bar{x} \quad \text{pour } i \geq 0 \\ \pi_2(x_i^j) &= \pi_2(\bar{x}_i) = x_i & & \forall i \geq 0. \end{aligned}$$

Pour un mot  $f$  de  $X_k^*$ , on note  $f_i$  le rang de la première occurrence de  $x_i$  dans  $f$ , ainsi :  $f(f_i) = x_i$  et  $f(j) \neq x_i$  pour  $j < f_i$ .

Propriété V.2 : Soit  $h$  un mot de  $Y_k^*$ , alors  $h$  est le code d'une hypercarte planaire pointée ayant  $k+1$  sommets si et seulement si

- (1)  $\pi_1 h = g$  appartient à  $L_\infty$
- (2)  $\pi_2 h = f$  est un emboîtement
- (3) Soit  $\alpha$  la permutation associée à  $g (= \pi_1 h)$  comme mot de  $L_\infty$  alors  $\alpha^{-1}(f_i) = f_{i-1}$  pour tout  $i > 0$  et  $\alpha^{-1}(j) \geq f_{i-1}$  pour tout  $j$  tel que  $f(j) = i$ .

1. Si  $h$  est le mot associé (code) d'une hypercarte planaire pointée, alors les propriétés (1) et (2) sont immédiates. D'autre part, la première occurrence d'une lettre d'indice inférieure  $i$  correspond au premier brin rencontré par  $\zeta$  sur un sommet et par conséquent ce brin est numéroté par la procédure A ainsi :

$$\alpha(f_{i-1}) = f_i.$$

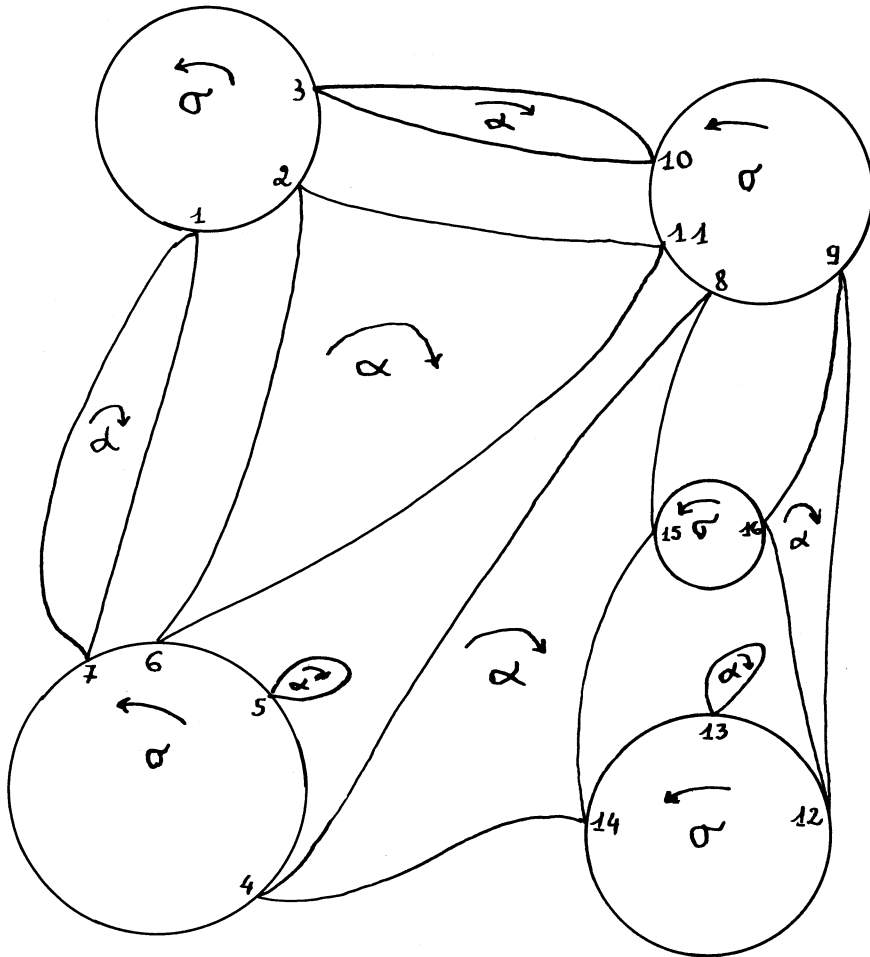
Enfin, si  $j$  appartient au même sommet que  $f_i$ , on ne peut avoir  $\alpha j_0 = j$  avec  $j_0 < f_{i-1}$  car on aurait pu alors appliquer la procédure (A) à  $j_0$ .

2. Soit réciproquement un mot  $h$  vérifiant les propriétés (1) (2) et (3). Soit  $\sigma = \bar{f}$  et  $\alpha$  définie dans l'énoncé.

-i) Montrons tout d'abord que  $(\sigma, \alpha)$  est transitif.

Supposons que tout élément inférieur ou égal à  $j$  s'obtient à partir de 1 par application d'un nombre fini de fois  $\alpha$  ou  $\sigma$ , montrons

CONSTRUCTION D'UN CODE



qu'il en est de même pour  $j+1$ , Soit  $f(j+1) = i$ , on a nécessairement :

$f_i \leq j+1$  si  $f_i < j+1$ , alors il existe  $m$  tel que  $j+1 = \sigma^m f_i$ . Si  $f_i = j+1$  alors d'après (3)  $j+1 = \alpha j$ , d'où le résultat.

-ii)  $g(\sigma, \alpha) = 0$ . En effet, d'après (1) et (2) et la définition de  $\sigma$  et  $\alpha$  :

$g(\zeta_n, \alpha) = g(\zeta_n, \sigma) = 0$ , ainsi d'après la propriété préliminaire V.1,  
 $g(\sigma, \alpha) = 0$ .

-iii)  $(\sigma, \alpha, 1)$  constitué une hypercarte pointée, on sait lui associer une permutation circulaire  $\zeta$  d'après l'algorithme de numérotation des brins, montrons que  $\zeta = \zeta_n$ , alors  $h$  sera bien le mot associé à cette hypercarte.

Supposons  $\zeta \neq \zeta_n$ , soit  $i$  le plus petit nombre tel que  $j = \zeta_i \neq i+1$ . On a  $1 \leq i \leq n-1$  et  $j > i+1$  (sinon  $\zeta$  ne serait pas circulaire).

1. Si  $\alpha_i$  est un brin d'un sommet de  $(\sigma, \alpha)$  n'ayant pas de brin élément de  $\{1, 2, \dots, i\}$  alors par construction de  $\zeta$ ,  $\alpha_i = j$  (Procédure A). Soit alors  $p$  le plus petit élément de  $[n]$  qui est brin du sommet de  $\alpha_i = j$ , évidemment  $i < p$ , d'autre part  $\alpha^{-1}(p) = p-1$ , d'après la condition (3),  $p$  et  $j$  appartiennent au même sommet  $p$  est le premier brin de ce sommet dans  $[n]$  et  $\alpha^{-1}(p) = p-1 > \alpha^{-1}(j) = i$  est en contradiction avec la deuxième partie de la condition (3).

2. Si  $\alpha_i$  est le brin d'un sommet déjà rencontré dans  $\{1, 2, \dots, i\}$  alors par construction de  $\zeta$ ,  $j = \zeta^i$  vérifie  $j = \sigma j_0$  avec  $j_0 \leq i$ .

$i+1$  appartient aussi à un sommet déjà rencontré dans  $\{1, 2, \dots, i\}$  sinon d'après la condition (3) on aurait  $\alpha^{-1}(i+1) = i$ . Par conséquent, par construction de  $\sigma = \bar{f}$ , on a  $i+1 = \sigma i_0$  avec  $i_0 \leq i$ . D'après la construction de  $\zeta$  (Procédure (C)) on a nécessairement  $i_0 < j_0$  (sinon  $\zeta_i = i+1$ ), les inégalités suivantes sont donc vérifiées :

## CONSTRUCTION D'UN CODE

$$i_0 < j_0 \leq i < i+1 < j .$$

Or  $i_0$  et  $i+1$  appartiennent au même sommet et il en est de même pour  $j$ ,  $j_0$  ; ce qui implique, puisque  $f$  est un mot emboîté, que  $i+1$ ,  $i_0$ ,  $j$ ,  $j_0$  sont éléments d'un même sommet. Dans ces conditions, par définition de  $\bar{f}$ , on a :

$$\bar{f}(j_0) = \sigma j_0 = i+1 = j .$$

$\zeta = \zeta_n$  et la propriété V.2 est démontrée.



VI. LE LANGAGE CODANT LES CARTES PLANAIRES POINTÉES.

1. L'OPÉRATEUR  $\nabla_k$ .

Cet opérateur associe à tout sous-ensemble de  $Y_{k-1}^*$  une partie de  $Y_k^*$ , pour le définir nous introduisons le morphisme projection  $\varpi_k$  de  $Y_k^*$  dans  $Y_{k-1}^*$ ,  $\nabla_k$  est alors une restriction de l'image inverse de  $\varpi_k$ .

$\varpi_k$  est donné par :

$$\begin{aligned} \varpi_k(x_i^1) &= x_i^1 & \varpi_k(\bar{x}_i) &= \bar{x}_i \quad \text{pour tout } i \quad 0 \leq i < k, \forall l \geq 0 \\ \varpi_k(x_k^1) &= x_0^1 & \varpi_k(\bar{x}_k) &= \bar{x}_0 \end{aligned}$$

On définit alors  $\nabla_k L$ , ou  $L \subset Y_{k-1}^*$  par :

$f$  appartient à  $\nabla_k L$  si et seulement si  $\varpi_k(f)$  appartient à  $L$  et si aucune occurrence d'une lettre ayant pour indice inférieur 0 ne précède une occurrence d'une lettre d'indice inférieur  $k$ , ce qui s'écrit :

$(f(i_1) = x_0^1 \text{ ou } f(i_1) = \bar{x}_0)$  et  $(f(i_2) = x_k^1 \text{ ou } f(i_2) = \bar{x}_k)$  implique  $i_2 < i_1$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \nabla_k L &= \varpi_k^{-1}(L) \cap Y_k^* \cdot Y_{k-1}^* \quad \text{où l'alphabet } Y_k^* \text{ est} \\ Y_k^* &= \bigcup_{i=1, k} \{\bar{x}_i, x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^p, \dots\} = Y_k \setminus \{\bar{x}_0, x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^p, \dots\} \end{aligned}$$

Par exemple, soit  $g = x_0^1 \bar{x}_2 \bar{x}_0 x_3^0 x_4^0$ , alors  $\nabla_5 \{g\}$  est constitué de  $g$  et des mots  $g_1$  et  $g_2$  suivants :

$$g_1 = x_5^1 \bar{x}_2 \bar{x}_0 x_3^0 x_4^0 \quad g_2 = x_5^1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 x_3^0 x_4^0$$

2. LE LANGAGE CODANT LES CARTES PLANAIRES POINTÉES.

La propriété V.2, caractérise les mots qui sont les codes des hypercartes planaires pointées, si on restreint ce codage aux cartes on obtient aisément la caractérisation suivante des mots codant les cartes :

Propriété VI.1 : Soit  $h$  un mot de  $Y_k^*$  alors  $h$  est le code d'une carte planaire pointée ayant  $k+1$  sommets si et seulement si il vérifie les propriétés (1)' (2) et (3). (ces deux dernières étant énoncées dans la propriété V.2).

(1)'  $\pi_1 h = g$  appartient au langage  $L_1$  défini par  
 $L_1 = x_0^1 L_1 \bar{x}_0 L_1 + 1$ .

Nous appelons  $L_{k+1}$  ce langage, pour simplifier l'écriture nous remplaçons la lettre  $x_0^1$  par  $x_i$ , nous avons donc:

$$L_{k+1} \subset X_k^* \quad X_k = \{x_0, \bar{x}_0, x_1, \bar{x}_1, \dots, x_k, \bar{x}_k\}.$$

$\nabla_k$  opère des parties de  $X_{k-1}^*$  dans celles de  $X_k^*$  de la même façon que pour  $Y_{k-1}^*$  l'indice supérieur d'une lettre ne changeant pas par

$\nabla_k$ . Nous avons :

Théorème IV : Les langages  $L_k$  sont algébriques pour tout  $k \geq 1$ .

Ils vérifient les équations :

$$L_1 = x_0 L_1 \bar{x}_0 L_1 + 1$$

$$L_{k+1} = \sum_{0 \leq p \leq k} x_0 \vec{L}_{p+1} \bar{x}_0 L_{k-p+1} + x_0 \bar{x}_k \nabla_k L_k \quad \forall k \geq 1$$

où  $\vec{L}_{p+1}$  est défini à partir de  $L_p$  par le changement d'alphabet qui laisse fixe  $x_0$  et  $\bar{x}_0$  et qui remplace la lettre  $x_i$  (resp.  $\bar{x}_i$ ) par la lettre  $x_{i+k-p}$  (resp.  $\bar{x}_{i+k-p}$ ).

Nous démontrons tout d'abord que les langages  $L_k$  vérifient le système d'équation donné :

- Pour ce qui concerne  $L_1$ , ceci a été déjà fait (corollaire 2 du théorème II).

- Montrons que tout mot  $h$  de  $L_{k+1}$  se décompose soit en  $h = x_0 \bar{x}_k h'$  où  $h'$  appartient à  $\nabla_k L_k$ , soit en  $x_0 h_1 \bar{x}_0 h_2$  où  $h_1$  appartient à  $\vec{L}_{p+1}$  et  $h_2$  à  $L_{k-p+1}$ .

Notons  $f = \pi_1 h$  et  $g = \pi_2 h$ , ainsi  $f \in \{x_0, \bar{x}_0\}^*$ ,  
 $g \in \{x_0, x_1, \dots, x_k\}^*$ . Le mot  $h$  de  $L_{k+1}$  vérifie les conditions (1'), (2) et (3)  
 par (1'),  $f$  appartient à  $L_1$ , ainsi  $f$  s'écrit  $f = x_0 f_1 \bar{x}_0 f_2$ .

Notons  $n = |f| = |g| = |h|$  et  $m = |f_1| + 2$ , ainsi  $|f_2| = n - m$ .  
 $f(m) = \bar{x}_0$ , par conséquent  $h(m) = \bar{x}_i$  avec  $i \geq 0$ .

1. Si  $i = 0$ . Dans ce cas, on peut écrire :

$g = x_0 g_1 x_0 g_2$  et  $h = x_0 h_1 \bar{x}_0 h_2$  avec  $|g_1| = |f_1| = |h_1|$ . Et on vérifie que :

(i).  $f_1$  et  $f_2$  sont des mots de  $L_1$  par construction.

(ii).  $g_1$  et  $g_2$  sont des mots emboîtés comme facteurs de  $g$ , d'autre  
 part  $g$  étant un emboitement : aucune lettre  $x_i$   $i \neq 0$  n'apparaît à la  
 fois dans  $g_1$  et dans  $g_2$ . De plus  $g_2 \in X_p^*$ ,  $g_1 \in \{x_0, \bar{x}_0, x_k, \bar{x}_k, \dots,$   
 $x_{p+1}, \bar{x}_{p+1}\}^*$ , enfin si on effectue le changement d'alphabet qui remplace  
 la lettre  $x_i$  par  $x_{k+i-p}$ , le mot  $g'_1$  obtenu à partir de  $g$  est un  
 emboitement.

(iii). Si on appelle  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les permutations associées à  $f_1$  et  $f_2$   
 comme mots de  $L_1$ , et  $\alpha$  celle associée à  $f$ , on a :

$$\alpha = (1, m) \lambda_1 \alpha_1 \lambda_1^{-1} \lambda_2 \alpha_2 \lambda_2^{-1}$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les applications de  $[|f_1|]$  et  $[|f_2|]$  dans  $[n]$   
 respectivement données par :  $\lambda_1 i = i+1$ ,  $\lambda_2 i = i+m$ .

Ainsi la condition (3) étant vérifiée par  $h$ , elle est aussi  
 vérifiée par  $h_1$  et  $h_2$ .

(i), (ii) et (iii) impliquent alors  $h_1 \in \bar{L}_{p+1}$  et  $h_2 \in L_{k-p+1}$ .

2. Si  $i \neq 0$ . La condition (3) implique que  $|f_1| = 0$  et  
 la condition (2) que  $i = k$  ( $g$  est un emboitement). On écrit ainsi

$$f = x_0 \bar{x}_0 f_2, \quad g = x_0 x_k g_2, \quad h = x_0 \bar{x}_k h_2,$$

et on vérifie que :

## CONSTRUCTION D'UN CODE

- (i).  $f_2$  est mot de  $L_2$
- (ii).  $\pi_k g_2$  est un emboitement  $\subset X^*_{k-1}$
- (iii). Si  $\alpha_2$  est la permutation associée à  $f_2$  comme mot de  $L_1$ , on a :

$$\alpha = (1,2)\lambda_2\alpha_2\lambda_2^{-1}$$

où  $\lambda_2^i = i+2$ , ainsi  $\pi_k h_2$  vérifie (3) puisque  $h$  vérifie cette relation.

(iv). Puisque  $g$  est un mot emboîté, aucune occurrence de  $x_k$  ou de  $\bar{x}_k$  ne peut précéder une occurrence de  $x_o$  ou de  $\bar{x}_o$  dans  $h_2$  ( $h = x_o \bar{x}_k h_2$ ).

(i), (ii), (iii) et (iv) impliquent alors  $h_2 \in \nabla_k L_k$ .

- Réciproquement, soit  $h = x_o h_1 \bar{x}_o h_2$  où  $h_2 \in L_{k-p+1}$  et  $h_1 \in \vec{L}_p$ , il est immédiat de constater que  $f = \pi_1 h$  appartient à  $L_1$  que  $g = \pi_2 h$  est un emboitement et que  $h$  vérifie la condition (3).

De même si  $h = x_o \bar{x}_k h'$ , ainsi  $h$  appartient bien à  $L_{k+1}$ .

Démontrons que  $L_{k+1}$  est algébrique,  $\forall k \geq 0$ .

$L_1$  est évidemment algébrique.

Supposons  $L_p$  algébrique pour  $p \leq k$ , alors  $\vec{L}_{p+1}$  est évidemment algébrique (simple changement d'alphabet) et  $\nabla_k L_k$  est algébrique, car  $\nabla_k L = \pi_k^{-1} L \cap X^*_k X^*_{k-1}$  où  $X^*_k = \{x_1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_k\}$  (L'image par l'inverse d'un morphisme et l'intersection par un rationnel conservent l'algébricité). Ainsi l'équation vérifiée par  $L_{k+1}$  peut s'écrire :

$$L_{k+1} = x_o L_{k+1} \bar{x}_o L_1 + x_o L_1 \bar{x}_o L_{k+1} + M_k$$

où  $M_k$  est algébrique d'après l'hypothèse de récurrence et les remarques qui viennent d'être faites.

Ceci prouve que  $L_{k+1}$  est algébrique.

### 3. GÉNÉRALISATION.

On peut démontrer le théorème plus général suivant qui assure l'algébricité du langage des codes d'une classe d'hypercartes.

Théorème V.:      L'ensemble de toutes les hypercartes planaires pointées ayant  $\kappa$  sommets et dont les hyperarêtes ont des degrés appartenant à un ensemble fini  $I = \{i_1+1, i_2+1, \dots, i_p+1\}$  ( $i_j \geq 0$ ) est en bijection avec un langage algébrique.

Soit  $L_{\kappa+1}(I)$  le langage dont les mots sont en bijection avec ces hypercartes (paragraphe V,5.). Nous montrons que ce langage est algébrique, il vérifie les équations :

$$L_1(I) = 1 + \sum_{j=1,p} x_0^j (L_1(I) \bar{x}_0)^j L_1(I)$$

⋮  
⋮  
⋮

$$L_{\kappa+1}(I) = \sum_{j=1,p} P_j$$

où  $P_j$  est le polynôme somme de tous les monômes de la forme  $x_0^j A_1 \bar{x}_{\alpha_1} A_2 \bar{x}_{\alpha_2} \dots A_{i_j} \bar{x}_{\alpha_{i_j}} A_{i_j+1}$  (où les  $A$  sont soit égaux à 1, soit obtenus à

partir de  $L_p(I)$ ,  $p \leq \kappa$ , par des changements d'alphabets, soit  $\nabla_{p+1} \nabla_{p+1-i} \dots \nabla_p L_p(I)$  écrits en respectant les règles suivantes :

- pour  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i_j}$  :

Les  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i_j}$  prennent toutes les valeurs possibles appartenant à  $\{0, 1, 2, \dots, \kappa\}$  et vérifiant :

Si  $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \kappa$

Le mot  $g = x_0 x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_{i_j}}$  est un mot emboité

Si la première occurrence d'une lettre d'indice  $\alpha_p$  ( $\neq 0$ ) précède la première occurrence d'une lettre d'indice  $\alpha_q$ , alors  $\alpha_p > \alpha_q$ .

CONSTRUCTION D'UN CODE

Si  $g(u) \neq x_{\alpha_p}$  pour  $u \leq p$  et  $g(u) \neq x_{\alpha_{p+1}}$  pour  $u \leq p+1$ ,  
 alors  $\alpha_{p+1} = \alpha_p - 1$ .

Pour les  $A_1, \dots, A_{p+1}$ .

Ceux-ci sont déterminés de manière unique pour chaque mot  $g$  par les règles :

Si  $\alpha_p \notin \{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}\}$ , alors  $A_p = 1$ .

Si  $\alpha_p \in \{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}\}$

$\alpha_{p-1} \notin \{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-2}\}$

.....  $A_p = \vec{L}_{\beta_p}(I)$ .

Si  $\alpha_p \in \{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}\}$

$\alpha_{p-1} \notin \{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-2}\}$

⋮  
⋮  
⋮

$\alpha_{p+1-i} \notin \{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-i}\}$

$\alpha_{p-i} \in \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-i-1}\}$

alors

$A_p = \nabla_{\alpha_{p+i}} \nabla_{\alpha_{p+i-1}} \dots \nabla_{\alpha_{p-1}} \vec{L}_{\beta_p}(I)$ .

Si  $\alpha_{i_j} \notin \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i_j-1}\}$

alors  $A_{i_j+1} = L_{\beta_{i_j+1}}(I)$

Si  $\alpha_{i_j} \in \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i_j-1}\}$

$\alpha_{i_j-1} \notin \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i_j-2}\}$

⋮  
⋮  
⋮

$\alpha_q \notin \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}\}$

$\alpha_{q-1} \in \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-2}\}$

alors

$$A_{i_j+1} = \nabla_{\alpha_q} \nabla_{\alpha_{q-1}} \dots \nabla_{\alpha_{i_j}} L_{\beta_{i_j}}(I) + \sum_{1=ij} \beta_p = k+1.$$

Les  $\vec{L}_{\beta_p}(I)$  sont des langages obtenus par changement d'alphabet à partir de  $L_{\beta_p}$  de manière à ce que les mots de  $L_k(I)$  soient des emboitements. Ainsi  $L_k(I)$  est algébrique car les opérateurs  $\nabla_i$  transforment langages algébriques en langages algébriques.

Exemple : Soit  $I = I_1 = \{1, 3, 4\}$ , posons pour simplifier l'écriture  $L_k(I_1) = M_k$ , on obtient alors les équations suivantes :

$$M_1 = x_0^0 M_1 + x_0^2 M_1 \bar{x}_0 M_1 \bar{x}_0 M_1 + x_0^3 M_1 \bar{x}_0 M_1 \bar{x}_0 M_1 \bar{x}_0 M_1.$$

$$\begin{aligned} M_{k+1} = & x_0^0 M_{k+1} + \sum_{\substack{p,q \\ 0 < p+q < k}} x_0^2 \vec{M}_p \bar{x}_0 \vec{M}_q \bar{x}_0 M_{k-p-q+1} + \sum_{0 \leq q \leq k} x_0^2 \bar{x}_k \nabla_k \vec{M}_q \bar{x}_0 M_{k+1-q} \\ & + \sum_{0 < q \leq k} x_0^2 \vec{M}_q \bar{x}_0 \bar{x}_{k-q+1} \nabla_{k-q+1} M_{k-q+1} + \sum_{0 < q \leq k} x_0^2 \bar{x}_k \vec{M}_q \bar{x}_k \nabla_k M_{k-p+1} \\ & + x_0^2 \bar{x}_k \bar{x}_{k-1} \nabla_k \nabla_{k-1} M_{k-1} + \sum_{\substack{p,q,r \\ 0 < p+q+r \leq k}} x_0^3 \vec{M}_p \bar{x}_0 \vec{M}_q \bar{x}_0 \vec{M}_r \bar{x}_0 M_{k-p-q-r+1} \\ & + \sum_{0 < p, q \leq k} x_0^3 \vec{M}_p \bar{x}_0 \bar{x}_q \nabla_q \vec{M}_q \bar{x}_0 M_{k-p-q+1} + \sum_{0 < p \leq k} x_0^3 \vec{M}_{k-p+2} \bar{x}_0 \bar{x}_p \bar{x}_{p-1} \nabla_p \nabla_{p-1} M_{p-1} \\ & + \sum_{\substack{p+q+r=k+1 \\ 1 \leq p, q, r \leq k}} x_0^3 \vec{M}_p \bar{x}_0 \vec{M}_q \bar{x}_0 \bar{x}_r \nabla_r M_r + \sum x_0^3 M_r \bar{x}_0 \bar{x}_p \vec{M}_q \bar{x}_p \nabla_p M_p \\ & + \sum_{p+q+r=k+1} x_0^3 \bar{x}_k \nabla_k \vec{M}_p \bar{x}_0 \vec{M}_q \bar{x}_0 M_r + \sum_{p+q=k+1} x_0^3 \bar{x}_k \bar{x}_{k-1} \nabla_k \nabla_{k-1} \vec{M}_p \bar{x}_0 M_q \\ & + \sum_{p+q=k+1} x_0^3 \bar{x}_k \nabla_k \vec{M}_q \bar{x}_0 \bar{x}_q \nabla_q M_q + x_0^3 \bar{x}_k \bar{x}_{k-1} \bar{x}_{k-2} \nabla_k \nabla_{k-1} \nabla_{k-2} M_{k-2} \\ & + \sum_{p+q=k+1} x_0^3 \bar{x}_k \vec{M}_p \bar{x}_k \nabla_k M_q + \sum_{p+q+r=k+1} x_0^3 \bar{x}_k \vec{M}_p \bar{x}_k \vec{M}_q \bar{x}_k \nabla_k M_r. \end{aligned}$$

**Chapitre Deuxième**  
**APPLICATIONS COMBINATOIRES**  
**ET ALGÈBRIQUES DU CODAGE**



## CODE DES GRAPHES PLANAIRES

Ce chapitre est composé de trois parties disjointes.

La première est consacrée à la démonstration d'un théorème de transfert dont une conséquence est de retrouver de manière purement combinatoire des résultats de W.T. Tutte concernant l'énumération des "slicings". La démonstration donnée ici diffère sensiblement de celle que nous avons proposée dans notre thèse de troisième cycle, elle nous permet de généraliser notre résultat aux hypercartes uniformes. Après avoir donné quelques propriétés du codage, (construction d'un "hyperarbre recouvrant" et d'une dépendance entre sommets) nous donnons deux propriétés fines vérifiées par le code des hypercartes uniformes (qui ne sont plus vraies si on supprime cette hypothèse) cruciales dans la construction du transfert. Cette dernière construction se fait en itérant un "transfert élémentaire" qui est tout d'abord étudié en détail. Les conséquences sur l'énumération sont données pour terminer.

Dans la deuxième, nous relierons notre codage à celui qui a été construit par A. Lehman ([36]) et qui avait aussi été envisagé par C. Lenormand (communication orale en 1968).

L'avantage du code de Lehman-Lenormand est qu'il s'effectue avec un alphabet fini (4 lettres) pour les cartes ayant un nombre quelconque de sommets, par contre le langage des codes n'est pas algébrique. Néanmoins, on peut en déduire un résultat d'énumération de manière purement combinatoire. Nous donnons de ce résultat (du à A. Lehman) une preuve originale. Après une étude systématique des propriétés du langage.

Enfin la partie III nous permet de relier nos problèmes aux travaux de Lyndon et Weinbaum sur le problème du mot, il s'agit d'une simple incursion dans ce domaine qui s'est révélée fructueuse. Une étude plus approfondie mériterait d'être entreprise.

I. UN THÉOREME DE TRANSFERT.

1. GÉOMÉTRIE DU CODAGE.

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques propriétés du codage qui sont le plus souvent valables pour des hypercartes non planaires : nous généralisons aux hypercartes les notions d'arborescence et d'arbre recouvrant bien connues pour les cartes.

Définition : Nous dirons qu'une application  $\gamma$  d'un ensemble  $S$  dans lui-même est arborescente de racine  $s_0$  s'il existe un entier  $N$  vérifiant  $\forall n \geq N \quad \gamma^n(s) = s_0 \quad \forall s$ .

Remarque :  $\gamma(s_0)$  est alors égal à  $s_0$ , en effet soit  $n$  supérieur à  $N$ ,  $\gamma^n(s) = s_0$  et  $\gamma(\gamma^n(s)) = \gamma^{n+1}(s_0) = s_0$ , ainsi  $\gamma(s_0) = s_0$ .

D'autre part,  $s_0$  est le seul élément laissé fixe par  $\gamma$  car si  $\gamma(s_1) = s_1$  ceci implique  $\gamma^n(s_1) = s_1$  pour tout  $n$ , en particulier pour  $n > N$ .

Propriété 1.1. (Arborescence recouvrante) : Soit  $H = (\sigma, \alpha, b_0)$  une hypercarte pointée, il existe une application arborescente  $\gamma$  de l'ensemble  $S$  des sommets de  $H$  dans lui-même telle que pour tout sommet  $s$   $s$  et  $\gamma(s)$  sont adjacents.

Soit  $H = (\sigma, \alpha, b_0)$  une hypercarte pointée, non nécessairement planaire, opérant sur un ensemble  $B$  de brins ; on peut appliquer, de la même façon qu'aux hypercartes planaires, l'algorithme de numérotation des brins. On obtient une bijection  $\lambda$  de  $B$  dans  $[n]$ , pour tout sommet  $s$  de  $H$ , soit  $b_s$  le brin appartenant à  $s$  d'image par  $\lambda$  minimale. Soit  $s_0$  le sommet distingué ( $b_0 \in s_0$ ). D'après l'algorithme du codage les brins  $b_s$ , pour  $s \neq s_0$ , sont tous "numérotés" par la procédure (A) et

$$\lambda \alpha^{-1}(b_s) = \lambda b_s - 1.$$

CODE DES GRAPHE PLANAIRES

Nous définissons alors  $\gamma$  par :  $\gamma(s_0) = s_0$  et pour tout sommet  $s$ ,  $\gamma(s)$  est le sommet auquel appartient  $\alpha^{-1}(b_s)$ .

$\gamma$  est arborescente : Si  $s$  est différent de  $s_0$   
 $s' = \gamma(s)$  implique  $\lambda b_{s'} < \lambda b_s$ . L'ensemble  $S$  étant fini, la suite  $s, \gamma(s), \gamma^2(s), \dots, \gamma^m(s)$  est finie et l'inégalité (pour  $\gamma^i(s) \neq s_0$ )  
 $b_s > b_{\gamma(s)} > b_{\gamma^2(s)} \dots > b_{\gamma^m(s)}$  implique qu'il existe un entier  $m$  (dépendant de  $s$ ) tel que  $\gamma^m(s) = s_0$ . En prenant pour  $N$  la valeur maximale de  $m$  pour tous les sommets  $s$  de  $S$  on obtient que  $\gamma$  est une application arborescente de racine  $s_0$ . Pour tout  $s$ ,  $\gamma(s)$  est adjacent à  $s$  dans  $H$  car  $b_s \in s$  et  $\alpha^{-1}(b_s) \in \gamma(s)$ .

Sous-arborescence de racine  $s$ .

Pour tout sommet  $s$  de  $H$  nous définissons la sous-arborescence  $\gamma_s$  de racine  $s$  par :  $S_s$  est l'ensemble des sommets  $s'$  tels qu'il existe  $m \geq 0$  vérifiant  $\gamma^m(s') = s$  ;  $\gamma_s(s) = s$  et pour tout sommet  $s' \in S_s$   $s' \neq s$   $\gamma_s(s') = \gamma(s')$ .  $\gamma_s$  est bien une application arborescente.

Brins dépendants d'un sommet.

L'ensemble des brins  $B_s$  dépendant d'un sommet  $s$  est composé des brins appartenant aux sommets  $s'$  de  $S_s$  :  $B_s = \bigcup_{s' \in S_s} s'$ .

Propriété I.2.:  $\lambda B_s$  est un intervalle  $[\lambda b_s, \lambda b']$  de l'ensemble des entiers naturels.

(1). Remarquons tout d'abord que si un brin  $b$  appartient à  $B_s$ , alors  $\lambda b_s < \lambda b$ .

En effet, ceci est vrai pour tous les brins  $b$  appartenant à  $s$  par définition de  $b_s$ .

APPLICATIONS COMBINATOIRES

C'est vrai pour tous les brins  $b_s$ , tels que  $\gamma(s') = s$  puisque  $\lambda(\alpha^{-1}b_s) = \lambda b_s - 1$  où  $\alpha^{-1}b_s$  appartient à  $s$ .

Si c'est vrai pour  $b_s$ , c'est vrai pour tous les  $b_{s''}$  tels que  $\gamma(s'') = s'$  pour les mêmes raisons, c'est donc vrai pour tous les  $b_s$ , tels que  $s' \in S_s$ .

Enfin c'est vrai pour tous les  $b$  appartenant à  $B_s$  car si  $b$  appartient à  $s'$  (élément de  $S_s$ )  $\lambda b \geq \lambda b_s$ .

(2). Soit  $b$  un brin tel qu'il existe  $b'$  vérifiant  $b' \in B_s$  et  $\lambda b_s < \lambda b < \lambda b'$ , montrons que  $b$  appartient alors à  $B_s$ .

Si cela n'était pas vérifié soit  $b$  le brin d'image par  $\lambda$  minimale qui ne vérifie pas la propriété. Ainsi  $b$  appartient à un sommet  $s_1$  qui n'est pas élément de  $S_s$ .

Si  $b = b_{s_1}$  alors  $\lambda \alpha^{-1}b_{s_1} = \lambda b - 1$  et  $\alpha^{-1}b_{s_1}$  appartient à  $B_s$  par la minimalité de  $b$ . Ainsi  $\gamma s_1 = s'_1$  appartient à  $S_s$  et  $s_1$  appartient alors aussi à  $S_s$ , d'où une contradiction.

Ainsi  $b$  est différent de  $b_{s_1}$  et  $b_{s_1}$  vérifie nécessairement  $\lambda b_{s_1} < \lambda b_s < \lambda b$  (par minimalité de  $\lambda b$ ).

Soit  $b'$  le brin d'image par  $\lambda$  minimale vérifiant  $b' \in B_s$   $\lambda b_s < \lambda b < \lambda b'$ .

Si  $b' = b_{s_1}$ , alors  $\lambda \alpha^{-1}b' = \lambda b' - 1$  et  $\alpha^{-1}b'$  appartient aussi à  $B_s$ , ce qui contredit soit le fait que  $b$  n'appartient pas à  $B_s$ , soit la minimalité de  $b'$ .

$b_s$  est ainsi différent de  $b'$  mais par la première partie on a :  $\lambda b_s < \lambda b_{s_1}$ .

Par la minimalité de  $b'$  :  $\lambda b_{s_1} < \lambda b$ , ainsi on obtient l'inégalité

$$\lambda b_{s_1} < \lambda b_s, < \lambda b < \lambda b'$$

(où  $b$  appartient à  $s_1$  et  $b'$  à  $s'$ ). Ceci est une contradiction avec  $g(\zeta, \sigma) = 0$ , car le mot associé à  $\lambda \sigma \lambda^{-1}$  n'est pas un emboîtement.

Propriété I.3. (hyperarbre sous-jacent) : Soit  $H = (\sigma, \alpha, b_0)$  une hypercarte pointée, soit  $\bar{H} = (\bar{\sigma}, \bar{\alpha})$  l'hypercarte opérant sur l'ensemble  $\bar{B}$  de brins et donnée par :

- (1)  $\bar{B}$  est constitué de tous les brins  $b$  tels qu'il existe un sommet  $s$  de  $H$  vérifiant  $b = b_s$  ou  $b = \alpha^{-1} b_s$  ;
- (2)  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\alpha}$  sont les permutations induites par  $\sigma$  et  $\alpha$ .

Alors  $\bar{H}$  est une hypercarte planaire n'ayant qu'une seule face.

(la permutation induite sur un sous-ensemble a été définie dans le paragraphe V du chapitre premier).

Démonstration : (i). Démontrons tout d'abord que  $(\bar{\sigma}, \bar{\alpha})$  est bien une hypercarte. Si cela n'est pas vérifié, soit  $S'$  l'ensemble des sommets de  $\bar{H}$  qui ne peuvent être atteints par une chaîne (de  $\bar{H}$ ) à partir de  $s_0$ , sommet distingué ( $b_0 \in s_0$ ).  $S \setminus S'$  contient en plus de  $s_0$  au moins un autre élément car le premier brin  $b$ , numéroté par l'algorithme, qui n'appartient pas à  $s_0$  est nécessairement tel que  $b = b_{s_1}$ ;  $\alpha^{-1} b_{s_1}$  appartient à  $s_0$  et  $\bar{\alpha}^{-1} b_{s_1} = \alpha^{-1} b_{s_1}$  par définition de  $\bar{B}$ . Soit  $s'$  le sommet de  $S'$  ayant un  $\lambda b_s$ , minimal, posons  $u = \alpha^{-1} b_s$ ,  $u$  appartient à  $\bar{B}$  et il est tel que  $\lambda u = \lambda b_s, -1$ , si  $u$  est élément d'un sommet  $s$  par la minimalité de  $s'$ ,  $s$  est élément de  $S \setminus S'$ . L'existence d'une chaîne de  $s_0$  à  $s$  et le fait que  $\bar{\alpha} u = b_s$ , implique l'existence d'une chaîne de  $s_0$  à  $s'$ , d'où une contradiction et  $S' = \emptyset$ .

(ii).  $\bar{H}$  est planaire.

Pour démontrer cette propriété, nous calculons le nombre d'éléments de  $\bar{B}$ , le nombre de cycles de  $\bar{\sigma}$  et de  $\bar{\alpha}$ .

Le nombre de cycles de  $\bar{\sigma}$  est aussi celui de  $\sigma$ , ainsi

$$z(\bar{\sigma}) = |S|.$$

Pour tout sommet  $s$  de  $H$ , on a  $\lambda\alpha^{-1}b_s = \lambda b_s - 1$  et ainsi  $\alpha^{-1}b_s$  appartient à un sommet  $s'$  différent de  $s$ , mais  $\alpha^{-1}b_s$  peut être ou non égal à  $b_{s'}$ , brin de  $s'$  d'image minimale par  $\lambda$ . Désignons par  $\bar{S}$  l'ensemble des sommets  $\bar{s}$  tels que  $\alpha^{-1}b_{\bar{s}} = b_{s'}$ .

Ainsi tout sommet  $s \neq s_0$  de  $S \setminus \bar{S}$  donne naissance à deux brins distincts de  $\bar{B}$ , un sommet de  $\bar{S}$  ne donne naissance qu'à un seul brin de  $\bar{B}$ . On obtient alors la relation :

$$|\bar{B}| = 2(|S| - 1) - |\bar{S}|.$$

A chaque sommet  $s \neq s_0$  de  $S \setminus \bar{S}$  on associe l'hyperarête contenant  $b_s, \alpha^{-1}b_s$ ; aux sommets appartenant à  $\bar{S}$  sont associées des hyperarêtes déjà existantes, ainsi :

$$z(\bar{\alpha}) = |S| - 1 - |\bar{S}|.$$

Calculons le genre de l'hypercarte  $\bar{H}$  dont on sait qu'il est positif ou nul.

$$\begin{aligned} g(\bar{H}) &= 1 + \frac{1}{2} [ |\bar{B}| - z(\bar{\sigma}) - z(\bar{\alpha}) - z(\bar{\alpha}^{-1}\bar{\sigma}) ] \\ &= 1 + \frac{1}{2} [ 2|S| - 2 - |\bar{S}| - |S| + |\bar{S}| + 1 - |S| + z(\bar{\alpha}^{-1}\bar{\sigma}) ] \\ &= 1 + \frac{1}{2} (-z(\bar{\alpha}^{-1}\bar{\sigma}) - 1) \end{aligned}$$

$g(\bar{H}) \geq 0$  implique alors  $z(\bar{\alpha}^{-1}\bar{\sigma}) \leq 1$ , or une permutation ne peut pas avoir moins d'un cycle et ainsi  $z(\bar{\alpha}^{-1}\bar{\sigma}) = 1$  et  $g(\bar{H}) = 0$ .

La propriété I.3 est ainsi démontrée.

Une hypercarte n'ayant qu'une seule face généralisée la notion d'arbre (carte n'ayant qu'une seule face), nous appellerons une telle hypercarte un hyperarbre. On peut montrer qu'elle est sans cycle et que toute adjonction de brin crée un cycle, c'est donc une bonne généralisation des arbres.  $\bar{H}$  est ainsi un hyperarbre recouvrant l'hypercarte  $H$ .

2. DEUX PROPRIÉTÉS FINES DU CODE DES HYPERCARTES UNIFORMES.

Nous désirons "transférer" un brin d'un sommet  $s$  à un sommet adjacent, pour que cette opération soit "réversible" il faut que la carte obtenue ait même hyperarbre sous-jacent et même numérotation des brins. Ceci ne peut être réalisé dans tous les cas ; nous donnons ici un cas (qui généralise [13]) pour lequel les conditions que nous imposons sont réalisées : il s'agit des hypercartes uniformes de rang  $\kappa$  dont les sommets ont des degrés divisibles par  $\kappa$ .

Hypercarte uniforme : Une hypercarte est dite uniforme de rang  $\kappa$  si toutes ses hyperarêtes ont  $\kappa$  éléments.

Propriété I.4. : Soit  $h$  le mot codant une hypercarte  $H$  planaire pointée uniforme de rang  $\kappa$  ; soient :

$$\sigma = \bar{f} \text{ où } f = \pi_2(h)$$

$$\alpha \text{ la permutation associée à } g = \pi_1(h) \text{ comme mot de } L_\infty$$

$s$  un sommet de  $H$  différent du sommet distingué ( $1 \notin S$ )

satisfaisant :

(i)  $\alpha^{-1}(b_s)$  n'est pas le plus grand élément de  $s' = \gamma(s)$

(ii)  $|B_s|$  est divisible par  $\kappa$ .

Alors le brin  $u = \sigma \alpha^{-1} b_s$  vérifie :

$$\alpha^{-1} u > \alpha^{-1} b_s .$$

Démonstration : (1). Considérons la partition de  $B$  en deux sous-ensembles  $B_s$  et  $B'_s = B \setminus B_s$  : il existe une hyperarête de  $H$  qui a des éléments à la fois dans  $B_s$  et  $B'_s$ . Soit  $b_s \in B_s$  et  $\alpha^{-1}(b_s) \in B'_s$ , les hyperarêtes étant toutes de rang  $\kappa$  et  $B_s$  ayant un nombre d'éléments divisible par  $\kappa$ , il existe donc au moins une autre hyperarête ayant à la fois des éléments dans  $B_s$  et dans  $B'_s$ . Soit ainsi  $b_1$  un brin, différent de  $b_s$ , tel que  $b_1 \in B_s$  et  $\alpha^{-1}b_1 = b_2 \in B'_s$ .

(2). Pour tout brin  $b$ , différent de  $b_s$ , appartenant à  $B_s$  et vérifiant  $\alpha^{-1}b \notin B_s$ , on a :  $\alpha^{-1}b > b$ . Sinon  $B_s$  étant un intervalle de  $[n]$ , d'après la propriété I.2,  $\alpha^{-1}b \notin B_s$  implique alors  $\alpha^{-1}b < b_s$ . Soit  $s'$  le sommet de  $b$ ,  $b_s$  appartient à  $B_s$ , ainsi :  $\alpha^{-1}b < b_s \leq b_s$ , et  $\alpha^{-1}b < \alpha^{-1}b_s = b_{s,-1}$ , ce qui est contraire à la condition (3) de la Propriété V.2 du chapitre premier. En particulier, pour  $\alpha^{-1}b_1 = b_2$ , on a  $b_s < b_1 < b_2$ .

(3). Par la condition (i)  $\alpha^{-1}b_s = b_{s,-1}$ , n'est pas le plus grand élément de  $s' = \gamma(s)$ . Ainsi  $u = \sigma\alpha^{-1}b_s$  n'est pas le plus petit élément de  $s'$  et, puisque  $g(\sigma, \zeta_n) = 0$ ,  $u = \sigma\alpha^{-1}b_s > \alpha^{-1}b_s > b_{s,-1}$ . Puisque  $u$  n'appartient évidemment pas à  $B_s$ ,  $u$  est plus grand que  $b_s$  donc que tous les éléments de  $B_s$ .

(4). Tout élément compris entre  $b_s$  et  $u$  appartient à  $B_s$ . En effet d'après l'algorithme de codage après avoir numéroté tous les éléments de  $B_s$ , on ne peut numéroté un brin par la procédure (A) (on obtiendrait encore un élément de  $B_s$ ) de même on ne peut appliquer la procédure (B). Ainsi l'élément numéroté immédiatement après tous les éléments de  $B_s$  l'est par la procédure (C). Ce ne peut être que  $\sigma(b_{s,-1})$  puisque ce brin,  $u$ , n'est pas encore numéroté et que les  $\sigma b$  pour  $b \geq b_s$  sont déjà numérotés. On a ainsi :  $b_s < b_1 < u \leq b_2$ .



(5). Les conditions du lemme IV.3 du chapitre premier sont alors remplies  $\alpha b_2 = b_1 < b_2$  et  $g(\alpha, \zeta_n) = 0$ , donc :  $b_1 \leq \alpha u \leq b_2$  en appliquant ce lemme  $p$  fois :  $b_1 \leq \alpha u \leq b_2$ , ainsi puisque les cycles de  $\alpha$  sont finis :  $b_1 \leq \alpha^{-1}u \leq b_2$  et  $\alpha^{-1}u > \alpha^{-1}b_s$ . La propriété est ainsi démontrée.

Remarquons que les conditions de planarité de  $H$ , les conditions (i) et (ii) sont indispensables pour la démonstration de cette propriété comme le montrent les contre-exemples suivants.

Contre-exemple (1).  $\sigma = (1,2,5,6)(3,4)$   
 $\alpha = (1,5)(2,3)(4,6)$   
 $s = \{3,4\}$

$|B_s| = 2$  et l'hypercarte  $H$  est une carte, donc uniforme de rang 2.  $\alpha^{-1}b_s = \alpha^{-1}3 = 2$  n'est pas l'élément le plus grand de  $\{1,2,5,6\}$  par contre  $\alpha^{-1}\sigma 2 = \alpha^{-1}5 = 1$  est plus petit que  $\alpha^{-1}b_s = 2$ .

Remarquons que  $g(\sigma, \alpha) = 1$ .

Contre-exemple (2).  $\sigma = (1,5,7,8,9,15)(2,3,4)(6)(10,11,12)(13,14)$   
 $\alpha = (1,2,3)(4,8,15)(5,6,7)(9,10,11)(12,13,14)$

On a bien  $g(\sigma, \alpha) = 0$ .

En posant  $s = \{10,11,12\}$   $\alpha^{-1}(b_s) = \alpha^{-1}(10) = 9$  n'est pas le plus grand élément de  $s' = \{1,5,7,8,9,15\}$ ; par contre  $|B_s| = 5$  n'est pas divisible par 3 et  $u = \alpha^{-1}b_s = 15$  vérifie  $\alpha^{-1}15 = 8 < \alpha^{-1}b_s = 9$ .

Contre-exemple (3).

$\sigma = (1,2,6,7,18,19,23,24)(3,4)(5)(8,9)(10,11,16,17)(12,13,14,15)(20,21,22)$   
 $\alpha = (1,6,19,20)(2,3,4,5)(7,8,9,10)(11,12,17,18)(21,22,23,24)(13,14,15,16)$

On a bien  $g(\sigma, \alpha) = 0$ .

En posant  $s = \{10, 11, 16, 17\}$ , on a  $B_s = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$  et  $|B_s| = 8$  est divisible par quatre, par contre  $b_s = 10$  et  $\alpha^{-1}10 = 9$  est le plus grand élément de  $s' = \{8, 9\}$  et  $u = 8$ ,  $\alpha^{-1}u = 7 < \alpha^{-1}10 = 9$ .

Propriété I.5.: Soit  $h$  le mot codant une hypercarte  $H$  planaire pointée uniforme de rang  $\kappa$  dont tous les sommets sont de degrés divisibles par  $\kappa$ . Alors le brin le plus grand du sommet distingué  $s_0$  n'appartient pas à l'arbre sous-jacent  $\bar{H}$  de l'hypercarte  $H$ .

Démonstration : Soit  $b_1$  le brin le plus grand du sommet distingué  $s_0$ , nous supposons que  $b_1 = \alpha^{-1}b_s$  et nous aboutissons à une contradiction.

(1). Si  $b_1 = \alpha^{-1}b_s$  alors  $b > b_1$  implique  $b \in B_s$ .

En effet soit  $b$  tel que  $b > b_1$  et  $s$  le sommet de  $b$ . Soit  $m$  le plus petit entier tel que  $\gamma^m s' = s_0$ , posons  $s_1 = \gamma^{m-1}(s')$  ( $s_1 \neq s_0$ ). Supposons  $s_1$  différent de  $s$ , par définition de  $\gamma$   $\alpha^{-1}b_{s_1}$  appartient à  $s_0$  donc  $\alpha^{-1}b_{s_1} \leq b_1$ , l'inégalité est même stricte car  $\alpha^{-1}b_s = b_1$  et  $s \neq s_1$ , ainsi  $b_{s_1} = \alpha^{-1}b_{s_1} + 1$  est inférieur ou égal à  $b_1$ .

Or  $B_{s_1}$  et  $B_s$  sont disjoints, car ils ne peuvent être inclus l'un dans l'autre, puisque  $\gamma(s_1) = \gamma(s) = s_0$ . (Pour deux sommets  $s$  et  $s'$  quelconques  $B_s$  et  $B_{s'}$  sont disjoints ou l'un contient l'autre).  $B_{s_1}$  et  $B_s$  étant deux intervalles de  $[n]$  disjoints, les relations suivantes sont impossibles :

$$b_{s_1} < b_1 < b_s < b$$

car  $b_{s_1}$  et  $b$  appartiennent à  $B_{s_1}$  et  $b_s$  appartient à  $B_s$ . Ainsi  $s_1 = s$  et  $b$  appartient à  $B_s$ .

(2). Une des hyperarêtes de  $H$  possède des éléments à la fois dans  $B_s$  et dans  $B \setminus B_s$  puisque  $\alpha b_1 = b_s$  et que  $b_1 \notin B_s$ . Or  $B_s$ , réunion de sommets ayant des degrés divisibles par  $\kappa$ , a un nombre d'éléments divisible par  $\kappa$ . Les hyperarêtes ayant toutes  $\kappa$  éléments, il existe au moins une autre hyperarête ayant des éléments dans  $B_s$  et dans son complémentaire.

Ainsi  $\alpha b_2 = b_3$  où  $b_2 \in B \setminus B_s$ ,  $b_3 \in B_s$ .

On a donc nécessairement :

$$b_3 > b_s \text{ car } b_s \text{ est le plus petit élément de } B_s$$

$$b_2 < b_s \text{ d'après (1).}$$

Ainsi :  $b_2 < b_1 < b_s < b_3$ , car  $g(b_1, \alpha) = 0$ .

Or  $\alpha^{-1} b_3 = b_2$  strictement plus petit que  $b_s$  est contradictoire avec la façon dont est effectué le codage (Procédure (A)).

D'où le résultat.

### 3. LE TRANSFERT ÉLÉMENTAIRE.

Le transfert peut se décomposer en une suite d'opérations élémentaires. Celles-ci associent à toute hypercarte pointée planaire une hypercarte ayant mêmes brins, mêmes hyperarêtes mais où le degré d'un sommet  $s$  choisi (différent du sommet distingué  $s_0$  et de degré supérieur à 1) diminue d'une unité au bénéfice du sommet  $\gamma(s)$ . Plus précisément :

Définition de  $t_s(H)$ . Soit  $h$  un mot codant l'hypercarte planaire pointée  $H = (\sigma, \alpha, 1)$  où  $\sigma = \overline{\pi_2(h)}$  et où  $\alpha$  est la permutation associée à  $\pi_1(h)$  comme mot de  $L_\infty$  (ainsi la permutation circulaire construite par l'algorithme du codage est  $\zeta_n$ ). Soit  $s$  un sommet de  $H$  de degré strictement supérieur à 1, on définit  $H' = t_s(H)$  par :

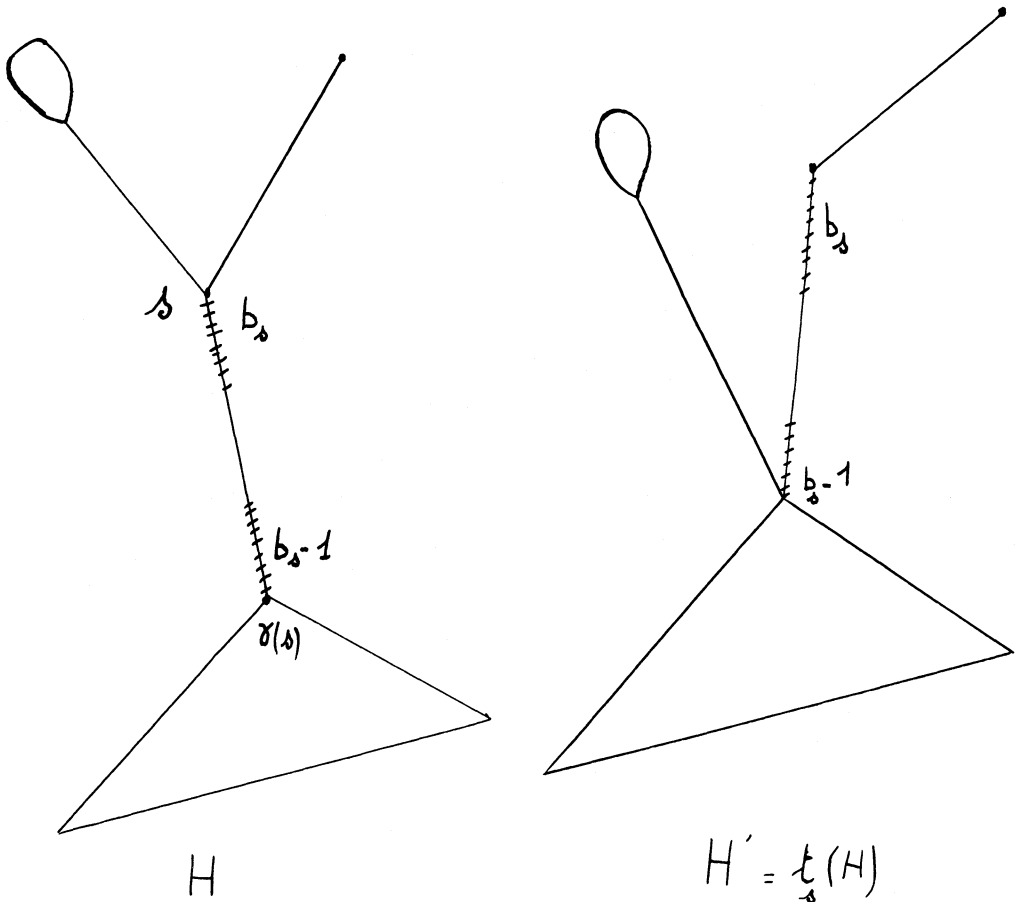
APPLICATIONS COMBINATOIRES

$H = (\sigma', \alpha, 1)$  où  $\sigma'$  est donné par :  
 $\sigma' u = \sigma u$  sauf pour  $u = b_s - 1, \sigma^{-1} b_s$  et  $\sigma^{-2} b_s$ .

Pour ces trois brins :

$$\begin{aligned} \sigma'(b_s - 1) &= \sigma^{-1}(b_s) \\ \sigma'(\sigma^{-1} b_s) &= \sigma(b_s - 1) \\ \sigma'(\sigma^{-2} b_s) &= b_s. \end{aligned}$$

Ainsi  $H'$  est obtenue à partir de  $H$  en supprimant dans le sommet  $s$  le brin de numérotation la plus grande ( $\sigma^{-1} b_s$ ) et en l'intercalant entre  $b_s - 1$  et  $\sigma(b_s - 1)$  dans le sommet  $\gamma(s)$ . (Voir figure).



Il résulte immédiatement de la construction de  $\sigma'$  que le couple  $(\sigma', \alpha)$  opère transitivement sur l'ensemble des brins  $[n]$ , ainsi  $H'$  est bien une hypercarte.

On a de plus la propriété suivante :

Propriété I.6. (Descente des brins) : L'hypercarte  $H' = t_s(H)$  est planaire et l'algorithme de codage lui associe la permutation circulaire  $\zeta_n$ .

Soit  $f = \pi_2(h)$  (on sait que  $\sigma = \bar{f}$ ), soit  $f'$  le mot obtenu à partir de  $f$  en remplaçant la  $\sigma^{-1}(b_s)$  ième lettre (qui est une lettre représentant le sommet  $s$ ) par une lettre représentant le sommet  $\gamma(s)$ . D'après les diverses remarques faites sur le codage et d'après la définition de  $\sigma'$ , on a  $\bar{f}' = \sigma'$ .

De par sa construction  $f'$  est un emboitement (la vérification se fait immédiatement), ainsi  $g(\zeta_n, \bar{f}') = 0$ . De plus  $g(\zeta_n, \alpha) = 0$ , du fait que  $\pi_1(h)$  appartient à  $L_\infty$ , donc d'après la propriété V.1 du chapitre premier  $g(\sigma', \alpha) = 0$ . L'hypercarte  $H'$  est ainsi planaire.

Pour démontrer que l'algorithme du codage associe bien  $\xi_n$  à l'hypercarte  $(\sigma', \alpha, 1)$ , nous vérifions que le mot  $h'$  (donné par  $\pi_1(h') = \pi_1(h)$  et  $\pi_2(h') = f'$ ) est bien le code d'une hypercarte planaire pointée (qui est alors nécessairement  $H'$ ), ceci en utilisant la caractérisation de ces codes donnée par la propriété V.2 du chapitre premier.

- Les conditions (1) et (2) énoncées dans cette propriété sont satisfaites, comme il a été vu plus haut, reste à vérifier la condition (3).

-  $\alpha^{-1}(f'_i) = f'_{i-1}$  est immédiat pour tous les  $f'_i$  ne représentant ni  $s$  ni  $\gamma(s)$ ;

- pour  $s$   $\alpha^{-1}(f'_{i_s}) = \alpha^{-1}(b_s) = b_s - 1$ , car  $b_s$  est élément de  $s$  et  $b_s - 1$  élément de  $\gamma(s)$ ;

APPLICATIONS COMBINATOIRES

- pour  $s' = \gamma(s)$  la seule modification est l'adjonction du brin  $\sigma^{-1}(b_s)$ , or  $\sigma^{-1}(b_s) > b_s > b_s-1 \geq b_{\gamma(s)}$ , ainsi  $b_{\gamma(s)}$  reste le plus petit brin de  $\gamma(s)$  et  $\alpha^{-1}(f'_{i_{s'}}) = \alpha^{-1}(f_{i_s})$  ;

-  $\alpha^{-1}(j) \geq f'_{i_s}-1$  est vérifié immédiatement pour tous les  $\gamma$  distincts de  $\sigma^{-1}(b_s)$ , puisque il y a égalité de  $f_i$  et  $f'_{i_s}$  de  $f(j)$  et de  $f'(j)$  ;

-  $\alpha^{-1}(\sigma^{-1}(b_s))$  est supérieur à  $b_s-1$  (puisque  $h$  est le code de l'hypercarte  $H$ ), or  $b_s-1$  appartenant à  $s'$  est supérieur ou égal à  $b_s$ , ainsi :

$$\alpha^{-1}(\sigma^{-1}(b_s)) > b_s-1 \geq b_s > b_{s'}-1 .$$

Ainsi tous les brins de  $H'$  vérifient la condition (3),  $h'$  est bien le code de  $H'$  et  $\zeta_n$  est bien associée à  $H'$  par l'algorithme du codage.

L'opération  $t_s$  n'est pas toujours réversible, par contre une condition suffisante de réversibilité est la suivante :

Propriété I.7. (remontée des brins) : Soit  $h'$  un mot codant l'hypercarte planaire pointée  $(\sigma', \alpha', 1)$  où  $\sigma' = \overline{\pi_2(h')}$  et où  $\alpha'$  est associée à  $\pi_1(h')$  comme mot de  $L_\infty$ . Soit  $s$  un sommet de cette hypercarte tel que le brin  $\sigma' \alpha'^{-1} b_s = u$  vérifie  $\alpha^{-1}(u) > \alpha^{-1}(b_s)$ . Alors il existe une hypercarte  $H = (\sigma, \alpha', 1)$  telle que  $H' = t_s(H)$  ; de plus  $H$  est planaire et l'algorithme du codage lui associe la permutation  $\zeta_n$ .

Définissons  $\sigma$  à partir de  $\sigma'$  par :

-  $\sigma$  est identique à  $\sigma'$  sur  $B$  sauf pour  $b_s-1$ ,  $\sigma'(b_s-1)$  et  $\sigma'^{-1}(b_s-1)$  ;

- pour ces trois brins,  $\sigma$  est donné par :

$$\sigma(b_s-1) = \sigma'^2(b_s-1)$$

$$\sigma(\sigma'(b_s-1)) = b_s$$

$$\sigma(\sigma'^{-1} b_s) = \sigma'(b_s-1) .$$

Il est clair que  $\sigma$  est une permutation, que le couple  $\sigma, \alpha'$  opère transitivement, ainsi  $(\sigma, \alpha', 1)$  est une hypercarte pointée.

Nous commençons par démontrer que  $H$  est planaire et que l'algorithme du codage lui associe  $\zeta_n$ , nous en déduisons alors que  $t_s(H) = H'$ , (la seule difficulté pour la démonstration de ce dernier résultat est que  $\gamma$  associé à  $\sigma, \alpha'$  peut ne pas être la même que  $\gamma'$ , en particulier si  $\gamma(s) \neq \gamma'(s)$ , on n'aura pas  $t_s(H) = H'$ ).

Pour la première partie, on opère comme dans la propriété précédente :

- on définit  $f$  à partir de  $f'$  en remplaçant la  $\sigma'(b_s-1)^{\text{ième}}$  lettre (qui est une lettre représentant  $s' = \gamma'(s)$ ) par une lettre représentant  $s$  ;

- il est immédiat que  $\bar{f} = \sigma$  et que  $f$  est un emboitement ;

- alors  $g(\zeta_n, \bar{f}) = g(\zeta_n, \alpha') = 0$  entraîne  $g(\sigma, \alpha') = 0$  et  $H'$  est planaire ;

- on définit  $h$  à partir de  $f = \pi_2(h)$  et  $\pi_1(h') = \pi_1(h)$ .

On démontre alors que  $h$  est le code d'une hypercarte (qui ne peut être que  $H$ ) en utilisant la caractérisation de ces codes. Les seules difficultés qui peuvent se présenter, proviennent du brin  $u$  qui a été transféré. Ce brin ne peut être le brin de plus faible numérotation de  $s'$  sinon on aurait  $\alpha^{-1}(u) = u-1$  et on a supposé  $\alpha^{-1}(u) > \alpha^{-1}(b_s)$  or  $\alpha^{-1}(b_s) = b_s-1$  appartient à  $s'$ .  $u$  n'appartient pas à  $B_s$  et est plus grand que  $b_s-1$  donc que  $b_s$  donc que tous les éléments de  $B_s$ . Enfin, la condition  $\alpha^{-1}(u) > \alpha^{-1}(b_s)$  nécessaire pour la partie (3) de la caractérisation est donnée comme hypothèse.

- Il résulte de ce que nous venons de voir que  $b_s$  est aussi le brin de plus faible numérotation de  $s$  dans  $H$ , ainsi  $\gamma(s)$  est le sommet auquel appartient  $\alpha^{-1}(s)$  qui reste dans  $s' = \gamma'(s)$ . Donc  $\gamma(s) = \gamma'(s)$  la construction de  $\sigma$  à partir de  $\sigma'$  est alors l'opération inverse de celle de  $t_s(H)$ , on a ainsi  $H' = t_s(H)$ .

#### 4. HYPERCARTES ÉTIQUETÉES.

La définition du transfert élémentaire a fait apparaître la nécessité de pouvoir donner un nom au sommet à partir duquel est effectué ce transfert. C'est pourquoi, on introduit la notion suivante :

Définition : Une hypercarte pointée ayant  $k+1$  sommets est dite étiquetée si on se donne une bijection  $\epsilon$  (étiquetage) de l'ensemble des sommets de cette hypercarte sur  $\{0\} \cup [k]$ , telle que le sommet distingué ait pour image 0. Deux hypercartes pointées étiquetées sont isomorphes si elles le sont en tant qu'hypercartes pointées et si la bijection qui les échange conserve l'étiquetage des sommets.

On étend l'application  $\epsilon$  à  $B$  en posant  $\epsilon(b) = i$  si et seulement si  $b$  appartient au sommet  $s$  tel que  $\epsilon(s) = i$ .

#### Codage :

Le codage des hypercartes pointées planaires étiquetées se fait de manière analogue à celui des hypercartes pointées planaires (non étiquetées) comme suit :

- soit  $(\sigma, \alpha, b^*, \epsilon)$  une telle hypercarte, l'algorithme de codage associé à  $(\sigma, \alpha, b^*)$  la permutation circulaire  $\zeta$  ;
- soit  $\lambda$  la bijection entre  $B$  et  $[n]$  telle que  $1 = \lambda b^*$  et  $\lambda \zeta \lambda^{-1} = \zeta_n$ . Soient  $\tilde{\alpha} = \lambda^{-1} \alpha \lambda$  et  $\tilde{\sigma} = \lambda^{-1} \sigma \lambda$ .  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\sigma}$  vérifient  $g(\zeta_n, \tilde{\alpha}) = g(\zeta_n, \tilde{\sigma}) = 0$  ;



- soit  $g$  le mot de  $L_\infty$  associé à  $\tilde{\alpha}$  (Théorème II).  
 - soit  $f$  le mot défini comme suit : la  $j$ -ième lettre de  $f$  est  $x_i$  si et seulement si  $\lambda^{-1}(j)$  est un brin du sommet  $s$  étiqueté  $i$  (tel que  $\epsilon(s) = i$ ), il est alors clair que  $\bar{f} = \tilde{\sigma}$  (car d'une part  $g(\zeta_n, \tilde{\alpha}) = g(\zeta_n, \bar{f}) = 0$  et d'autre part  $\bar{f}$  et  $\tilde{\sigma}$  ont même équivalence de transitivité)  $f$  est un mot emboîté, mais n'est pas nécessairement un emboîtement .

- enfin le code  $h$  de  $(\sigma, \alpha, b^*, \epsilon)$  est construit par

$$\pi_1(h) = g$$

$$\pi_2(h) = f .$$

Caractérisation :

Celle-ci est analogue à la propriété V.2 du chapitre premier en remplaçant la condition (2) par la condition suivante :

(2)'  $\pi_2(h) = f$  est un mot emboîté commençant par  $x_0$  et contenant au moins une occurrence de chacune des lettres  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  .

Propriétés :

Toutes les propriétés (algébricité, construction de  $\gamma$ , de  $\bar{H}$ , etc...) vraies pour les hypercartes non étiquetées restent vraies pour celles qui sont étiquetées. En particulier la construction du transfert élémentaire et les propriétés afférentes (I.6 et I.7) restent vraies sans changer un seul mot.

5. LE THEOREME DE TRANSFERT.

Soit  $d = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_k)$  un vecteur à composantes entières positives. Soit  $H_p(d)$  l'ensemble de toutes les hypercartes planaires pointées étiquetées régulières de degré  $p$  (toutes les hyperarêtes ont  $p$  éléments) telles que le sommet étiqueté  $i$  ait pour degré  $d_i$  .

Théorème VI.: Soient  $d$  et  $d'$  deux vecteurs tels que :

$$d_j = d'_j = p \cdot n_j \text{ pour } j \neq 0 \text{ et } j \neq i, \quad d_0 = p \cdot n_0 - 1 \text{ et } d'_0 = p \cdot n_0 ;$$

$$d_i = p \cdot n_i + 1 \text{ et } d'_i = p \cdot n_i \quad (n_j \geq 0 \text{ pour } j = 0, \dots, \kappa) .$$

Il existe une bijection  $T$  entre  $H_p(d)$  et  $H_p(d')$ .

De plus, si  $H = (\sigma, \alpha, 1, \epsilon)$  ,  $T(H) = (\sigma', \alpha, 1, \epsilon)$  et l'algorithme de codage  
associe  $\zeta_n$  à  $T(H)$  .

Construction de  $T$  :

Soit  $H$  une hypercarte élément de  $H_p(d)$  et  $s$  le sommet étiqueté  $i$  , considérons la suite  $s_1 = \gamma(s)$  ,  $s_2 = \gamma(s_1)$  , ..... nécessairement cette suite atteint le sommet  $s_0$  soit ainsi  $s_1 \neq s_0$  et  $s_{1+1} = \gamma(s_1) = s_0$  .

Nous allons construire la suite d'hypercartes planaires pointées et étiquetées :

$$H_1 = t_s(H), H_2 = t_{s_1}(H_1) \dots \dots \dots ; H_{1+1} = t_{s_1}(H_1) = T(H) ;$$

cette suite est bien définie car dans  $H$  le sommet  $s$  a pour degré  $pn_i + 1$  qui est strictement supérieur à 1 (et même à 2). De même dans  $H_1$ ,  $s_1$  a un degré strictement supérieur à 1 , etc... ; il est clair que  $T(H)$  est bien une hypercarte pointée étiquetée telle que le sommet étiqueté  $j$  a pour degré  $d'_j$  , elle est planaire car on a vu (Propriété I.6) que si  $H$  est planaire  $t_s(H)$  l'est .  $T(H)$  appartient bien à  $H_p(d')$  .

Construction de  $T^{-1}$  :

Soit  $H'$  un élément de  $H_p(d')$  , soit  $s$  le sommet étiqueté  $i$  , soit comme plus haut  $s_1 = \gamma(s)$  ,  $s_2 = \gamma(s_1)$  ....  $s_{1+1} = s_0 = \gamma(s_1)$  . La propriété I.5 est applicable à l'hypercarte  $H'$  , ainsi le brin le plus grand de  $s_0$  n'appartient pas à  $\bar{H}'$  et  $\alpha^{-1}(b_{s_1})$  n'est pas

le brin le plus grand de  $s_0$ , ainsi d'après la propriété I.4 le brin  $u_1 = \sigma'(\alpha^{-1}b_{s_1})$  vérifie  $\alpha^{-1}u_1 > \alpha^{-1}b_{s_1}$ . L'hypercarte  $H'$  vérifie les conditions de la propriété I.7 pour le sommet  $s_1$ , il existe donc une carte  $H_1$  (et une seule) telle que  $t_{s_1}(H_1) = H'$ .

Le brin devient alors élément du sommet  $s_1$  et c'est le plus grand élément de ce sommet, ainsi  $\alpha^{-1}(b_{s_{1-1}})$  n'est pas le brin le plus grand de  $s_1$  dans  $H_1$  et en appliquant I.4 le brin  $u_{1-1} = \sigma'_1 \alpha^{-1} b_{s_{1-1}}$  vérifie  $\alpha^{-1}u_{1-1} > \alpha^{-1}b_{s_{1-1}}$ . On définit alors (par la propriété I.7) une hypercarte  $H_{1-1}$  telle que  $H_1 = t_{s_{1-1}}(H_{1-1})$ , cette opération se répète jusqu'à ce que l'on obtienne  $H = t_s^{-1}(H_1)$ . Il est alors clair que  $H$  est la seule hypercarte telle que  $H' = T(H)$  et que  $H \in H_p(d)$ .  $T$  est bien une bijection.

## 6. APPLICATIONS A L'ÉNUMÉRATION.

- En posant  $p = 2$ , on obtient comme dans [13] et [14] le nombre de cartes planaires pointées étiquetées eulériennes (tous les sommets ayant un degré pair) ou quasi-eulériennes (2 sommets seulement de degré impair) en transférant tous les brins (sauf 2 pour chaque sommet) sur le sommet distingué. Nous renvoyons le lecteur à ces publications pour le détail du calcul.

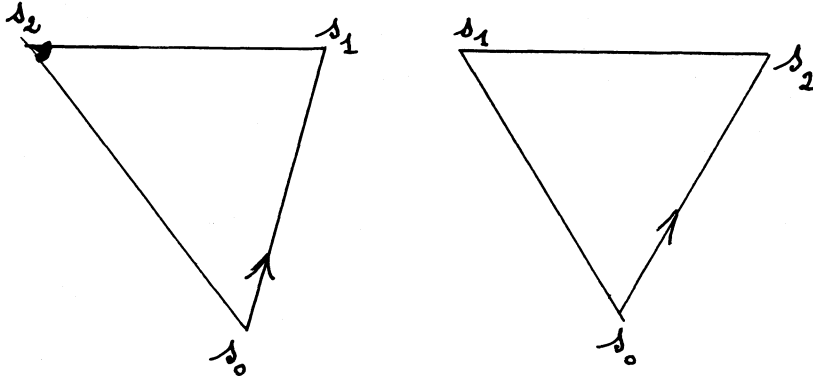
- On déduit aussi de ces calculs et de la propriété II.3 du chapitre premier le nombre de " $k$ -dissections planaires paires" du fait de la bijection établie entre celles-ci et les cartes.

- On remarque enfin qu'il faut être très attentif, comme dans tous les problèmes combinatoires, sur la définition exacte des objets à énumérer ainsi :

APPLICATIONS COMBINATOIRES

- il y a 2 hypercartes planaires pointées étiquetées dans

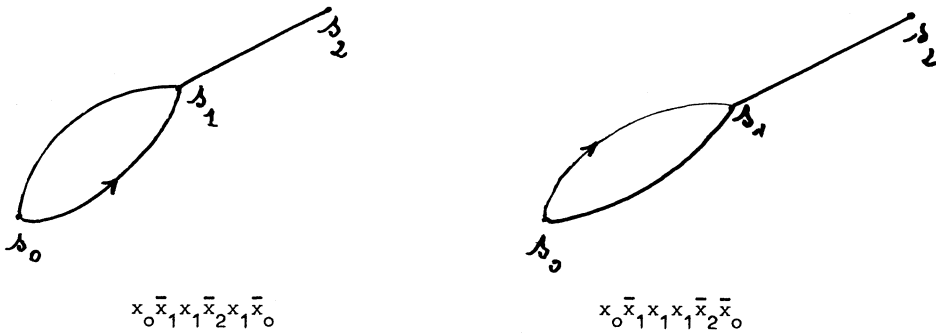
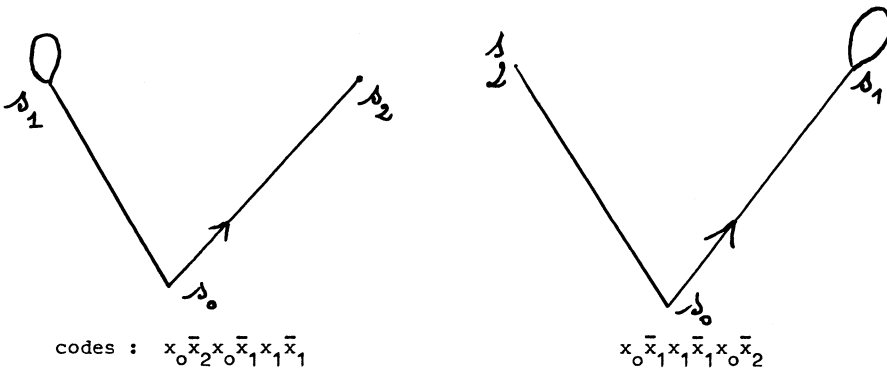
$H_2(2,2,2)$  qui sont :



- il y a aussi 2 hypercartes pointées étiquetées ayant

pour système de degré 2,2,2 (les mêmes). Par contre, il y a 4 éléments

dans  $H_2(2,3,1)$  qui sont :



## CODE DES GRAPHERS PLANAIRES

et il y a 8 hypercartes pointées étiquetées planaires dont le sommet distingué a degré 2 et dont le système de degré est  $(2,3,1)$ , car on peut échanger  $s_1$  et  $s_2$ .

Enfin si on n'étiquette pas, il y a une seule hypercarte planaire pointée dont le système de degré est  $2,2,2$  et il y a 4 hypercartes planaires pointées dont le sommet distingué a degré 2 et ayant pour système de degré  $(2,3,1)$ .

II. UN CODE SUR QUATRE LETTRES.

1. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES  $B_s$ .

Dans le paragraphe précédent, nous avons construit pour toute hypercarte  $H$  une application (arborescente)  $\gamma$  de l'ensemble des sommets de  $H$  dans lui-même. Cette application permet d'associer à tout sommet  $s$  l'ensemble  $S_s$  des sommets  $s'$  prédécesseurs de  $s$  (tels qu'il existe  $m \geq 0$  vérifiant  $\gamma^m(s') = s$ ) et l'ensemble  $B_s$  des brins appartenant à ces sommets.

Nous avons démontré que si  $\lambda$  est la bijection de  $B$  sur  $[n]$  donnée par l'algorithme de codage  $\lambda B_s$  est un intervalle de  $[n]$ . Nous donnons dans ce paragraphe deux propriétés (très simples) des  $B_s$  qui nous seront utiles dans la suite.

Propriété II.1.: Pour tout couple de sommet  $s_1$  et  $s_2$   $B_{s_1} \cap B_{s_2} \neq \emptyset$  implique  $B_{s_1} \subseteq B_{s_2}$  ou  $B_{s_2} \subseteq B_{s_1}$ .

Preuve : Si  $B_{s_1} \cap B_{s_2} \neq \emptyset$ , soit  $b$  un brin appartenant à ces deux ensembles. Le sommet  $s$  auquel appartient ce brin est alors élément de  $S_{s_1}$  et de  $S_{s_2}$ , ainsi il existe  $m_1$  et  $m_2$  tels que:

$$\gamma^{m_1}(s) = s_1 \text{ et } \gamma^{m_2}(s) = s_2.$$

Si  $m_1$  est supérieur ou égal à  $m_2$ ,  $\gamma^{m_1 - m_2}(s_2) = \gamma^{m_1}(s) = s_1$ , ainsi  $s_2$  appartient à  $S_{s_1}$  et tout élément de  $S_{s_2}$  est élément de  $S_{s_1}$ , ce qui implique  $B_{s_2} \subseteq B_{s_1}$ .

Si  $m_2$  est supérieur à  $m_1$ , on trouverait de la même façon  $\gamma^{m_2 - m_1}(s_1) = \gamma^{m_2}(s) = s_2$  et  $B_{s_1} \subseteq B_{s_2}$ .

Propriété II.2.: Pour qu'un brin  $b$  appartienne au sommet  $s$ , il faut et il suffit que  $b$  appartienne à  $B_s$  et que pour tout sommet  $s'$  ( $\neq s$ ), prédécesseur de  $s$ ,  $b$  n'appartienne pas à  $B_{s'}$ .

En effet, si  $b$  appartient à  $B_s$  c'est qu'il appartient à un sommet  $s'$  tel que  $\gamma^m(s') = s$ . Si  $s'$  est distinct de  $s$ ,  $b$  appartient alors à  $B_s$ .

Si  $b$  appartient à  $s$ ,  $b$  appartient à  $B_s$  et puisque  $s$  n'est pas prédécesseur d'un de ses prédécesseurs ( $\gamma$  étant une application arborescente)  $b$  n'appartient pas à  $B_s$ .

## 2. CONSTRUCTION D'UN LANGAGE INTERMÉDIAIRE.

Nous effectuons, dans ce paragraphe, une étape dans la construction du langage  $L$  codant les cartes planaires pointées écrit sur un alphabet à 4 lettres. Nous partons du langage  $L_{k+1}$  (codant les cartes planaires pointées ayant  $k+1$  sommets) défini dans la partie VI du chapitre premier ; en ajoutant deux lettres  $x$  et  $\bar{x}$  à l'alphabet  $Y_k$  et en opérant quelques transformations nous obtenons un langage que nous noterons  $\bar{L}_{k+1}$ . Dans le prochain paragraphe, nous construirons  $L$  en faisant la réunion des  $\bar{L}_{k+1}$  pour  $k \geq 0$  et en appliquant un morphisme.

Commençons par définir  $\bar{L}_{k+1}$ .

Soit  $h$  un mot de  $L_{k+1}$  qui code la carte planaire pointée  $(\sigma, \alpha, 1)$  où  $\sigma = \overline{\pi_2(h)}$  et où  $\alpha$  est l'involution sans point fixe associée à  $\pi_1(h)$  comme mot de  $L_1$ , nous construisons le mot  $\bar{h}$  comme suit :

- Puisque  $\lambda B_s$  est un intervalle de  $[n]$ , pour tout sommet  $s$  il correspond un facteur  $h_s$  de  $h$  dont les lettres sont en bijection avec les brins de  $B_s$  ;

- Les propriétés précédentes impliquent que les  $h_s$  n'ont de facteur commun que lorsque l'un est facteur de l'autre.

- Soit  $\bar{h}$  le mot obtenu à partir de  $h$  par insertion de la lettre  $x$  devant chaque facteur  $h_s$  (pour tout sommet  $s$  différent du sommet distingué  $s_0$ ) et de la lettre  $\bar{x}$  après chacun de ces facteurs ;

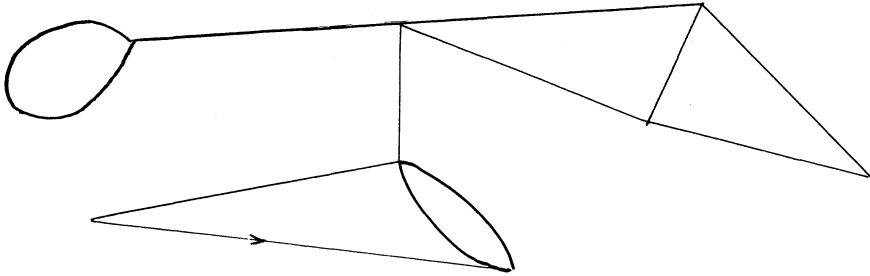
APPLICATIONS COMBINATOIRES

-  $\bar{L}_{k+1}$  est le langage formé des mots  $\bar{h}$  pour chaque mot  $h$  dans  $L_k$ .

Il est clair que l'application qui à  $h$  fait correspondre  $\bar{h}$  est une bijection, puisque connaissant  $\bar{h}$  on obtient  $h$  par suppression des lettres  $x$  et  $\bar{x}$ .

Exemple de mot de  $\bar{L}_8$ .

A la carte dessinée ci-dessous correspond le mot :



$$h = x_0 \bar{x}_7 x_7 \bar{x}_6 x_6 \bar{x}_6 x_7 \bar{x}_7 x_5 \bar{x}_5 x_4 \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_2 x_2 \bar{x}_4 x_5 \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_0 .$$

Les sous-ensembles  $B_s$  sont respectivement :

$$B_{s_7} = [24] \setminus \{1, 2, 3\} \quad B_{s_6} = \{4, 5, 6\} \quad B_{s_5} = \{9, 10, 11, 12, \dots, 22, 23\}$$

$$B_{s_4} = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\} \quad B_{s_3} = \{13, 14, 15, 16, 17\} \quad B_{s_2} = \{15, 16, 17\}$$

$$B_{s_1} = \{21, 22, 23\} .$$

Dans ces conditions, le mot  $\bar{h}$  correspondant est :

$$x_0 \bar{x}_7 x_7 \bar{x}_6 x_6 \bar{x}_6 x_7 \bar{x}_7 x_5 \bar{x}_5 x_4 \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_2 x_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5 x_5 \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_0 .$$

A partir de la caractérisation (Propriété VI.1) des mots du langage  $L_k$  et des propriétés des sous-ensembles  $B_s$ , on obtient la caractérisation suivante pour les mots de  $\bar{L}_{k+1}$ .

- Notations :
- Soit  $Y'_k$  l'alphabet  $\{x, \bar{x}\} \cup Y_k$  ;
  - Soit  $\pi, \pi'_1$  et  $\pi'_2$  les morphismes de projection suivants:



$\pi$  de  $Y'_k$  sur  $\{x, \bar{x}\}^*$  donné par  $\pi(x) = x$ ,  $\pi(\bar{x}) = \bar{x}$ ,  $\pi(x_i) = \pi(\bar{x}_i) = 1$   
 $\forall i$

$\pi'_1$  de  $Y'_k$  sur  $\{x_0, \bar{x}_0\}^*$  donné par  $\pi'_1(x_i) = x_0$ ,  $\pi'_1(\bar{x}_i) = \bar{x}_0$   $\forall i$   
 $\pi'_1(x) = \pi'_1(\bar{x}) = 1$

$\pi'_2$  de  $Y'_k$  sur  $X_k$  donné par  $\pi'_2(x) = \pi'_2(\bar{x}) = 1$   $\pi'_2(x_i) = \pi'_2(\bar{x}_i) = x_i$ .

- Soit  $L_x$  le langage défini par l'équation :

$$L_x = 1 + xL_x \bar{x} L_x .$$

Propriété II.3.: Un mot  $f$  de  $X'_k$  appartient à  $\bar{L}_{k+1}$  si et seulement si :

- (i) l'image de  $f$  par  $\pi'_1$  est un mot de  $L_1$  ;
- (ii) l'image de  $f$  par  $\pi$  est un mot de  $L_x$  ;
- (iii) la  $i$ ème occurrence de  $x$  dans  $f$  est suivie par un  $\bar{x}_{i+k-1}$  et précédée par un  $x_j$   $j > k+i-1$ .

(iv) soit  $f = f_1 x g \bar{x} f_2$  une décomposition de  $f$  telle que  $\pi(g)$  appartienne à  $L_x$  :

- Si  $x_j$  ou  $\bar{x}_j$  est occurrence de  $g$ , alors  $f_1$  et  $f_2$  ne contiennent aucune occurrence de ces lettres ;

- Soit  $f' = f'_1 g' f'_2$  l'image par  $\pi'_1$  de  $f$ , soit  $\alpha$  l'involution sans point fixe associée à  $\pi'_1(f)$  comme mot de  $L_1$ , alors  $\alpha(i) > |f'_1| + 1$  pour tout  $i$  vérifiant  $|f'_1| + 1 < i \leq |f'_1| + |g'|$ .

Preuve : (1) Si  $f = \bar{h}$  un mot de  $\bar{L}_k$ , il est clair d'après la condition (1) de la propriété VI.1 que  $\pi'_1(f) = \pi_1(h)$  appartient à  $L_1$ . D'autre part de par sa construction  $f$  vérifie  $\pi(f) \in L_x$ . La condition (iii) résulte de ce que chaque  $x$  est suivi par une lettre représentant le premier élément d'un ensemble  $B_s$  lequel est  $b_s$  qui vérifie  $\alpha^{-1} b_s = b_s^{-1}$ . La condition (iv) enfin est conséquence de ce que une telle décomposition

implique que l'ensemble des  $i$  vérifiant  $|f'_1| + 1 \leq i \leq |f'_1| + |g'|$  est un ensemble  $B_s$  (d'après la Propriété II.1) ; ainsi aucun brin de  $B \setminus B_s$  ne peut appartenir à un sommet de  $S_s$  et pour tout  $i \neq b_s$ ,  $i \in B_s$  on a  $\alpha(i) = \alpha^{-1}(i) > b_s$ .

(2) Réciproquement, si  $f$  vérifie (i), (ii), (iii) et (iv) soit  $h$  le mot obtenu en supprimant les occurrences de  $\bar{x}$ . Montrons que  $h$  vérifie alors les conditions (1); (2) et (3) de la propriété VI.1 du chapitre premier.

La condition (1)' résulte immédiatement de ce que  $f$  vérifie (i). La condition (2) pour  $h$  résulte de ce que  $f$  vérifie la condition (ii) et la première partie de la condition (iv). La condition (3) enfin est conséquence pour une part de la condition (iii) et pour sa deuxième partie de la condition (iv).

### 3. LE LANGAGE L DE LEHMAN-LENORMAND.

Il est défini sur l'alphabet  $X = \{x, \bar{x}\} \cup \{y, \bar{y}\}$ , nous notons  $\pi_x$  le morphisme de  $X^*$  sur  $\{x, \bar{x}\}^*$  ( $\pi_x(x) = x$ ,  $\pi_x(\bar{x}) = \bar{x}$ ,  $\pi_x(y) = \pi_x(\bar{y}) = 1$ ) et  $\pi_y$  le morphisme de  $X^*$  sur  $\{y, \bar{y}\}^*$  ( $\pi_y(y) = y$ ,  $\pi_y(\bar{y}) = \bar{y}$ ,  $\pi_y(x) = \pi_y(\bar{x}) = 1$ ). Pour tout mot  $f$  de  $X^*$  soit  $\delta_x(f) = |f|_x - |f|_{\bar{x}}$  et soit  $\delta_y(f) = |f|_y - |f|_{\bar{y}}$ .

Soient  $L_x$  et  $L_y$  les langages définis par les équations  $L_x = 1 + xL_x \bar{x}L_x$  et  $L_y = 1 + yL_y \bar{y}L_y$ .

Définition : Soit  $L$  le langage composé des mots  $f$  tels que :

- $\pi_x(f) \in L_x$
- $\pi_y(f) \in L_y$

et tels que pour toute décomposition de  $f$  en  $f = f_1 x g f_2$  :  $\delta_x(g) \geq 0$  et  $\delta_x(g') \geq 0$  pour tout facteur gauche  $g'$  de  $g$  impliquent  $\delta_y(g) \geq 0$ .

Remarquons que l'on peut donner de  $L$  la définition duale suivante :

Propriété II.4.: Un mot  $f$  appartient à  $L$  si et seulement si :

- $\pi_x(f) \in L_x$  ,  $\pi_y(f) \in L_y$
- pour toute décomposition de  $f$  sous la forme  $f = f_1 g \bar{y} f_2$  ,  $\delta_y(g) \leq 0$  et  $\delta_y(g'') \leq 0$  pour tous les facteurs droits  $g''$  de  $g$  impliquent  $\delta_x(g) \leq 0$  .

Soit  $f$  un mot de  $L$  et soit  $f_1 g \bar{y} f_2$  une décomposition de  $f$  vérifiant  $\delta_y(g) \leq 0$  et  $\delta_y(g'') \leq 0$  pour tout facteur droit  $g''$  de  $g$ . Supposons que  $\delta_x(g)$  soit strictement positif, soit  $g_1$  le facteur droit de  $g$  le plus court tel que  $\delta_x(g_1) > 0$ , alors  $g_1$  s'écrit  $g_1 = x g'_1$  (sinon  $g'_1$  vérifierait aussi  $\delta_x(g'_1) > 0$  et serait plus court que  $g_1$ ). Ainsi  $f = (f_1 g_2) x (g'_1 \bar{y}) f_2$ . Calculons  $\delta_x(g'_1 \bar{y})$  et  $\delta_x(g''_1)$  pour tout facteur gauche  $g''_1$  de  $g'_1$ , on a :  $\delta_x(g'_1 \bar{y}) = \delta_x(g'_1) = \delta_x(g_1) - 1 = 0$  et si  $g'_1 = g''_1 h''_1$ ,  $\delta_x(g''_1) = \delta_x(g'_1) - \delta_x(h''_1)$ ,  $\delta_x(h''_1)$  est négatif ou nul par minimalité de  $g_1$ , ainsi  $\delta_x(g''_1) = -\delta_x(h''_1) \geq 0$ . Par conséquent la décomposition de  $f$  indiquée vérifie les hypothèses données dans la définition de  $L$ , ainsi  $\delta_y(g'_1 \bar{y}) \geq 0$  et  $\delta_y(g'_1) > 0$  ce qui est contraire à ce qui a été supposé pour  $g$  puisque  $g'_1$  est facteur droit de  $g$ ;  $\delta_x(g)$  est négatif ou nul.

Réciproquement, soit  $f$  vérifiant les conditions de la propriété 4. Supposons qu'il existe une décomposition de  $f$  sous la forme  $f = f_1 x g f_2$  où  $\delta_x(g) \geq 0$  de même que  $\delta_x(g') \geq 0$  pour tout facteur gauche. Supposons que  $\delta_y(g) < 0$ , on construit alors le facteur gauche  $g_1$  de  $g$  le plus court tel que  $\delta_y(g_1) < 0$ , ainsi  $g_1 = g'_1 \bar{y}$  et  $f = (f_1) (x g'_1) \bar{y} (g_2 f_2)$ . On démontre alors que  $\delta_y(x g'_1) = 0$  et que pour tout facteur droit  $g''_1$   $\delta_y(g''_1) \leq 0$ , ainsi d'après les conditions de la propriété II.4 :  $\delta_x(x g'_1) \leq 0$  et  $\delta_x(g'_1) < 0$ , ce qui est contraire à ce qui a été supposé pour  $g$ . Ainsi  $\delta_y(g) \geq 0$  et  $f$  appartient à  $L$ .

APPLICATIONS COMBINATOIRES

Soit  $t$  l'anti-isomorphisme de  $X^*$  sur lui-même donné par  $t(x) = \bar{y}$ ,  $t(y) = \bar{x}$ ,  $t(\bar{y}) = x$ ,  $t(\bar{x}) = y$ . Alors on a :

Corollaire :  $L = t(L)$ .

On vérifie aisément que  $t(L_x) = L_y$  et que  $t(L_y) = L_x$ . Soit  $f$  un mot de  $L$ , soit  $g = t(f)$  et  $g = g_1 x h g_2$  une décomposition de  $g$  vérifiant  $\delta_x(h) \geq 0$  et  $\delta_x(h') \geq 0$  pour tout facteur gauche. On a  $f = t(g) = t(g_2) t(h) \bar{y} t(g_1)$ ,  $t(h)$  vérifie les conditions de la propriété II.4., ainsi  $\delta_x(t(h)) \leq 0$  et  $\delta_y(h) \geq 0$ .

Théorème VII.: Il existe une bijection  $\beta_k$ , conservant la longueur, entre les mots de  $L_{k+1}$  et les mots de  $L$  où apparaissent  $k$  occurrences de la lettre  $x$ .

- Construction de  $\beta_k$ .

Nous définissons  $w = \beta_k(h)$  pour tout mot  $h$  de  $L_{k+1}$ , à partir du mot  $\bar{h}$  de  $\bar{L}_{k+1}$ , par la construction suivante :

- On supprime dans  $\bar{h}$ , pour chaque occurrence de  $x$  la lettre qui se trouve immédiatement à sa gauche et la lettre qui se trouve immédiatement à sa droite (d'après (iii) il s'agit de  $x_j$  et  $\bar{x}_i$ ) ;
- On remplace toutes les occurrences de  $x_i$  ( $\forall i \geq 0$ ) par  $y$  et toutes les occurrences de  $\bar{x}_i$  par  $\bar{y}$ .

(Ainsi sur l'exemple précédent, on obtient le mot :

$w = xxyy\bar{x}\bar{y}xxxxyy\bar{x}\bar{y}x\bar{y}xy\bar{y}x\bar{x}\bar{y}$ ).

-  $w$  est un mot de  $L$ .

- $\pi_x(w) = \pi(\bar{h})$  est un mot de  $L_x$  ;
- $\pi_y(w)$  est obtenu à partir de  $\pi'_1(\bar{h})$  par suppression de  $k$  facteurs de la forme  $x_0 \bar{x}_0$  et par changement d'alphabet ( $x_0$  en  $y$  et  $\bar{x}_0$  en  $\bar{y}$ ). Il est alors clair que,  $\pi'_1(\bar{h})$  appartenant à  $L_1$ ,  $\pi_y(w)$  appartient à  $L_y$ .

- Enfin soit  $w = w_1 x w_2$  une décomposition de  $w$  telle que  $\delta_x(u) \geq 0$  ; puisque  $\pi_x(w)$  appartient à  $L_x$   $w_2$  se décompose en  $w_2 = w'_2 \bar{x} w''_2$  de telle façon que  $\delta_x(uw'_2) = 0$  . Ainsi la décomposition de  $w$  en  $w = w_1 x (uw'_2) \bar{x} w''_2$  correspond à une décomposition de  $\bar{h}$  en  $\bar{h} = h_1 x h_2 \bar{x} h_3$  avec  $\delta_x(h_2) = 0$  . Or la deuxième partie de la condition (iv) peut se traduire par :

tout facteur gauche  $h'_2$  de  $h_2$  vérifie

$|\pi'_1 h'_2|_{x_0} - |\pi'_1 h'_2|_{\bar{x}_0} \geq 0$  . Ainsi  $u$  est tel que :

$$\delta_y(u) = |\pi'_1(g)|_{x_0} - |\pi'_1(g)|_{\bar{x}_0} \geq 0 .$$

-  $h$  et  $w$  ont même longueur.

En effet : par construction de  $\bar{h}$  , on a  $|\bar{h}| = |h| + 2k$  (insertion de  $x$  et  $\bar{x}$  pour chaque sommet  $s$  différent de  $s_0$ ). De même par construction de  $w$  ,  $|w| = |\bar{h}| - 2|\bar{h}|_x = |\bar{h}| - 2k = |h|$  .

-  $\beta_k$  est une bijection.

Pour cela on construit l'application  $\beta'_k$  suivante et on vérifie que  $\beta_k \beta'_k = \text{id}_L$  et  $\beta'_k \beta_k = \text{id}_{L_{k+1}}$  . Soit  $w$  un mot de  $L$  , on construit  $h = \beta'_k(w)$  (en commençant par  $\bar{h}$ ) de la manière suivante :

- On construit le mot  $w'$  en insérant une lettre  $y$  avant chaque occurrence de  $x$  et une lettre  $\bar{y}$  après chacune de ces occurrences.

- Pour trouver  $\bar{h}$  , on remplace tout d'abord toutes les occurrences de  $y$  dans  $w'$  (resp. de  $\bar{y}$ ) vérifiant :  $w' = uyv$  (resp.  $w' = u\bar{y}v$ ) et  $\delta_x(u) = 0$  , par  $x_0$  (resp.  $\bar{x}_0$ ) . Puis on remplace l'occurrence de la lettre  $y$  par  $x_{k-i+1}$  (resp. de la lettre  $\bar{y}$  par  $\bar{x}_{k-i+1}$ )

$i > 0$  si  $w' = uyv$  (resp.  $w' = u\bar{y}v$ ) s'écrit aussi  $w' = u_1xu_2yv$  (resp.  $w' = u_1xu_2\bar{y}v$ ) où  $|u_1|_x = i-1$  et où  $\pi_x(u_2) \in L_x$ .

On vérifie alors facilement que :

- on remplace ainsi toutes les occurrences de  $y$  et de  $\bar{y}$  ;
- le mot obtenu est bien un mot de  $\bar{L}_{k+1}$  ;
- soit  $h$  le mot obtenu à partir de  $\bar{h}$  en supprimant les lettres  $x$  et  $\bar{x}$ , alors  $\beta_k(h) = w$ . Ainsi  $\beta_k$  est bien une bijection.

Corollaire : Il existe une bijection  $\beta$  entre les cartes planaires pointées et les mots du langage  $L$ . Si  $C$  a  $k+1$  sommets et  $n$  arêtes alors  $\beta(C)$  a  $k$  occurrences de la lettre  $x$  et a pour longueur  $2n$ .

Ceci découle immédiatement de la bijection réalisée (chapitre 1) entre les cartes planaires pointées à  $k$  sommets et le langage  $L_k$ .

#### 4. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DU LANGAGE $L$ .

Propriété II.5.: Si  $f = f'f''$  est un mot de  $L$  et s'il en est de même pour  $g$  alors  $h = f'gf''$  est aussi un mot de  $L$ .

Les mots  $\pi_x(h)$  et  $\pi_y(h)$  qui vérifient

$$\pi_x(h) = \pi_x(f')\pi_x(g)\pi_x(f'')$$

$$\pi_y(h) = \pi_y(f')\pi_y(g)\pi_y(f'')$$

sont respectivement éléments de  $L_x$  et  $L_y$ .

Soit  $h = h_1xwh_2$  une décomposition de  $h$  telle que

$\delta_x(w) \geq 0$  et  $\delta_x(w') \geq 0$  pour tout facteur gauche  $w'$  de  $w$ .

1.) Si  $|h_1| < |f'|$ , ceci implique que  $f' = h_1xf'_1$  et alors trois cas se présentent :

a).  $|h_1xw| \leq |f'|$ : alors  $f'_1 = wf'_2$  et  $f'f''$  admet la décomposition  $f'f'' = h_1xwf'_2f''_2$  où  $\delta_x(w) \geq 0$  et  $\delta_x(w') \geq 0$ , ceci implique que  $\delta_y(w) \geq 0$ .

b).  $|f'| < |h_1 x w| \leq |f'g|$ , dans ce cas  $w = f'_1 g'_1$ , et  $g'_1$  est facteur gauche de  $g$ .

L'image de  $f'_1$  par  $\delta_x$  est positive ou nulle (comme facteur gauche de  $w$ ) et il en est de même pour tous ses facteurs gauches, ainsi la décomposition de  $f'f''$  en  $f'f'' = h_1 x f'_1 f''$  élément de  $L$  implique  $\delta_y(f'_1) \geq 0$ , de plus  $g'_1$  facteur gauche d'un mot de  $L$  vérifie  $\delta_y(g'_1) \geq 0$ , ainsi  $\delta_y(w) = \delta_y(f'_1) + \delta_y(g'_1) \geq 0$ .

c).  $|h_1 x w| > |f'g|$ , dans ce cas  $w = f'_1 g f''_1$  et  $f$  se décompose en  $f'f'' = h_1 x (f'_1 f''_1) f''_2$ .  $g \in L$  implique  $\delta_x(g) = 0$ , ainsi  $\delta_x(f'_1 f''_1) = \delta_x(w) - \delta_x(g)$  est positif ou nul. Les facteurs gauches de  $f'_1 f''_1$  sont ou bien des facteurs gauches de  $f'_1$ , ou bien de la forme  $f'_1 f''_2$  et  $f'_1 g f''_2$  est alors facteur gauche de  $w$ , dans tous les cas leur image par  $\delta_x$  est positive ou nulle. Puisque  $f$  appartient à  $L$ , on déduit  $\delta_y(f'_1 f''_1) \geq 0$  et  $\delta_y(w) = \delta_y(f'_1 g f''_1) = \delta_y(f'_1 f''_1) + \delta_y(g) = \delta_y(f'_1 f''_1) \geq 0$ .

2.). Si  $|f'| \leq h_1 < |g| + |f'|$ , ceci implique  $h_1 = f'g$  et  $g = g_1 g_2$ .

Deux cas sont alors à envisager :

a).  $|h_1 x w| \leq |g| + |f'|$ , dans ce cas  $g = g_1 x w g_2$  et  $\delta_x(w) \geq 0$  (de même que  $\delta_x(w') \geq 0$ ) impliquent, puisque  $g$  appartient à  $L$ , que  $\delta_y(w) \geq 0$ .

b).  $|h_1 x w| > |g| + |f'|$ , dans ce cas  $g = g_1 x w_1$  avec  $w_1$  non vide. Or ceci est impossible car on sait que  $\delta_x(g) = 0$  et que  $\delta_x(g_1) \geq 0$ , ce qui entraîne :  $\delta_x(w_1) = -\delta_x(g_1) - 1 < 0$  en contradiction avec le fait que  $w_1$  est facteur gauche de  $w$ .

3.). Si  $h_1 \geq |g| + |f'|$ , ceci implique  $h_1 = f'g f''_1$  et  $f'f'' = f'_1 f''_1 x w h_2$  puisque  $f'f''$  appartient à  $L$ , ceci entraîne  $\delta_y(w) \geq 0$ .

Dans tous les cas nous avons trouvé  $\delta_y(w) \geq 0$ . Ceci implique que le mot  $h$  appartient à  $L$ .

Corollaire : Le langage L est un sous-monoïde de  $X^*$ .

Cette propriété découle directement de la propriété II.5 en prenant  $f' = 1$  (où  $f'' = 1$ ), on obtient  $f \in L$  et  $g \in L$  implique  $fg$  appartient à  $L$ .

Propriété II.6.: Si  $f'gf''$  et  $g$  sont deux mots de L alors  $f'f''$  est un mot de L.

Cette propriété est d'une certaine manière une réciproque de la précédente. Il est clair que dans ce cas  $\pi_x(f'f'')$  et  $\pi_y(f'f'')$  sont respectivement éléments de  $L_x$  et de  $L_y$ . D'autre part, soit une décomposition de  $f'f''$  sous la forme  $f'f'' = u_1 x w u_2$  (où  $\delta_x(w) \geq 0$  et  $\delta_x(w')$  pour tout facteur gauche de  $w$ ), si  $xw$  est facteur de  $f'$  ou de  $f''$  il est aussi facteur de  $f'gf''$  ainsi  $\delta_y(w) \geq 0$ . Le seul cas qui reste à étudier est celui où  $f' = f'_1 x f'_2$ ,  $f'' = f''_1 f''_2$  et  $w = f'_2 f''_1$ .

Considérons le mot  $v = f'_2 g f''_2$ , c'est un facteur de  $f'gf''$  qui vérifie  $\delta_x(v) = \delta_x(g) + \delta_x(w) = \delta_x(w) \geq 0$ , pour tout facteur gauche  $v'$  de  $v$  on a aussi  $\delta_x(v') \geq 0$  (car  $g$  mot de  $L$  vérifie  $\delta_x(g) = 0$  et  $\delta_x(g') \geq 0$  pour tout facteur gauche). Ainsi  $f'gf''$  appartenant à  $L$ ,  $v$  vérifie  $\delta_y(v) \geq 0$  mais  $\delta_y(g) = 0$  et  $\delta_y(w) \geq 0$ .  $f'f''$  est bien un mot de  $L$ .

Propriété II.7. Pour toute décomposition  $f = f'f''$  d'un mot  $f$  de L le mot  $h = x f' \bar{x} f''$  est un mot de L.

La démonstration se fait exactement de la même façon que pour la propriété II.5 ;  $\pi_x(h)$  et  $\pi_y(h)$  appartiennent de manière évidente à  $L_x$  et  $L_y$ . Ensuite pour toute décomposition de  $h$  sous la forme  $h = h_1 x g h_2$  avec  $\delta_x(g) \geq 0$  et  $\delta_x(g') \geq 0$ , on distingue différents cas, suivant que :

- 1).  $h_1$  est vide ;
- 2).  $|h_1| \leq |x f'|$  ;
- 3).  $h_1 > |x f'|$  ;

la démonstration de ce que  $\delta_y(g) \geq 0$  dans les différents cas ne présente pas de difficulté majeure.



Remarque : Si  $f'f''$  appartient à  $L$ , ceci n'implique pas que  $f'xf''\bar{x}$  et  $yf'\bar{y}f''$  appartiennent à  $L$  comme le montrent les exemples suivants :

$$f = (y)(\bar{y}) \in L \quad \text{et} \quad f'xf''\bar{x} = yx\bar{y}\bar{x} \text{ n'appartient pas à } L$$

$$f = (x)(\bar{x}) \quad \text{et} \quad yf'\bar{y}f'' = yx\bar{y}\bar{x} .$$

Néanmoins la propriété II.6 admet la propriété duale suivante :

Si  $f'f''$  appartient à  $L$  alors  $f'yf''\bar{y}$  appartient à  $L$ .

Propriété II.8.: Si  $f = f'\bar{x}xf''$  et  $g = g'\bar{y}yg''$  appartiennent à  $L$  alors  $f'f''$  et  $g'g''$  appartiennent à  $L$ .

1). Pour  $u = f'f''$  : soit une décomposition de  $u$  sous la forme  $u = u_1xw_2$  (où  $\delta_x(w) \geq 0$  et  $\delta_x(w') \geq 0$  pour tout facteur gauche de  $w$ ). Si  $xw$  est facteur de  $f'$  ou de  $f''$ , il est alors aussi facteur de  $f'\bar{x}xf''$  et on déduit immédiatement  $\delta_y(w) \geq 0$ . Sinon on a nécessairement :

$$f' = f'_1xw_1$$

$$f'' = w_2f''_2 \quad \text{et} \quad w = w_1w_2 .$$

Considérons le mot  $w_1\bar{x}w_2$ , on ne peut affirmer que l'image par  $\delta_x$  de tout facteur gauche de ce mot est positive ou nulle, on distingue alors deux cas :

-  $\delta_x(w_1) > 0$  : alors  $f = f'_1xw_1\bar{x}w_2f''_2$  ;  $w_1\bar{x}w_2$  vérifie la propriété voulue ainsi  $\delta_y(w_1\bar{x}w_2) \geq 0$ . Or puisque  $\delta_y(\bar{x}) = \delta_y(x) = 0$  :  $\delta_y(w_1w_2) = \delta_y(w) \geq 0$ .

-  $\delta_x(w_1) = 0$  : on déduit alors que  $\delta_y(w_1) \geq 0$  puisque c'est un facteur de  $f$  qui vérifie la propriété voulue. De plus  $w_2$  vérifie aussi la même propriété :  $\delta_x(w_2) = \delta_x(w) - \delta_x(w_1) = \delta_x(w) \geq 0$  et il en est de même pour tous ses facteurs gauches (car multipliés à gauche par  $w_1$  ils donnent des facteurs gauches de  $w$ ). Ainsi :

$$\delta_y(w_2) \geq 0 \quad \text{et} \quad \delta_y(w) = \delta_y(w_1) + \delta_y(w_2) \geq 0 , \quad f'f'' \text{ appartient à } L .$$

2). Pour  $v = g'g''$  (c'est la propriété duale) : pour toute décomposition de  $v$  sous la forme  $v = v_1xwv_2$ ,  $xw$  est ou bien facteur de  $g'$  ou bien de  $g''$ , ou bien  $g' = g'_1xw_1$ ,  $g'' = w_2g''_2$  et  $w = w_1w_2$ . Si  $\delta_x(w)$  et  $\delta_x(w') \geq 0$  alors dans les deux premiers cas il est clair que  $\delta_y(w) \geq 0$ ; dans le troisième cas  $\delta_y(w_1\bar{y}w_2) \geq 0$ , mais alors puisque  $\delta_y(\bar{y}y) = 0$   $\delta_y(w_1w_2) = \delta_y(w) \geq 0$ .

Propriété II.9.: Si  $f \in L$  se décompose en  $f_1xf_2\bar{x}f_3$  où  $\pi_x(f_2)$  appartient à  $L_x$ , ou en  $f_1yf_2\bar{y}f_3$  où  $\pi_y(f_2)$  appartient à  $L_y$  alors  $g = f_1f_2f_3$  appartient à  $L$ .

1).  $f_1xf_2\bar{x}f_3 \in L$  : Soit  $g = g_1xhg_2$  une décomposition de  $g$  où  $h$  ainsi que tous ses facteurs gauches ont une image positive ou nulle par  $\delta_x$ . Si  $xh$  est facteur de  $f_1$ , de  $f_2$  ou de  $f_3$ ,  $xh$  est aussi facteur de  $f$  donc  $\delta_y(h) \geq 0$  (puisque  $f \in L$ ). Sinon puisque  $\pi(f_2) \in L_x$   $xh$  (qui est tel que  $\delta(xh') > 0 \forall h'$  facteur gauche de  $h$ ) ne saurait avoir comme facteur gauche un facteur droit de  $f_2$ ; deux cas sont alors à considérer :

- $xh = xf''_1f'_2$  où  $f_1 = f'_1xf''_1$        $f_2 = f'_2f''_2$
- $xh = xf''_1f_2f'_3$  où  $f_1 = f'_1xf''_1$        $f_3 = f'_3f''_3$ .

Dans le premier cas :  $f$  s'écrit :  $f = f'_1xf''_1xf'_2f''_2\bar{x}f_3$  et tous les facteurs gauches de  $f''_1xf'_2$  ont une image positive ou nulle par  $\delta_x$ , ainsi  $\delta_y(f''_1xf'_2) \geq 0$ , soit  $\delta_y(f''_1f'_2) = \delta_y(h) \geq 0$ . Dans le second cas : on a le même résultat pour  $f''_1xf_2\bar{x}f'_3$  car  $\delta_x(f_2) = 0$ , donc  $\delta_y(h) \geq 0$  et  $g$  appartient à  $L$ .

2). Suppression de  $y, \bar{y}$  :  $f_1yf_2\bar{y}f_3 \in L$ .

Calculons son image par  $t$ ; on trouve  $t(f_3)xt(f_2)\bar{x}t(f_1) \in L$ ,  $\pi_y(f_2)$  appartenant à  $L_y$  implique que  $\pi_x t(f_2)$  appartienne à  $L_x$ , ainsi en appliquant 1) on a  $t(f_3)t(f_2)t(f_1) = t(f_1f_2f_3) \in L$ . Ainsi puisque  $t$  est une involution et que  $L = t(L)$ , ceci implique  $f_1f_2f_3 \in L$ .

5. LE LANGAGE  $L'$  .

Soit  $L'$  le langage (\*) défini à partir de  $L$  de la manière suivante :

$$w \in L' \text{ s'il existe un entier } p \geq 0 \text{ vérifiant } w(\overline{yx})^p \in L .$$

Il est alors clair que  $w$  vérifie  $\delta_x(w) = \delta_y(w) = p$  . On voit aussi immédiatement que  $L \subset L'$  (on prend  $p=0$  ) .

Simplification d'un mot de  $X^*$  .

A tout mot  $f$  de  $X^*$  nous associons le mot  $\hat{f}$  , qui appartient aussi à  $X^*$  , obtenu en supprimant tous les couples de lettres  $x, \bar{x}$  (resp.  $y, \bar{y}$ ) qui sont telles que  $f = f_1 x f_2 \bar{x} f_3$  (resp.  $f = f_1 y f_2 \bar{y} f_3$ ) et où  $\pi_x(f_2) \in L_x$  (resp.  $\pi_y(f_2) \in L_y$ ) .

Cette simplification ne définit pas une congruence de Thue (voir par exemple l'ouvrage de Gross et Lentin [27] pour la définition de ces congruences), bien qu'elle s'y apparente.

Exemple : Si  $f = \overline{xyx\bar{y}x\bar{xy}x\bar{y}\bar{y}xy\bar{xy}}$   
 $\hat{f} = \overline{xyx\bar{y}x\bar{y}y}$  .

Propriété II.10.: Si  $f \in L'$  alors  $\hat{f}$  appartient au langage  $L_{x,y}$  défini par la relation  $L_{x,y} = 1 + xL_{x,y}yL_{x,y}$  .

Si  $f$  appartient à  $L'$  , alors  $f(\overline{yx})^p$  appartient à  $L$  et  $\hat{f}(\overline{yx})^p$  appartient aussi à  $L$  car on l'obtient en supprimant des couples  $x, \bar{x}$  ou  $y, \bar{y}$  séparés par un élément d'image par  $\pi_x$  ou  $\pi_y$  dans  $L_x$  ou  $L_y$  et  $L$  est fermé pour ces opérations d'après la Propriété II.9.

Pour montrer que  $\hat{f}$  appartient à  $L_{x,y}$  il suffit de vérifier que tout facteur gauche  $\hat{f}'$  de  $\hat{f}$  vérifie  $|\hat{f}'|_x \geq |\hat{f}'|_y$  , puisque

-----  
 (\*) Ce langage est appelé  $H$  par Lehman qui le définit d'une manière sensiblement différente.

l'on sait déjà que  $|\mathcal{F}|_x = |\mathcal{F}|_y = p$ .

Soit donc  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'\mathcal{F}''$ ; si  $|\mathcal{F}''|_x = 0$  alors il est clair que  $|\mathcal{F}'|_x = p$  et  $|\mathcal{F}'|_y = |\mathcal{F}|_y - |\mathcal{F}''|_y \leq p$ , ainsi  $|\mathcal{F}'|_x \geq |\mathcal{F}'|_y$ . Supposons donc que  $\mathcal{F}''$  contient au moins une occurrence de  $x$ ; soit :  $\mathcal{F}'' = y^i x \mathcal{F}''_1$  et examinons la décomposition de  $\mathcal{F}(\overline{yx})^p$  en  $(\mathcal{F}'y^i)_x (\mathcal{F}''_1(\overline{yx})^j \overline{y}) \overline{x}(\overline{yx})^{p-j-1}$  où  $j = |\mathcal{F}''_1|_x$ . Il est clair que  $\mathcal{F}''_1(\overline{yx})^j \overline{y}$  a une image par  $\delta_x$  nulle et que tous ses facteurs gauches ont une image par  $\delta_x$  positive ainsi, puisque  $\mathcal{F}(\overline{yx})^p$  appartient à  $L$ ,  $\delta_y(\mathcal{F}''_1(\overline{yx})^j \overline{y}) \geq 0$ ; ce qui s'écrit aussi  $|\mathcal{F}''_1|_y \geq j+1$  et (puisque  $|\mathcal{F}|_y = p$ ) :  $|\mathcal{F}''_1|_y \geq p-i-|\mathcal{F}'|_y \leq p-i-j-1$ . D'autre part, par définition de  $j$ , on a  $|\mathcal{F}''_1|_x = j$ , soit  $|\mathcal{F}'|_x = p-j-1$ , ce qui donne  $|\mathcal{F}'|_y \leq |\mathcal{F}'|_x - i$ , d'où le résultat.

Propriété II.11.: Si  $f$  est facteur d'un mot  $g$  de  $L'$  et si  $\mathcal{F}$  appartient à  $L_{x,y}$ , alors  $f$  appartient à  $L'$ .

Soit donc  $g = h_1 f h_2$  et  $w = g(\overline{yx})^p \in L$ , posons  $\delta_x(f) = q$  et montrons que  $u = f(\overline{yx})^q$  appartient à  $L$ . Il est immédiat que  $\pi_x(u)$  et  $\pi_y(u)$  appartiennent respectivement à  $L_x$  et à  $L_y$ , puisque  $|\mathcal{F}|_x = |\mathcal{F}|_y = \delta_x(f) = \delta_y(f) = q$ . Examinons les facteurs  $xv$  de  $u$  tels que les images de  $v$  et de ses facteurs gauches par  $\delta_x$  soient positives ou nulles :

- Si  $xv$  est facteur de  $f$ , il est aussi facteur de  $g$  donc de  $w$  et  $\delta_y(v) \geq 0$ ;

- Sinon c'est que le  $x$  de  $xv$  n'est pas simplifié lorsque l'on calcule  $\mathcal{F}$ ; ainsi  $f = f_1 x v_1$  et  $v = v_1 v_2$  ( $v_2$  est facteur gauche de  $(\overline{yx})^q$ ).  $v_1$  et tous ses facteurs gauches ont une image positive ou nulle par  $\delta_x$ , et  $xv_1$  est facteur de  $w$  donc  $\delta_y(v_1) \geq 0$ , de même pour tout facteur gauche  $v'_1$  de  $v_1$  :  $\delta_y(v'_1) \geq 0$ . Ceci implique que  $\mathcal{F}_1$  ne contient

pas de  $\bar{y}$  (ni de  $\bar{x}$  d'ailleurs), ainsi  $\bar{p} = \bar{p}_1 x \bar{v}_1$  et  $\bar{p}(\bar{y}\bar{x})^q = \bar{p}_1 x (\bar{v}_1 v_2) v'_2$ , où  $v_2 v'_2 = (\bar{y}\bar{x})^q$ ,  $\bar{p}(\bar{y}\bar{x})^q$  appartient à  $L$  d'après l'hypothèse et la propriété II.10, ainsi  $\bar{v}_1 v_2$  qui vérifie la même propriété que  $v_1 v_2$  pour les images par  $\delta_x$  vérifie  $\delta_y(\bar{v}_1 v_2) \geq 0$ . Mais  $\delta_y(\bar{v}_1 v_2) = \delta_y(v_1 v_2)$  d'où le résultat.

Le théorème suivant énoncé par Lehman n'a eu jusqu'ici aucune preuve publiée :

Théorème : Un mot  $w$  différent du mot vide  $1$  appartient à  $L'$  si et seulement s'il existe deux mots  $u$  et  $v$  de  $L'$  (qui peuvent être égaux à  $1$ ) vérifiant l'une des quatre conditions exclusives suivantes :

- (i).  $w = uxv\bar{x}$  ;
- (ii)  $w = uxvy$  ;
- (iii)  $\delta_x(u) \geq \delta_x(v)$   $w = uyt(v)\bar{y}$  ;
- (iv)  $\delta_x(u) > \delta_x(v)$   $w = u\bar{x}t(v)\bar{y}$  .

De plus la décomposition de  $w$  ainsi déterminée est unique.

Preuve : (A). Montrons tout d'abord que tout mot  $w$  ainsi construit appartient à  $L'$  .

(i). Si  $w = uxv\bar{x}$ ,  $u$  et  $v$  appartenant à  $L'$ , il existe alors deux entiers positifs ou nuls  $p_1$  et  $p_2$  tels que :

$$u(\bar{y}\bar{x})^{p_1} \text{ et } v(\bar{y}\bar{x})^{p_2} \text{ appartiennent à } L .$$

La propriété II.7 implique alors que  $xv\bar{x}(\bar{y}\bar{x})^{p_2}$  est un mot de  $L$ , en appliquant II.5 on obtient aussi  $(u)(xv\bar{x}(\bar{y}\bar{x})^{p_2})(\bar{y}\bar{x})^{p_1} \in L$ , soit  $uxv\bar{x} \in L'$  .

(ii). Si  $w = uxvy$  (où  $u$  et  $v$  appartiennent à  $L'$ ).

Si  $v$  appartient à  $L'$ , il est immédiat de remarquer que  $vy\bar{y}$  appartient aussi à  $L'$  (insertion de  $\bar{y}\bar{y}$  dans un mot de  $L$ ), alors d'après (i) :  $ux(vy\bar{y})\bar{x}$  appartient à  $L'$ , soit  $uxvy\bar{y}\bar{x}(\bar{y}\bar{x})^q \in L$  et  $uxvy \in L'$  (car  $uxvy(\bar{y}\bar{x})^{q+1} \in L$ ).

(iii).  $w = uyt(v)\bar{y}$  où  $u$  et  $v$  appartiennent à  $L$  et  $\delta_x(u) \geq \delta_x(v)$ . Il existe alors  $p_1$  et  $p_2$  tels que  $u(\bar{y}\bar{x})^{p_1}$  et  $v(\bar{y}\bar{x})^{p_2}$  appartiennent à  $L$ . En appliquant la propriété II.7, on obtient que  $xv\bar{x}(\bar{y}\bar{x})^{p_2}$  est un élément de  $L$ ; il en est de même pour  $(yx)^{p_2} yt(v)\bar{y}$  d'après le corollaire de la propriété II.4. Puisque  $\delta_x(u) \geq \delta_x(v)$ ,  $p_2$  est inférieur ou égal à  $p_1$ , ainsi  $u(\bar{y}\bar{x})^{p_1} = u(\bar{y}\bar{x})^{p_2} (\bar{y}\bar{x})^{p_1 - p_2}$ . Ainsi de la propriété II.5 on déduit (\*) :

$$u(\bar{x}\bar{y})^{p_2} (yx)^{p_2} yv\bar{y}(\bar{y}\bar{x})^{p_2 - p_1} \in L.$$

On utilise alors  $2p_2$  fois la propriété II.8 en supprimant alternativement  $\bar{y}\bar{y}$  et  $\bar{x}\bar{x}$  et on obtient facilement  $uyv\bar{y}(\bar{y}\bar{x})^{p_2 - p_1} \in L$ , soit  $w \in L'$ .

(iv).  $w = u\bar{x}t(v)\bar{y}$  où  $\delta_x(u) > \delta_x(v)$ . Alors  $u(\bar{y}\bar{x})^{p_1}$  et  $v(\bar{y}\bar{x})^{p_2}$  appartiennent à  $L$  et  $p_1 > p_2$ . De même que dans (iii) :  $(xy)^{p_2} yt(v)\bar{y} \in L$  et  $u(\bar{x}\bar{y})^{p_2 + 1} (\bar{y}\bar{x})^{p_1 - p_2 - 1} \in L$ , soit  $u(\bar{x}\bar{y})^{p_2 + 1} (xy)^{p_2} yt(v)\bar{y}(\bar{y}\bar{x})^{p_1 - p_2 - 1} \in L$ . Ceci implique, en utilisant  $2p_2 + 1$  fois la propriété II.8, que  $u\bar{x}t(v)\bar{y}(\bar{y}\bar{x})^{p_1 - p_2 - 1}$  appartient à  $L$ ; ainsi  $w$  appartient à  $L'$ .

(B). Unicité de la décomposition: Pour démontrer cette

unicité, nous vérifions que :

- pour (i) et (ii), si  $w = uxv\bar{x}$  ou si  $w = uxvy$  ( $u, v \in L'$ ) alors  $v$  est le plus long facteur droit de  $w' = uxv$  qui appartienne à  $L$ ;
  - pour (iii) et (iv), si  $w = uyt(v)\bar{y}$  ou  $w = u\bar{x}t(v)\bar{y}$  ( $u, v \in L'$ ) alors  $u$  est le plus long facteur gauche de  $w' = uxt(v)$  qui appartienne à  $L$ .
- $L'$ unicité de  $u$  et  $v$  est alors immédiate.

-----  
 (\*) car  $u(\bar{y}\bar{x})^p \in L'$  implique  $u(\bar{x}\bar{y})^p \in L'$ .

Pour (i) et (ii) : Si  $u_1 x v$  est un facteur droit de  $w'$  appartenant à  $L'$  alors :  $u_1 x v (\bar{y}x)^p \in L$  et  $v (\bar{y}x)^q \in L$  ; dans ce cas  $p$  est plus grand que  $q$  car  $\delta_x(xv(\bar{y}x)^p)$  doit être négatif ou nul. Ainsi d'après la propriété II.6  $ux(\bar{y}x)^{p-q}$  appartient à  $L$  et ceci est impossible car  $\bar{y}x$  ne saurait être facteur d'un mot de  $L$ .

Pour (iii) et (iv) : Si  $u\bar{x}v_1$  est un élément de  $L'$  (ou si  $uyv_1$  est un élément de  $L'$ ) et si  $t(v) = v_1 v_2$  est aussi un élément de  $L'$ , montrons que l'on aboutit à une contradiction :

-  $u\bar{x}v_1(\bar{y}x)^p$  et  $(yx)^q v_1 v_2$  appartiennent à  $L$  ;

- examinons  $\overset{\circ}{v}_1$ , d'après la propriété II.9 :  $\overset{\circ}{u}\bar{x}\overset{\circ}{v}_1$  (ou  $\overset{\circ}{u}y\overset{\circ}{v}_1$ ) appartient à  $L'$ , ainsi si  $x$  apparaît dans  $\overset{\circ}{v}_1$  il existe un entier  $p_1 \leq p$  tel que  $\overset{\circ}{v}_1 = v'_1 x v''_1$  et  $\pi_x(xv''_1(\bar{y}x)^{p_1})$  appartient à  $L_x$ , alors  $\delta_x(v''_1(\bar{y}x)^{p_1-1}\bar{y})$  est positif ou nul et il en est de même pour tout facteur gauche de ce mot. Ainsi  $\delta_y(v''_1(\bar{y}x)^{p_1-1}\bar{y}) \geq 0$ , soit  $\delta'_y(v''_1) \geq p_1 = \delta_x(v''_1)+1$  ; ceci étant vrai quelque soit l'occurrence de  $x$  dans  $\overset{\circ}{v}_1$  :

$$|\overset{\circ}{v}_1|_x \leq |\overset{\circ}{v}_1|_y.$$

De même en utilisant le fait que  $(yx)^q \overset{\circ}{v}_1 \overset{\circ}{v}_2$  appartient à  $L$ , on démontrerait que si  $\bar{y}$  apparaît dans  $|\overset{\circ}{v}_1|$  (soit  $\overset{\circ}{v}_1 = v'_1 \bar{y} v''_1$ ) alors  $|\overset{\circ}{v}_1|_{\bar{y}} \geq |\overset{\circ}{v}_1|_x + 1$  et ainsi  $|\overset{\circ}{v}_1|_{\bar{y}} \leq |\overset{\circ}{v}_1|_x$ . On obtient finalement  $\delta_x(\overset{\circ}{v}_1) \leq \delta_y(\overset{\circ}{v}_1)$ , or ceci est incompatible avec  $\overset{\circ}{u} \in L'$  et  $\overset{\circ}{u}\bar{x}\overset{\circ}{v}_1 \in L'$  (ou  $\overset{\circ}{u}y\overset{\circ}{v}_1 \in L'$ ) car ces deux relations impliquent  $\delta_x(\overset{\circ}{u}) = \delta_y(\overset{\circ}{u})$  et  $\delta_x(\overset{\circ}{u}\bar{x}\overset{\circ}{v}_1) = \delta_y(\overset{\circ}{u}\bar{x}\overset{\circ}{v}_1)$  (ou  $\delta_x(\overset{\circ}{u}y\overset{\circ}{v}_1) = \delta_y(\overset{\circ}{u}y\overset{\circ}{v}_1)$ ) soit  $\delta_x(\overset{\circ}{v}_1) = \delta_y(\overset{\circ}{v}_1)+1$ . La démonstration de l'unicité de la décomposition est alors achevée.

(C). Existence de la décomposition : Soit  $w$  un mot de  $L'$ , si  $w$  est différent de 1 il se termine par  $x$ , par  $\bar{x}$ , par  $y$  ou par  $\bar{y}$ .

1). w ne se termine pas par x : en effet alors  $w'x(\overline{yx})^p \in L$  et  $x\overline{y}$  ne saurait être facteur d'un mot de  $L$ .

2). si w se termine par  $\overline{x}$  : soit  $w = w'\overline{x}$ . Calculons  $\overset{\circ}{w}'$ , d'après la propriété II.9, ce mot vérifie  $\overset{\circ}{w}'\overline{x}(\overline{yx})^p$  appartient à  $L$ , tout facteur gauche  $u$  de  $\overset{\circ}{w}'$  vérifie donc  $\delta_x(u) \geq \delta_y(u)$ ; soit  $u_1$  le plus grand facteur gauche de ce mot tel que  $\delta_x(u_1) = \delta_y(u_1)$  ( $u_1$  peut être le mot vide mais ne peut pas être  $\overset{\circ}{w}'$  qui vérifie  $\delta_x(\overset{\circ}{w}') = \delta_y(\overset{\circ}{w}') + 1$ ). Il est clair que la lettre qui suit  $u_1$  dans  $\overset{\circ}{w}'$  est une occurrence de  $x$  alors  $w'$  s'écrit  $w' = w_1xw_2$  avec  $\overset{\circ}{w}'_1 = u_1$ .

De par sa construction il est clair que  $u$  appartient à  $L_{x,y}$ ; il en est de même pour  $\overset{\circ}{w}'_2$  car  $\overset{\circ}{w}' = ux\overset{\circ}{w}'_2$  et si  $\overset{\circ}{w}'_2$  a un facteur gauche où le nombre d'  $y$  excède d'une unité le nombre d'  $x$  cela contredit la maximalité de  $u$ . Ainsi d'après la propriété II.11  $w_1$  et  $w_2$  appartiennent à  $L'$  (comme facteurs de  $w \in L'$ ). D'où la décomposition (i).

3). Si w se termine par y alors  $(w'y)\overline{yx}$  appartient à  $L'$  car  $\delta_y(w) > 0$ . D'après 2), il existe une décomposition de  $w'y\overline{yx}$  en  $w_1xw_2y\overline{yx}$  où  $w_1$  et  $w_2y\overline{y}$  appartiennent à  $L'$ . Alors  $w_2$  appartient aussi à  $L'$ , car  $\overset{\circ}{w}'_2 = \overline{w_2y\overline{y}}$  appartient à  $L_x$  et  $w_2$  est facteur du mot  $w_2y\overline{y}$  de  $L'$  (Propriété II.11). Ainsi  $w = w_1xw_2y$ , d'où la décomposition (ii).

3). Si w se termine par  $\overline{y}$  : soit  $w = w'\overline{y}$ . C'est le cas le plus délicat, les problèmes résultent essentiellement de ce que si  $u$  est un mot dont le mot simplifié se décompose en  $\overset{\circ}{u} = u'_1u'_2$ , il n'existe pas nécessairement une décomposition de  $u$  en  $u = u_1u_2$  telle que  $\overset{\circ}{u}_1 = u'_1$ . En effet, soit  $u = xyx\overline{y}$ ;  $\overset{\circ}{u} = xxx$  et il n'existe pas de facteur gauche  $u_1$  de  $u$  tel que  $\overset{\circ}{u}_1 = xx$ .



Revenons-en à la décomposition de  $w$  ; il existe alors une première décomposition de  $w$  en  $w = w_1 y w_2 \bar{y}$  telle que  $w = w_1 y w_2 \bar{y}$  où  $\pi_y(w_2)$  appartient à  $L_y$ .

Résultat préliminaire : Soit  $u$  le facteur gauche le plus long de  $w'$  qui appartient à  $L'$ ,  $u$  est de longueur supérieure ou égale à celle de  $w_1$ .

Si  $\overset{o}{w}_2 = 1$ , c'est immédiat car alors  $w_2$  appartient à  $L$ , de même que  $y w_2 \bar{y}$  et  $w_1$  appartient à  $L'$ . Supposons donc que  $\overset{o}{w}_2 = \bar{x}^p$  (car  $\overset{o}{w}_2$  ne contient évidemment aucune occurrence de  $y$  puisque  $\pi_y(w_2) \in L_y$  et aucune occurrence de  $x$  car  $w_1 y w_2 \bar{y}$  appartient à  $L'$ ). Parmi tous les facteurs gauches de  $w_2$  soit  $w'_2$  le plus court tel que  $p + \delta_x(w'_2) \leq \delta_y(w'_2) + 1$ . Pour ce facteur il y aura en fait égalité car lorsque l'on lui concatène une lettre à droite on augmente d'une unité le membre de gauche (ou on diminue d'une unité le membre de droite). Nous désirons montrer que  $w_1 y w'_2$  appartient à  $L'$ , pour cela nous calculons  $h = \frac{o}{w_1 y w'_2}$  et nous montrons que ce mot appartient à  $L_{x,y}$ , ce qui entraînera le résultat, puisque  $w_1 y w'_2$  est facteur du mot  $w_1 y w_2 \bar{y}$  qui appartient à  $L'$  (cf. Propriété II.11).

Si un  $x$  apparaît dans  $\overset{o}{w}'_2$  (il ne sera pas simplifié dans  $\frac{o}{w_1 x w'_2}$ ) on a :  $w'_2 = w''_2 x w'''_2$  et  $\overset{o}{w}'_2 = \overset{o}{w}''_2 x \overset{o}{w}'''_2$  (car un  $\bar{y}$  situé après  $x$  ne peut simplifier un  $y$  situé avant  $x$ ) ; par minimalité de  $w'_2$  :  $\delta_x(w''_2) + p > \delta_y(w''_2) + 1$  ce qui entraîne d'après l'égalité vérifiée par  $w'_2$  :  $\delta_y(w'''_2) \geq \delta_x(w'''_2) + 1$ , soit  $|\overset{o}{w}'''_2|_y \geq |\overset{o}{w}'''_2|_x + 1$ .

$h$  s'obtient à partir de  $\overset{o}{w}_1 y \overset{o}{w}'_2$  en simplifiant quelques occurrences de  $x$  apparaissant dans  $\overset{o}{w}'_1$  par des  $\bar{x}$  apparaissant dans  $\overset{o}{w}'_2$ , le reste demeurant fixe puisqu'aucun  $\bar{y}$  n'apparaît dans  $\overset{o}{w}'_2$ , dans  $h$  apparaissent alors :

- Toutes les occurrences de  $x$  et  $y$  qui appartiennent à  $\overset{0}{w}_1$  et qui ne se simplifient pas dans  $w$  plus peut-être quelques autres occurrences de  $x$ . Ainsi tout facteur gauche  $h'$  de  $h$  qui est de longueur inférieure à  $|\overset{0}{w}_1|$  vérifie  $|h'|_x \geq |h'|_y$ .
- Toutes les occurrences de  $x$  et  $y$  qui apparaissent dans  $\overset{0}{w}'_2$  mais d'après ce qui a été vu et du fait que  $|h|_x = |h|_y$  tout facteur gauche  $h'$  de  $h$  vérifie  $|h'|_x \geq |h'|_y$  et le résultat préliminaire est démontré.

Venons-en à la décomposition de  $w'$ , soit  $u$  le facteur gauche de  $w'$  le plus long qui appartient à  $L'$ .

$u$  ne peut être suivi par un  $x$  ou un  $\bar{y}$  car par un raisonnement analogue à ce qui a été fait pour la propriété préliminaire on trouverait un facteur plus long que  $u$ .

Si  $u$  est suivi par  $y$  :  $w' = uyu'$ , on sait que  $\overset{0}{u}'$  ne contient ni  $d'x$  ni  $d'y$ , d'après la propriété préliminaire. Pour montrer que  $u' = t(v)$  avec  $v \in L'$  il suffit de vérifier que tout facteur droit  $u''$  de  $\overset{0}{u}'$  vérifie  $\overset{0}{u}''_{\bar{x}} \geq \overset{0}{u}''_{\bar{y}}$ , s'il n'en était pas ainsi il existerait  $u'_1$  tel que  $\overset{0}{u}'_1_{\bar{x}} = \overset{0}{u}'_1_{\bar{y}} + 1$  et  $uyu'_1$  serait un facteur gauche de  $w'$  appartenant à  $L'$  ainsi  $u' \in t(L)$ . D'autre part, la propriété préliminaire implique  $\delta_x(u) \geq \delta_x(v)$ .

Si  $u$  est suivi par  $\bar{x}$  : on démontre exactement de la même façon que  $w' = u\bar{x}t(v)$  où  $v$  appartient à  $L'$  et  $\delta_x(u) > \delta_x(v)$ .

Le théorème est ainsi démontré.

De ce théorème découlent les résultats suivants :

**Corollaire 1 :** Il existe une bijection entre les mots de  $L'$  et le langage restreint de Dyck sur 3 lettres (sur un alphabet à 6 lettres).

Immédiat à partir de (i), (ii) et (iii), (iv).

Corollaire 2 : Si  $f$  appartient à  $L'$  et pas à  $L$ , alors  $f$  se décompose de manière unique en l'une des manières suivantes :

- $f = uxvyt(w)$  où  $u, v, w \in L'$  et  $\delta_x(w) \leq \delta_x(v)$
- $f = uxv\bar{x}t(w)$  où  $u, v, w \in L'$  et  $\delta_x(v) > \delta_x(w)$ .

En effet, si  $f$  appartient à  $L'$  et non à  $L$  alors  $f\bar{y}\bar{x}$  appartient à  $L'$  ce qui implique, au vue de la partie (i) du théorème, que  $f\bar{y}$  se décompose de manière unique en  $f\bar{y} = uxu'\bar{y}$  où  $u'\bar{y}$  appartient à  $L'$ . Du théorème, on déduit alors encore (partie (iii) et (iv)) que  $u'\bar{y}$  se décompose de manière unique :

- soit en  $u'\bar{y} = vyt(w)\bar{y}$  où  $\delta_x(w) \leq \delta_x(v)$
- soit en  $u'\bar{y} = v\bar{x}t(w)\bar{y}$  où  $\delta_x(w) < \delta_x(v)$ .

D'où le résultat.

Corollaire 3 : Le nombre de mots de  $L$  de longueur  $2n$  est  $\frac{3^n(2n)!}{n!(n+2)!}$ .

En effet, d'après le corollaire 1, le nombre de mots de  $L'$  de cette longueur est  $\frac{3^n(2n)!}{n!(n+1)!}$ . D'après le corollaire 2 le nombre de mots longueur  $2n$  qui appartiennent à  $L'$  et pas à  $L$  est égal au nombre de mots de longueur  $2n-2$  de  $L'$  soit  $\frac{3^n(2n)!}{(n-1)!(n+2)!}$ . Le résultat est alors la différence de ces deux nombres.

III. VALUATIONS D'UNE HYPERCARTE SUR UN GROUPE.

1. VALUATIONS APPLIQUANT SOMMETS ET HYPERARÊTES SUR L'ÉLÉMENT NEUTRE DE G .

Soit  $H = \{\sigma, \alpha\}$  une hypercarte opérant sur un ensemble  $B$  de brins, soit  $G$  un groupe quelconque. Une valuation de  $H$  sur  $G$  est une application  $\varphi$  de  $B$  dans  $G$ .

Les valeurs d'un sommet  $s \in S$  de l'hypercarte  $H$  sont les différents éléments de  $G$  que l'on obtient de la manière suivante :

- en choisissant un élément  $b$  appartenant à  $s$ , ainsi  $s = \{b, \sigma b, \sigma^2 b, \dots, \sigma^p b\}$  si  $|s| = p+1$  ( $p \geq 0$ );
- en effectuant le produit (dans  $G$ ) suivant :  $\varphi(b) \cdot \varphi(\sigma b) \cdot \varphi(\sigma^2 b) \dots \dots \dots \varphi(\sigma^p b)$ .

Remarquons que les différentes valeurs d'un sommet  $s$  sont des éléments conjugués de  $G$ ; en particulier, si une des valeurs de  $s$  est  $1_G$  (élément neutre du groupe  $G$ ) toutes les valeurs de ce sommet sont aussi égales à  $1_G$ .

On définit de la même façon les valeurs d'une hyperarête ou d'une face de  $H$  en remplaçant  $\sigma$  respectivement par  $\alpha$  et par  $\alpha^{-1}\sigma$ .

Le théorème suivant généralise le théorème 6.4 de Weinbaum [73].

Théorème VII : Si  $H = (\sigma, \alpha, b_0)$  est une hypercarte planaire pointée,  $s_0$  le sommet distingué ( $b_0 \in s_0$ );  $\varphi$  une valuation telle que les hyperarêtes et les sommets différents de  $s_0$  aient pour valeur  $1_G$  alors  $s_0$  a aussi pour valeur  $1_G$ .

Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons le théorème du codage du chapitre premier (paragraphe V), au préalable nous démontrons deux lemmes :

Lemme III.1.:      Si  $(\zeta, \alpha)$  est une hypercarte planaire à un seul sommet ( $\zeta$  est alors une permutation circulaire) ; si  $\varphi$  est une valuation telle que les hyperarêtes ont toutes pour valeur  $1_G$  . Alors le sommet de  $(\zeta, \alpha)$  a aussi pour valeur  $1_G$  .

La démonstration de ce lemme repose sur l'idée intuitive suivante : si  $g(\zeta, \alpha) = 0$  , il existe un mot emboîté  $f$  tel que  $\bar{f} = \lambda^{-1}\alpha\lambda$  et  $\zeta_n = \lambda^{-1}\zeta\lambda$  , alors une valeur de  $\zeta$  est en quelque sorte un "emboitement" des valeurs des hyperarêtes (toutes égales à  $1_G$ ) et est donc égale à  $1_G$  . Mais donnons une démonstration plus précise de ce résultat , que nous ferons par récurrence sur le nombre de cycles de  $\alpha$  .

- Si  $\alpha$  n'a qu'un cycle, alors nécessairement  $\alpha = \zeta$  et la valeur du sommet est égale à celle de l'hyperarête dont on sait que c'est  $1_G$  .

- Si  $\alpha$  a  $\kappa$  cycles, les propriétés IV.4 et IV.2 du chapitre premier impliquent l'existence d'un brin  $b$  tel que :

$$\alpha(b) = \zeta(b), \alpha^2 b = \zeta^2 b, \dots, \alpha^p(b) = \zeta^p(b) \text{ et } \alpha^{p+1} b = b .$$

Soient alors  $\alpha'$  et  $\zeta'$  les permutations définies sur l'ensemble  $B \setminus a$  (où  $a$  est l'hyperarête  $b, \alpha(b), \dots, \alpha^p(b)$ ) par :

-  $\alpha'$  est la restriction de  $\alpha$  à  $B \setminus a$  (cette restriction est bien définie car  $a$  est un cycle de  $\alpha$ ) ;

$$- \zeta'(b') = \zeta(b') \text{ si } b' \neq \zeta^{-1}(b) \text{ et } \zeta'(\zeta^{-1}b) = \zeta^{p+1}b .$$

APPLICATIONS COMBINATOIRES

Il est clair que  $\zeta'$  est une permutation circulaire ; d'autre part si  $\alpha$  s'écrit  $\alpha = \alpha' \alpha''$  (où  $\alpha''$  est le cycle défini sur  $a$ ), alors  $\zeta' \alpha'' = \zeta \iota$  où  $\iota$  est la transposition qui échange  $\zeta^{-1} b$  et  $\zeta^p b$ . Ainsi d'après la propriété I.3 du chapitre premier,  $\iota$  étant disconnectante :

$g(\zeta, \alpha) = g(\zeta', \alpha') + g(\alpha'', \alpha'')$ . Par définition du genre  $g(\alpha'', \alpha'') = 0$ , et  $(\zeta, \alpha)$  étant planaire,  $g(\zeta, \alpha) = 0$  ce qui implique que  $(\zeta', \alpha')$  est une hypercarte planaire ayant un sommet et dont les  $\kappa-1$  hyperarêtes ont pour valeur  $1_G$  ; d'après l'hypothèse de récurrence la valeur de  $\zeta'$  est  $1_G$ .

Or une des valeurs de  $\zeta$  est égale à :

$\varphi(b_0) \cdot \varphi(\zeta b_0) \cdot \varphi(\zeta^2 b_0) \dots \varphi(b) \cdot \varphi(\zeta b) \dots \varphi(\zeta^p b) \dots \varphi(\zeta^n b_0)$  et  $\varphi(b) \varphi(\zeta b) \dots \varphi(\zeta^p b) = \varphi(b) \varphi(\alpha b) \dots \varphi(\alpha^p b)$  est la valeur d'un cycle de  $\alpha$ , c'est donc  $1_G$ .

La valeur de  $\zeta$  après cette simplification est égale à une valeur de  $\zeta'$  donc à  $1_G$ . Le lemme est démontré.

Lemme III.2 : Soit  $H = (\zeta, \alpha)$  une hypercarte planaire ayant un seul sommet et  $\kappa$  hyperarêtes. Soit  $\varphi$  une valuation dans un groupe  $G$  telle que le sommet de  $H$  et  $\kappa-1$  de ses hyperarêtes aient pour valeur  $1_G$ , alors la  $\kappa$ -ième hyperarête a aussi pour valeur  $1_G$ .

Ce lemme se démontre, de la même façon que le précédent, par récurrence sur le nombre d'hyperarêtes de  $H$ . Si ce nombre est 1, ceci implique (puisque  $g(\zeta, \alpha) = 0$ )  $\alpha = \zeta$  et le résultat devient trivial.

Si ce nombre est différent de 1, il existe une hyperarête  $h$  telle que  $h = \{b, \alpha b, \dots, \alpha^p b\}$  et  $\zeta^i b = \alpha^i b$  (pour  $1 \leq i \leq p$ ); soit  $(\zeta', \alpha')$  l'hypercarte construite à partir de  $(\zeta, \alpha)$  comme dans la démonstration du lemme III.1. Deux cas se présentent alors :

1).  $h$  fait partie des  $\kappa-1$  hyperarêtes de  $(\zeta, \alpha)$  dont on sait qu'elles ont pour valeur  $1_G$ . Alors la valeur de  $\zeta$  est :

$$1_G = \varphi(b_0), \varphi(\zeta b_0) \dots \varphi(b) \varphi(\zeta b) \dots \varphi(\zeta^p b) \varphi(\zeta^{p+1} b) \dots \varphi(\zeta^n b), \text{ or}$$

$$\varphi(b) \varphi(\zeta b) \dots \varphi(\zeta^p b) = \varphi(b) \varphi(\alpha b) \dots \varphi(\alpha^p b) = 1_G.$$

Ceci implique, par construction de  $\zeta'$ , que la valeur de cette permutation est  $1_G$ , il en est aussi de même pour  $\kappa-2$  des  $\kappa-1$  hyperarêtes de  $(\zeta', \alpha')$ ; ainsi d'après l'hypothèse de récurrence toutes les hyperarêtes de  $(\zeta', \alpha')$  ont pour valeur  $1_G$  et il en est de même pour celles de  $(\zeta, \alpha)$ .

2). On ne connaît pas la valeur de  $h$ . Alors toutes les  $\kappa-1$  hyperarêtes de  $(\zeta', \alpha')$  ont pour valeur  $1_G$ . D'après le lemme III.1,  $\zeta'$  a donc aussi pour valeur  $1_G$ .

La valeur de  $\zeta$  ne dépend pas de la façon dont on la calcule (puisque c'est  $1_G$ ), ainsi :

$$1_G = \varphi(b) \varphi(\zeta b) \dots \varphi(\zeta^p b) \varphi(\zeta^{p+1} b) \dots \varphi(\zeta^n b), \text{ or}$$

$$\varphi(\zeta^{p+1} b) \dots \varphi(\zeta^n b) = 1_G \text{ puisque c'est une valeur de } \zeta'. \text{ Donc :}$$

$$\varphi(b) \varphi(\zeta b) \dots \varphi(\zeta^p b) = 1_G \text{ et toutes les hyperarêtes de } H \text{ ont pour}$$

$$\text{valeur } 1_G.$$

Démonstration du théorème VII.

$(\sigma, \alpha)$  étant une hypercarte planeaire d'après le théorème du codage (théorème III), il existe une permutation circulaire  $\zeta$  telle que  $g(\zeta, \alpha) = g(\zeta, \sigma) = 0$ .

- d'après le lemme III.1, puisque toutes les hyperarêtes (cycles de  $\alpha$ ) ont pour valeur  $1_G$ ,  $\zeta$  a aussi pour valeur  $1_G$ .

- on peut appliquer alors le lemme III.2 à  $\zeta, \sigma$  (les sommets de  $\sigma, \alpha$  devenant les hyper-arêtes de  $\zeta, \sigma$ ), et ainsi toutes les hyperarêtes de  $\zeta, \sigma$  ont pour valeur  $1_G$ , d'où le résultat.

2. HYPERCARTE PLANAIRE ASSOCIEE A UN MOT NEUTRE D'UN GROUPE DEFINI PAR GENERATEURS ET RELATIONS.

Définition d'une relation d'équivalence dans le monoïde libre.

Soit  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$  un alphabet fini et soit  $Y^*$  le monoïde libre engendré par  $Y$ . Soit  $R$  un sous-ensemble fini de  $Y^*$ . Soit  $\tilde{R}$  la relation d'équivalence associée à  $R$  de la manière suivante :

Deux mots  $f$  et  $g$  sont équivalents modulo  $\tilde{R}$  s'il existe une suite  $h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_n$  vérifiant  $f = h_1$ ,  $g = h_n$  et quelque soit  $i$

- ou bien  $h_i = h'_{i+1} r_i h''_{i+1}$  ;  $h_{i+1} = h'_{i+1} h''_{i+1}$   $r_i \in R$
- ou bien  $h_{i+1} = h'_i r_i h''_i$  ;  $h_i = h'_i h''_i$   $r_i \in R$ .

Les propriétés suivantes sont immédiates.

Propriété III.3.:  $\tilde{R}$  est une congruence, et  $Y^*/\tilde{R}$  est alors un monoïde de type fini.

Une telle congruence est une congruence de Thue particulière [27].



On dit que  $R$  est fermé par conjugaison si quelque soit  $f (=f_1 f_2)$  élément de  $R$  tous les conjugués  $(f_2 f_1)$  de  $f$  appartiennent à  $R$ . On a alors :

Propriété III.4.: S'il existe un sous-ensemble  $R'$  de  $R$  tel que :

- (a)  $R'$  est fermé par conjugaison ;
  - (b) pour tout élément  $y$  de  $Y$ , il existe un mot  $f$  de  $R'$  tel que  $y$  soit occurrence de  $f$  ;
- alors  $Y^*/R$  est un groupe.

Le résultat s'obtient immédiatement en remarquant que si  $y$  apparaît dans  $f$  (soit  $f_1 y f_2 \in R'$ ) alors la fermeture par conjugaison de  $R'$  implique que  $y f_2 f_1$  et  $f_2 f_1 y$  appartiennent à  $R'$  donc à  $R$ . Tout générateur a ainsi un inverse dans  $Y^*/\tilde{R}$ , il en est donc de même pour tout élément et  $Y^*/\tilde{R}$  est un groupe.

Il est clair que la condition n'est pas nécessaire, car par exemple si  $Y = \{x, y\}$  et si  $R = \{x^3, yx^2y\}$  alors  $Y^*/\tilde{R}$  est un groupe bien qu'aucun sous-ensemble de  $R$  contenant une occurrence de chacun des générateurs ne soit fermé par conjugaison.

Comme conséquence immédiate de cette propriété, on obtient que si  $R = S \cup \{y_1 \bar{y}_1, \bar{y}_1 y_1, y_2 \bar{y}_2, \bar{y}_2 y_2, \dots, y_n \bar{y}_n, \bar{y}_n y_n\}$  où  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  alors  $Y^*/\tilde{R}$  est un groupe ; c'est le groupe de présentation  $\langle y_1, y_2, \dots, \dots, y_n, S \rangle$  (voir par exemple Magnus, Karass et Solitar). [39].

Lorsque  $Y^*/\tilde{R}$  est un groupe, de nombreux auteurs ont cherché à déterminer l'existence d'un algorithme reconnaissant si un mot  $f$  de  $Y^*$  est congru à 1 mod.  $\tilde{R}$  (pour une bibliographie complète sur la ques-

question on consultera l'ouvrage cité plus haut et l'article de Lyndon [38]). Il s'agit là du "Problème du mot", énoncé par Max Dehn.

Le théorème VII de notre travail admet le corollaire suivant :

Soit G le groupe défini par  $G = Y^*/\tilde{R}$ , soit H une hypercarte pointée et  $\varphi$  une valuation de H dans  $Y^*$  : si toutes les hyperarêtes et tous les sommets différents du sommet distingué ont une valeur dans R alors le sommet distingué a ses valeurs congrues à 1 mod  $\tilde{R}$ .

Le théorème qui suit indique que tous les mots congrus à 1 mod  $\tilde{R}$  peuvent être construits de cette façon.

Théorème VIII.: Soit Y un alphabet fini  $Y^*$  le monoïde libre engendré par Y, R un sous-ensemble de  $Y^*$  tel que  $Y^*/R$  soit un groupe, f un mot congru à 1 mod  $\tilde{R}$ . Alors il existe une hypercarte planaire pointée H et une application  $\varphi$  de l'ensemble B des brins dans Y telle que :

- toutes les hyperarêtes et tous les sommets différents du sommet distingué ont une valeur dans R ;

- le sommet distingué a une valeur égale à f .

Preuve : Soit f un mot congru à 1 mod  $\tilde{R}$ , alors il existe une suite  $h_1, h_2, \dots, h_p$  de mots de  $Y^*$  tels que

$$h_1 = 1, h_p = f \text{ et } h_{i+1} = h'_i r_i h''_i \text{ ou bien } h_i = h'_{i+1} r_i h''_{i+1} ;$$

nous démontrons le résultat par récurrence sur p .

Si  $n = 2$ , alors  $f = r_1$ , posons  $n = |r_1|$  et soit  $H = (\zeta_n, \zeta_n)$   $\varphi(i)$  = la ième occurrence de  $r_1$  ; il est clair que H est planaire et qu'une valeur du sommet distingué est :  $\varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n) = r_1 = f$  .

Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre  $p-1$  et soit  $f$  un mot congru à  $1 \pmod{\tilde{R}}$  dont une suite qui le construit est  $h_1, h_2, \dots, h_p$  ; Alors l'hypothèse de récurrence indique qu'il existe une hypercarte planaire pointée  $H = (\sigma, \alpha, 1)$  et une valuation  $\varphi$  satisfaisant les propriétés voulues pour  $h_{p-1}$ . Pour construire  $H'$  et  $\varphi'$  correspondant à  $h_p$  nous distinguons deux cas suivant que :

$$(1) \quad h_p = h'_{p-1} r_p h''_{p-1} \quad \text{et} \quad h'_{p-1} h''_{p-1} = h_{p-1} ;$$

$$(2) \quad h_{p-1} = h'_p r_p h''_p \quad \text{et} \quad h_p = h'_p h''_p .$$

$$(1) \quad h_p = h'_{p-1} r_p h''_{p-1} .$$

On peut (au besoin on s'y ramène par un changement du nom des brins) supposer que l'hypercarte  $H$  opère sur l'ensemble des brins  $[n]$  et qu'elle admet pour sommet distingué  $\{1, 2, \dots, n_1-1, n_1\}$  ainsi  $\sigma_i = i+1$  pour  $i < n_1$  et  $\sigma_{n_1} = 1$ .

La valeur de ce sommet est :

$h_{p-1} = \varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n_1)$ . Soit  $n'_1$  et  $n''_1$  les longueurs des mots  $h'_{p-1}$  et  $h''_{p-1}$ , soit  $n'$  la longueur de  $r_p$ .

Nous définissons alors l'hypercarte  $H' = (\sigma', \alpha', 1)$  comme opérant sur l'ensemble des brins  $[n+n']$  et telle que :

- pour  $\sigma'$  :  $\sigma'(i) = \sigma(i)$  pour  $i \leq n$  et  $i \neq n'_1$

$$\sigma'(n'_1) = n+1$$

$$\sigma'(n+j) = n+j+1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq j < n'$$

$$\sigma'(n+n') = n'_1+1 .$$

- pour  $\alpha'$  :  $\alpha'(i) = \alpha(i)$  pour  $1 \leq i \leq n$

$$\alpha'(n+j) = n+j+1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq n'$$

$$\alpha'(n+n') = n+1 .$$

La valuation  $\varphi'$  de  $H'$  est définie par :

$$\varphi'(i) = \varphi(i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

$\varphi'(n+j)$  est la  $j$ -ième occurrence de  $r_p$ .

Il est alors clair que :

- les sommets différents du sommet distingué de  $H'$  sont les mêmes que ceux de  $H$  et ont donc une valeur dans  $R$  ;

- les hyperarêtes de  $H'$  sont celles de  $H$  auxquelles on a adjoint  $\{n+1, n+2, \dots, n+n'\}$  dont une des valeurs est  $r_p$  ;

- une des valeurs du sommet distingué est :

$$\varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n'_1)\varphi(n+1)\varphi(n+2)\dots\varphi(n+n')\varphi(n'_1+1)\dots\varphi(n_1) \text{ qui n'est autre que } h'_p r_p h''_p = h_p.$$

Une seule chose reste donc encore à démontrer, c'est que l'hypercarte  $(\sigma', \alpha')$  est planaire ; pour cela on considère la transposition  $\iota$  qui échange  $n'_1+1$  et  $n+1$  et le couple  $(\sigma', \alpha')$ . Ce couple se décompose en deux hypercartes :  $H = (\sigma, \alpha)$  et  $(\alpha'', \alpha'')$  où  $\alpha''$  est le cycle  $(n+1, n+2, \dots, n+n')$  ;  $\iota$  est donc une transposition disconnectante pour l'hypercarte  $H' = (\sigma', \alpha')$ , ainsi d'après la propriété I.3 du chapitre premier, on obtient :

$$g(\sigma', \alpha') = g(\sigma, \alpha) + g(\alpha'', \alpha'') .$$

Or  $g(\sigma, \alpha) = 0$  d'après l'hypothèse de récurrence et  $g(\alpha'', \alpha'') = 0$ , puisque  $\alpha''^{-1}\alpha'' = 1$ . Ainsi  $(\sigma', \alpha')$  est planaire et la récurrence est effectuée pour le cas (1).

$$(2). \quad h_{p-1} = h'_p r_p h''_p .$$

On suppose, de la même façon, que l'hypercarte  $H$  opère sur l'ensemble de brins  $[n]$  et que le sommet distingué est  $\{1, 2, \dots, n_1\}$  ainsi  $\sigma_i = i+1$  pour  $i < n_1$  et  $\sigma_{n_1} = 1$ .

Soient  $n'_1, n', n''_1$  les longueurs respectives des mots  $h'_p$ ,  $r_p$  et  $h''_p$ .

Le couple  $(\sigma', \alpha')$  est alors défini par :

- il opère sur le même ensemble  $[n]$  de brins que  $H$  ;
- $\alpha' = \alpha$  ;
- $\sigma' = \sigma \iota$  où  $\iota$  est la transposition qui échange  $n'_1+1$  et  $n'_1+n'+1$ .

La valuation  $\varphi'$  est égale à  $\varphi$ .

On distingue alors deux cas suivant que  $(\sigma', \alpha')$  est ou non une hypercarte :

- si  $(\sigma', \alpha')$  n'est pas une hypercarte, alors il se décompose en deux hypercartes  $H'$  et  $H''$  où  $H'$  opère sur l'ensemble qui contient le brin 1.

$H'$  vérifie alors les conditions voulues, car une des valeurs du sommet distingué est  $h_p$  par construction ; les autres sommets et les hyperarêtes de  $H'$  sont aussi sommets et hyperarêtes de  $H$  ont donc une valeur dans  $R$ . Enfin  $H'$  est planaire, car  $\iota$  étant disconnectante  $0 = g(\sigma, \alpha) = g(H') + g(H'')$ ,  $g(H''), g(H') \geq 0$  impliquent alors  $g(H') = 0$ .

- si  $(\sigma', \alpha') = H'$  est une hypercarte. Les sommets différents du sommet distingué et les hyperarêtes ont une valeur dans  $R$  (puisqu'on

ne fait qu'ajouter un nouveau sommet dont une des valeurs est  $r_p$ ).

Le sommet distingué a pour valeur :

$$\varphi(1) \dots \varphi(n'_1) \varphi(n'_1 + n' + 1) \dots \varphi(n_1) = h'_p h''_p = h_p.$$

Enfin montrons que  $H'$  est planaire :  $z(\alpha') = z(\alpha)$  et  $z(\sigma') = z(\sigma) + 1$ , et en calculant  $g(H')$ , on obtient :

$$\begin{aligned} g(H') &= 1 + \frac{1}{2}(n - z(\sigma') - z(\alpha') - z(\alpha'^{-1}\sigma')) \\ &= g(H) + \frac{1}{2}(z(\alpha^{-1}\sigma) - z(\alpha'^{-1}\sigma') - 1). \end{aligned}$$

D'après le lemme de Serret, on sait que :

$$z(\alpha'^{-1}\sigma') = z(\alpha^{-1}\sigma) \pm 1$$

suivant que  $n'_1 + 1$  et  $n'_1 + n' + 1$  sont ou non sur un même cycle de  $\alpha^{-1}\sigma$ .

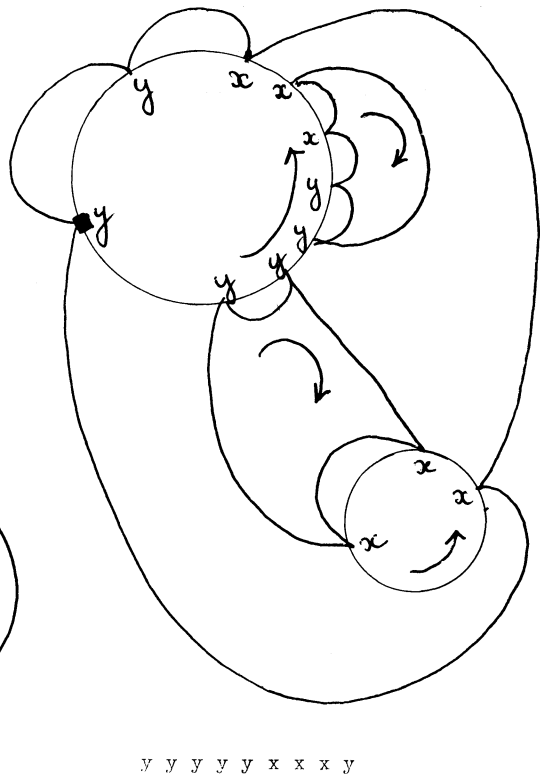
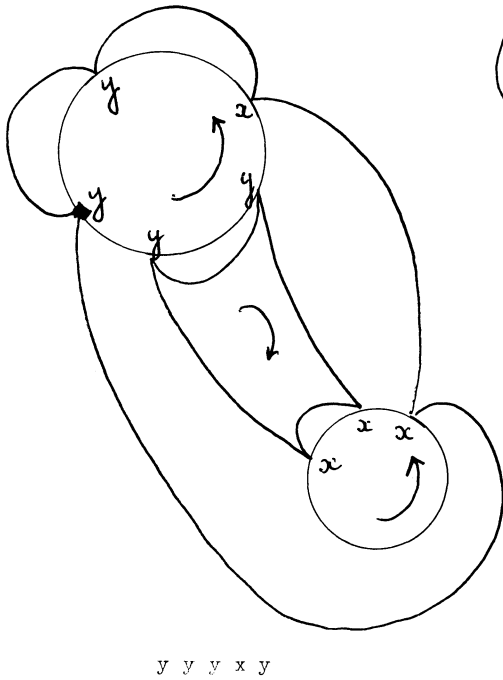
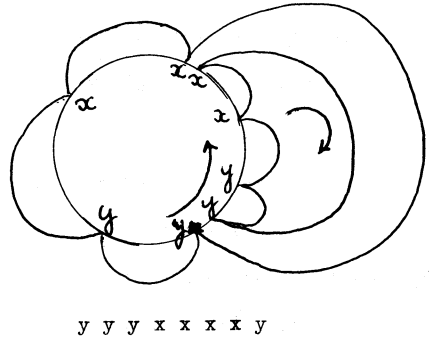
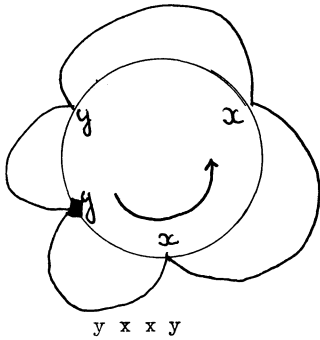
La relation  $z(\alpha'^{-1}\sigma') = z(\alpha^{-1}\sigma) + 1$  implique  $g(H') = g(H) - 1$ , ce qui est impossible  $g(H)$  étant nul. On a donc :

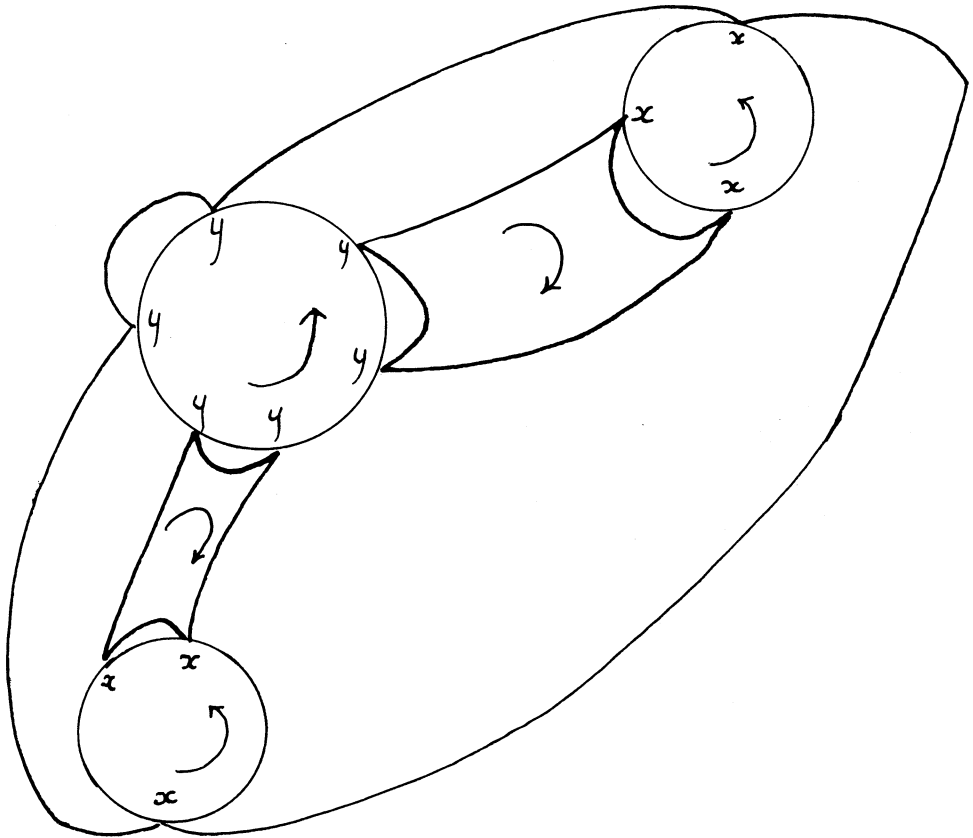
$$z(\alpha'^{-1}\sigma') = z(\alpha^{-1}\sigma) - 1 \quad \text{et} \quad g(H') = g(H) = 0.$$

Le théorème est démontré.

CODE DES GRAPHES PLANAIRES

Un exemple : Construction du mot neutre  $y^6$  dans le groupe engendré par  $x, y$  et les relations :  $x^3 = 1$  ;  $y x^2 y = 1$





yyyyyy





## **Chapitre Troisième**

### **APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CODAGE**

## CODE DES GRAPHE PLANAIRES

Dans ce chapitre, nous donnons des méthodes de résolution d'équations faisant intervenir les opérateurs  $d, D, \Delta$  et  $\nabla$ , et en déduisons, suivant une méthode développée par M. Gross [26], des résultats d'énumération.

Dans le premier paragraphe, nous rappelons les définitions et les propriétés des séries, langages et transductions que nous utiliserons dans la suite. Ces propriétés sont données sans démonstration, pour une vue plus détaillée de la question nous renvoyons le lecteur aux articles et ouvrages plus complets ([12], [20], [22], [24], [47], [53]). Nous insistons plus particulièrement sur le passage à l'image commutative d'une série qui est à la base de nos méthodes d'énumération.

Dans le deuxième paragraphe, nous définissons les opérations  $d, D, \Delta$  et  $\nabla$ , nous montrons qu'ils vérifient des propriétés qui en font en quelque sorte des "dérivations" et nous étudions enfin leur lien avec les cartes planaires (voir aussi C. Choffrut [11] pour les triangulations).

Le paragraphe III est consacré à l'étude des équations faisant intervenir  $d$  et  $D$  de manière linéaire ; nous commençons par établir l'unicité de la solution du type d'équations que nous étudions. Lorsque les coefficients sont des langages algébriques on montre que la solution n'est pas généralement un langage algébrique, par contre lorsque les coefficients sont des langages rationnels particuliers nous montrons que la solution est un langage algébrique. Les résultats sont étendus aux séries et enfin une équation non linéaire est envisagée, sa solution n'est malheureusement pas algébrique.

Dans le paragraphe IV, nous déduisons, des résultats du paragraphe précédent, la solution des équations linéaires en  $\Delta$  et  $\nabla$  où les coefficients sont des séries rationnelles, on obtient aussi un cas particulier des

résultats de J. Richard, résultats que nous énonçons ensuite sans démonstration : ils concernent les équations linéaires en  $\Lambda$  et  $\nabla$  à coefficients algébriques et les équations non linéaires dans l'algèbre des séries en variables commutatives.

Enfin, dans le paragraphe V, nous appliquons les résultats précédents pour donner les formules d'énumérations :

- des cartes planaires ayant  $n$  arêtes retrouvant un résultat de W.T. Tutte [61], [64] ;
- des cartes simples qui avaient été considérées par Stanton et Mullin [46] ;
- des arbres, étudiées par Kuich [34] et Klarner [33], (voir aussi [29]), enfin des arbres parfaits et retrouvons ainsi une formule de W.T. Tutte [67].

I. LES SÉRIES FORMELLES EN VARIABLES NON COMMUTATIVES.

1. Définitions, séries rationnelles.

Soit  $\mathcal{A}$  un semi-anneau commutatif unitaire <sup>\*</sup>. (Dans les applications ce sera le plus souvent soit le semi-anneau de Boole  $\mathcal{B} = \{0,1\}$ , soit l'anneau  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs). Soit  $X$  un alphabet fini dont les éléments sont des lettres (ou des variables). La semi-algèbre  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  des séries formelles en variables non commutatives (ou  $\mathcal{A}$ -algèbre large du monoïde libre  $X^*$ ) est définie par :

- les éléments de  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  sont les expressions formelles  $r = \sum_{f \in X^*} (r,f)f$ , où  $(r,f)$  le coefficient de  $f$  dans  $r$  est un élément de  $\mathcal{A}$  (ou scalaire);

- la somme  $r_1 + r_2 = r$  des deux séries  $r_1$  et  $r_2$  est donnée par  $(r,f) = (r_1,f) + (r_2,f)$  pour tout mot  $f$  de  $X^*$  ;

- le produit d'une série  $r$  par un scalaire  $a$  de  $\mathcal{A}$  est  $(ar,f) = (a.(r,f))f$  ;

- enfin, le produit de deux séries  $r_1$  et  $r_2$  (ou produit de Cauchy) est défini par :

$$(r_1 \cdot r_2, f) = \sum_{f=gh} (r_1, g)(r_2, h) .$$

La somme écrite est étendue à toutes les décompositions de  $f$  en produit de deux mots et est par conséquent finie.

Il est clair que ces opérations confèrent à  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  une structure de semi-algèbre sur  $\mathcal{A}$  (c'est une algèbre lorsque  $\mathcal{A}$  est un anneau), cette semi-algèbre est bien entendu non commutative.

-----  
<sup>\*</sup> Nous entendons par là un ensemble muni de deux lois  $+$  et  $\cdot$  toutes deux associatives, commutatives possédant un élément unité et telles que  $\cdot$  soit distributive par rapport à  $+$ , et que  $0a = a0 = 0$ .

APPLICATIONS ANALYTIQUES

Classiquement, on définit sur  $\mathcal{A}$  la topologie (dite topologie X-adique), donnée par la distance suivante :

$$d(r_1, r_2) = 2^{-v(r_1, r_2)} \quad \text{où :}$$

$$v(r_1, r_2) = \inf \{ |f| \mid (r_1, f) \neq (r_2, f) \}$$

$$v(r, r) = +\infty .$$

Il est bien connu que  $\mathcal{A} \langle\langle X \rangle\rangle$  est alors ultramétrique complète.

Une série de  $\mathcal{A} \langle\langle X \rangle\rangle$  est inversible si et seulement si son terme constant (le coefficient  $r_0$  du mot vide 1) est inversible dans  $\mathcal{A}$ , la série inverse est alors :

$$r^{-1} = r_0^{-1} \sum_{n \geq 0} (1 - r_0^{-1} r)^n .$$

En effet, la série  $1 - r_0^{-1} r$  n'ayant pas de terme constant, le terme de plus bas degré de  $(1 - r_0^{-1} r)^n$  est au moins de degré  $n$ , ainsi la somme  $\sum_{n \geq 0} (1 - r_0^{-1} r)^n$  est convergente au sens de la topologie définie ci-dessus. (On peut aussi remarquer que tout mot  $f$  n'apparaît, avec un coefficient non nul, que dans un nombre fini des  $(1 - r_0^{-1} r)^n$ ).

Un polynôme en variables non commutatives  $X$  à coefficients dans  $\mathcal{A}$  est une série n'ayant qu'un nombre fini de coefficients  $(r, f)$  non nuls. Les polynômes constituent une sous-semi-algèbre, notée  $\mathcal{A} \langle X \rangle$ , de  $\mathcal{A} \langle\langle X \rangle\rangle$ .

La semi-algèbre des séries rationnelles est la plus petite semi-algèbre qui contienne les polynômes et qui soit fermée pour l'opération de quasi inversion.

Lorsque  $\mathbb{B}$  est le semi-anneau de Boole à deux éléments 0 et 1 (où  $1+1 = 1$ ) la semi-algèbre  $\mathbb{B} \langle\langle X \rangle\rangle$  est isomorphe à celle des parties

de  $X^*$  (qui est une semi-algèbre pour la réunion et le produit des parties). Ainsi un polynôme de  $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$  est une partie finie de  $X^*$  et à une série rationnelle de  $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$  correspond un langage rationnel de  $X^*$  (appelé aussi K-langage, langage régulier, etc...).

Plus généralement, à toute série  $r$  de  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  on peut associer le langage support de  $r$  constitué de tous les mots  $f$  de  $X^*$  tels que  $(r, f) \neq 0$ . Réciproquement, pour tout langage  $L$  de  $X^*$  on associe sa série caractéristique  $\underline{L}$  dans toute algèbre  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  qui est définie par :

$$(\underline{L}, f) = 0 \quad \text{si } f \notin L \qquad (\underline{L}, f) = L \cdot \mathcal{A} \quad \text{si } f \in L .$$

## 2. Opérateurs contractants, séries algébriques.

Nous appelons opérateur toute application de l'espace  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle^{\kappa}$  des  $\kappa$ -uples de séries dans lui-même.

Sur cet espace, on peut définir la distance produit  $d$  qui le munit d'une topologie ultramétrique complète.

L'opérateur  $H$  est une contraction sur l'espace de ces  $\kappa$ -uples si quelque soit les  $\kappa$ -uples  $\xi$  et  $\eta$  ,  $d(\xi, \eta) \leq u \cdot d(H(\xi), H(\eta))$  ( $0 < u < 1$  ) , la propriété suivante est alors classique.

Propriété I.1. : Si  $H$  est un opérateur contractant sur l'espace des  $\kappa$ -uples de séries, alors l'équation  $\xi = H(\xi)$  admet une solution et une seule dans cet espace.

Un cas particulier d'opérateur contractant est l'opérateur  $P$  suivant :

$P$  associe à un  $\kappa$ -uplet  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\kappa})$  l'uplet  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\kappa})$  tel que  $\eta_i = p_i$  où les  $p_i$  sont des polynômes de

$A\langle X \cup \Xi \rangle$ , ( $\Xi$  étant l'alphabet  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ ) dont les coefficients de  $(p_i, \xi)$  sont nuls quelque soit le mot  $\xi$  de  $\Xi^*$ .

Un tel opérateur  $P$  est dit polynomial propre, on vérifie facilement qu'il est contractant.

Définition : Une série  $r$  de  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  est dite algébrique si et seulement si il existe un opérateur polynomial  $P$  tel que  $r$  soit une composante du  $k$ -uplet solution de l'équation  $P(\xi) = \xi$ .

On montre facilement que l'ensemble des séries algébriques constitue une sous-semi-algèbre de  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  contenant la semi-algèbre des séries rationnelles.

Dans le cas où  $\mathcal{A}$  est le semi-anneau de Boole  $\mathfrak{B}$ , les séries algébriques sont des langages algébriques (ou langage context-free) et  $P$  est alors une grammaire du langage solution.

### 3. Image commutative.

En remplaçant, dans la définition des séries formelles, le monoïde libre  $X^*$  par le monoïde commutatif libre  $X^+$  on obtient la semi-algèbre  $\mathcal{A}[[X]]$  des séries formelles en les variables  $X$  et à coefficients dans  $\mathcal{A}$ .

Morphisme  $\chi$  de  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  sur  $\mathcal{A}[[X]]$  :

Pour toute série  $r$  de  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$ , on définit la série  $\chi(r)$ , image commutative de  $r$  par : le coefficient de  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$  dans  $\chi(r)$  est la somme (dans  $\mathcal{A}$ ) des coefficients  $(r, f)$  dans  $r$  de tous les mots  $f$  ayant  $n_i$  occurrence de la lettre  $x_i$  (pour  $i=1, \dots, k$ ).

Il est clair que  $\chi$  est un morphisme de semi-algèbre, ainsi l'image d'une série rationnelle (resp. algébrique) de  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  est une série rationnelle (resp. algébrique) de  $\mathcal{A}[[X]]$ . Par contre, une série



peut avoir une image commutative rationnelle (resp. algébrique) sans être rationnelle (resp. algébrique) :

Par exemple la série  $r_1 = \sum x^n y^n$  n'est pas une série rationnelle de  $\mathbb{B}\langle\langle x, y \rangle\rangle$  et  $\chi(r_1) = (1-xy)^{-1}$  dans  $\mathbb{B}[[x, y]]$  est rationnelle. De même la série  $r_2 = \sum x^n y^n z^n$  de  $\mathbb{B}\langle\langle x, y, z \rangle\rangle$  n'est pas algébrique et a pour image par  $\chi : (1-xyz)^{-1}$  dans  $\mathbb{B}[[x, y, z]]$ .

Application  $\chi_0$  de  $\mathbb{B}\langle\langle X \rangle\rangle$  dans  $\mathcal{M}[[X]]$  :

Pour tout élément A de  $\mathbb{B}\langle\langle X \rangle\rangle$  (ou toute partie A de  $X^*$ ) on définit la série  $\chi_0(A)$  de  $\mathcal{M}[[X]]$  dite série énumératrice de A, qui a pour coefficient de  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$  le nombre de mots de A qui ont  $n_i$  occurrence de  $x_i$  (pour  $i=1, \dots, k$ ). Il est clair que  $\chi_0$  n'est pas un morphisme, par contre :

Si A et B sont tels que  $A \cap B = \emptyset$ , la somme (qui est dite alors non ambigu) vérifie  $\chi_0(A+B) = \chi_0(A) + \chi_0(B)$ .

Si A et B sont tels que  $\forall f \in A, \forall g \in B, \nexists f_1 \neq f \in A$  et  $g_1 \neq g \in B$  tels que  $fg = f_1 g_1$ , le produit A.B (qui est dit alors non ambigu) vérifie  $\chi_0(A.B) = \chi_0(A) \cdot \chi_0(B)$ .

Si A engendre librement le sous-monoïde  $A^*$ , alors  $\chi_0(A^*) = (1 - \chi_0(A))^{-1}$ .

Ainsi, d'après le théorème de Kleene (\*) l'image d'un langage rationnel par  $\chi_0$  est une série rationnelle de  $\mathcal{M}[[X]]$ .

Un langage algébrique est dit non ambigu si les polynômes  $p_i$  qui le définissent sont constitués de sommes et de produits non ambigu,

on a alors :

(\*) Qui admet en particulier comme conséquence que tout langage rationnel peut être engendré, à partir des polynômes, par des opérations +, . et \* non ambiguës.

L'image par  $\chi_0$  d'un langage algébrique non ambigu A est une série algébrique de  $\mathcal{N}[[X]]$  qui vérifie le système d'équations  $\chi_0(A) = \chi_0(P)[\chi_0(A)]$ .

Image commutative d'un opérateur.

Si H est un opérateur de  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  dans lui-même  $\chi^H$  est un opérateur de  $\mathcal{A}[[X]]$  qui si il existe rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle & \xrightarrow{H} & \mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle \\ \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathcal{A}[[X]] & \xrightarrow{\chi^H} & \mathcal{A}[[X]] \end{array}$$

L'opérateur  $\chi^H$  n'existe pas nécessairement pour tout opérateur H, par contre, si  $\chi^H$  existe la propriété le définissant le détermine de manière unique.

Il est clair qu'un opérateur polynômial admet une image commutative qui n'est autre que le polynôme image commutative.

4. Transductions (cf. Nivat [47], Fliess [21]).

Soit  $X^* \times X^*$  le produit cartésien du monoïde libre  $X^*$  par lui-même, et soit  $\mathcal{A}\langle\langle X \otimes X \rangle\rangle$  la semi-algèbre large de ce monoïde. Un élément  $\hat{f}$  de cette semi-algèbre (qui se note  $\Sigma(\hat{f},(f,g))(f,g)$ ) définit une fonction, non partout définie,  $\iota$  de  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  dans lui-même, de la manière suivante :

- pour tout mot f de  $X^*$  :

$$\iota(f) = \sum_g (\hat{f}(f,g))g ;$$

-  $\iota$  s'étend linéairement dans  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  pour toute série a telle que  $(\iota a, g) = \Sigma(\hat{\iota},(f,g))(a,f)$  est défini dans  $\mathcal{A}$ .

CODE DES GRAPHEs PLANAIREs

$\iota$  est une transduction. Si  $\hat{\epsilon}$  est une série rationnelle (resp. algébrique),  $\hat{\epsilon}$  est une transduction rationnelle (resp. une transduction algébrique).

On peut démontrer les propriétés suivantes ([47], [21]).

Propriété I.2. : L'image par une transduction rationnelle d'un langage rationnel est un langage rationnel ; celle d'un langage algébrique est un langage algébrique.

Propriété I.3. : L'image par une transduction algébrique d'un langage rationnel est un langage algébrique.

Dans le cas des séries, on démontre que le résultat reste vrai :

- si l'anneau vérifie certaines propriétés (cf. [22]) ;
- si la transduction est "régulée" (cf. les résultats de G. Jacob, à paraître).

Dans le cas des transductions rationnelles et algébriques de  $\mathfrak{R}(X^*)$  dans lui-même, on doit à Nivat le résultat suivant :

Propriété I.4. : Une transduction  $\iota$  de  $X^*$  dans  $X^*$  est rationnelle (resp. algébrique) si et seulement si il existe un alphabet  $Z$ , un langage rationnel (resp. algébrique)  $A$  de  $Z^*$  et deux morphismes  $\varphi$  et  $\psi$  de  $Z^*$  dans  $X^*$  tels que pour tout  $L$

$$\iota L = \psi(\varphi^{-1}L \cap A) .$$

Remarque : Dans les paragraphes III et IV de ce chapitre, nous démontrerons que pour certaines transductions particulières, la solution de l'équation  $\xi = H(\xi)$  est une série algébrique.

Remarquons que même si  $H$  est une transduction rationnelle,  $\xi$  n'est pas nécessairement algébrique. Considérons en effet, l'exemple suivant :

Soit  $X = \{a, b, c\}$ , soit  $\iota$  l'application de  $X^*$  dans  $\mathfrak{P}(X^*)$  définie pour tout mot  $f$  de  $X^*$  par :

APPLICATIONS ANALYTIQUES

- si  $f$  contient une occurrence de la lettre  $b$ , alors  $f$  s'écrit d'une manière unique sous la forme  $f = f_1 b^k f_2$  où  $|f_1|_b = 0$  et où  $f_2$  ne commence pas par  $b$ , alors  $\iota(f) = \{abc, f_1 a b^{k+1} c f_2\}$  ;
- si  $f$  ne contient pas d'occurrence de  $b$ , alors  $\iota(f) = abc$ .

$\tau$  est une transduction rationnelle, car en utilisant par exemple, la caractérisation de Nivat, on trouve :

$$Z = \{a, b, c, a', b', c'\} \quad ; \quad \varphi(a) = a, \varphi(b) = b, \varphi(c) = c$$

$$\varphi(a') = \varphi(b') = \varphi(c') = 1, \psi(a) = \psi(a') = a, \psi(b) = \psi(b') = b$$

$$\psi(c) = \psi(c') = c \quad \text{et} \quad A = \{a, c\}^* \cdot a' \cdot b' \cdot b \cdot \{b\}^* \cdot c' \{a, b, c\}^* \cup \{a' b' c'\}.$$

D'autre part, le langage solution de  $\xi = \iota(\xi)$  est le langage  $\bigcup_{n \geq 0} \{a^n b^n c^n\}$  bien connu pour ne pas être algébrique.

II. LES TRANSDUCTIONS  $d, D, \Delta$  et  $\nabla$  .

1. Leurs définitions.

Soit  $X$  un alphabet fini contenant les lettres  $x$  et  $\bar{x}$  ,  
on écrit ainsi :  $X = \{x, \bar{x}\} \cup X'$  où  $X'$  ne contient pas les lettres  $x$  et  $\bar{x}$  ; (l'alphabet que nous avons aussi appelé  $X$  qui intervient dans le paragraphe II du chapitre deuxième est le cas où  $X'$  est réduit à deux lettres  $y$  et  $\bar{y}$  ).

Soit  $\delta$  le morphisme de  $X^*$  dans l'anneau  $Z$  des entiers relatifs définit par :

$$\delta(f) = |f|_x - |f|_{\bar{x}} .$$

(Ainsi  $\delta(1) = 0$  ) .

(Ce morphisme avait été noté  $\delta_x$  dans le chapitre II mais puisqu'il n'y a plus de confusion possible avec un  $\delta_y$  nous le notons  $\delta$  ).

L'opérateur  $d$  . Nous le définissons dans toutes les semi-algèbres  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  , en précisant à chaque fois que nous l'utiliserons le semi-anneau  $\mathcal{A}$  ; (quand on ne précisera pas  $\mathcal{A}$  , c'est qu'il s'agit de la semi-algèbre  $\mathcal{B}\langle\langle X \rangle\rangle$  des parties de  $X^*$  ).

- Pour tout mot  $f$  qui n'a pas de facteur gauche  $g$  , différent de 1 , vérifiant  $\delta(\bar{g}) = 0$  ; alors :

$$d(f) = 0 .$$

- Si  $f$  admet des facteurs gauches (non vides) d'image nulle par  $\delta$  , soit  $g$  le facteur gauche (non vide) de  $f$  le plus court vérifiant  $\delta(g) = 0$  , alors si  $f = gh$  ,  $d(f) = g\bar{x}h$  .

- Pour toute série  $r$  de  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$

$$d(r) = \sum_{f \in X^*} (r, f) d(f) .$$

Cette série est bien définie puisque  $d(f)$  est ou bien 0 ou bien un mot de  $X^*$ , et que si  $f$  est différent de  $g$   $d(f)$  est différent de  $d(g)$ .

L'opérateur D : Il est défini aussi pour toutes les semi-algèbres  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$ .

- Pour tout mot  $f$  de  $X^*$ ,  $D(f)$  est une partie de  $X^*$  composée de tous les mots  $w$  construits comme suit :

- toute décomposition de  $f$  sous la forme  $f = gh$  où  $\delta(g) = 0$  ( $g$  pouvant être le mot vide 1) engendre le mot  $w = g\bar{x}h$ .

Remarquons que quelque soit le mot  $f$ ,  $\bar{x}f$  appartient à  $D(f)$ .

- Pour une série  $r$  de  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$ ,  $r' = D(r)$  est donnée par  $(r', w) = \sum (r, f)$  (somme étendue à tous les mots  $f$  vérifiant  $w \in D(f)$ ).

Cette somme est bien définie car pour tout mot  $w$  il existe un nombre fini (éventuellement nul) de mots  $f$  tels que  $w \in D(f)$ .

Remarquons que si on définit l'opérateur  $d_i$ , pour tout mot  $f$  qui se décompose sous la forme :

$$f = g_1 g_2 \dots g_i h \text{ (où } \delta(g_j) = 0 \text{ et } g_j \neq 1 \text{ pour } j=1, i)$$

par  $d_i(f) = g_1 g_2 \dots g_i \bar{x} h$  et  $d_i(f) = 0$  sinon.

Alors  $d_0(f) = \bar{x}f$   $d_1 = d$  et

$$\text{pour tout mot } f, D(f) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(f), \text{ cette somme étant}$$

bien définie puisque quelque soit le mot  $f$  il existe  $i_0$  tel que  $d_i(f) = 0$  pour  $i \geq i_0$ .

Les opérateurs  $\Lambda$  et  $\nabla$  :

Ils opèrent dans les semi-algèbres  $\mathcal{A}\langle\langle x, y \rangle\rangle$  à deux variables  $x$  et  $y$ .

Pour  $\Lambda$  : Si  $f$  ne contient que des  $y$  alors,  $\Lambda f = 0$ ,  
sinon  $f = y^n x g$  et  $\Lambda f = y^{n+1} g$ .

$\Lambda$  s'étend alors linéairement à  $\mathcal{A}\langle\langle x, y \rangle\rangle$ .

Pour  $\nabla$  : On le définit d'abord récursivement sur les mots

par :  $\nabla 1 = 1$ ,

$$\nabla x f = x f + y \nabla f$$

$$\nabla y f = y \nabla f,$$

et  $\nabla$  s'étend par linéarité à  $\mathcal{A}\langle\langle x, y \rangle\rangle$ .

On peut remarquer que  $\nabla = (1 - \Lambda)^{-1}$ . On remarque que  $\nabla$  vérifie la relation :

$$\nabla \xi = \sum_{n \geq 0} \Lambda^n \xi \quad (\text{ou } \Lambda^0 \xi = \xi).$$

Cette relation étant valide, car le terme de plus bas degré de  $\Lambda^n \xi$  est de degré nécessairement supérieur ou égal à  $n$ .

## 2. Quelques propriétés.

Propriété II.1. :  $d$  et  $D$  sont des transductions algébriques.

Remarquons que  $d$  et  $D$  ne peuvent être des transductions rationnelles (ou même des  $C$ -transductions au sens de Nivat [47]).

En effet, si on considère dans  $\mathcal{B}\langle\langle x, \bar{x} \rangle\rangle$  les deux langages  $L_1$  et  $L_2$  suivants  $L_1 = x^* \bar{x}^*$  et  $L_2 = \{x^n \bar{x}^* x^n \mid n \geq 0\}$  alors on a respectivement :

$$d(L_1) = \{x^n \bar{x}^m \mid m > n \geq 0\}$$

$$D(L_1) = \bar{x} L_1 \cup d(L_1) \quad \text{et} \quad D(L_1) \cap L_1 = d(L_1)$$

$$d(L_2) = \{x^{n-m}x^n \mid m > n \geq 0\}$$

$$D(L_2) = \bar{x}L_2 \cup d(L_2) \cup \{\bar{x}^{n-m}x^p\bar{x}x^{n-p} \mid m = n+p\} ,$$

$d(L_1)$  et  $D(L_1)$  images d'un langage rationnel ne sont pas rationnels.  
 $d(L_2)$  et  $D(L_2)$  images d'un langage algébrique ne sont pas algébriques.

Pour montrer que  $d$  et  $D$  sont des transductions algébriques, on remarque que les séries  $\hat{d}$  et  $\hat{D}$  qui les définissent dans

$\mathcal{A}\langle\langle X \otimes X \rangle\rangle$  le sont :

$$\hat{d} = \left[ \begin{array}{c} \sum_{\delta(f)=0} (f, f) \\ f \neq 1 \\ \delta(f') \neq 0 \\ \text{pour } f=f'g \end{array} \right] (1, \bar{x}) \left[ \sum_{f \in X^*} (f, f) \right]$$

$$\hat{D} = \left[ \sum_{\delta(f)=0} (f, f) \right] (1, \bar{x}) \left[ \sum_{f \in X^*} (f, f) \right] .$$

En effet la série  $a_1 = \sum (f, f)$ , où la somme est étendue aux mots  $f$  qui ont une image nulle par  $\delta$  et dont aucun facteur gauche ne vérifie cette propriété, est une série algébrique de  $\mathcal{A}\langle\langle X \otimes X \rangle\rangle$  puisqu'elle est la première composante du 2-uplet solution de l'équation :

$$\xi_1 = (x, x)\xi_2(\bar{x}, \bar{x}) + (\bar{x}, \bar{x})\xi_1(x, x) + \sum_{x' \in X'} (x', x')$$

$$\xi_2 = 1 + \sum_{x' \in X'} (x', x')\xi_2 + (x, x)\xi_2(\bar{x}, \bar{x})\xi_2 + (\bar{x}, \bar{x})\xi_2(x, x)\xi_2 .$$

La série  $a_2 = \sum_{\delta(f)=0} (f, f)$  est la deuxième composante de ce 2-uplet

et est donc algébrique. De plus la série  $\sum_{f \in X^*} (f, f)$  est rationnelle.

$\hat{d}$  et  $\hat{D}$  sont donc des séries algébriques.



Propriété II.2. : Les opérateurs  $\Lambda$  et  $\nabla$  sont des transductions rationnelles.

En effet  $\hat{\Lambda}$  et  $\hat{\nabla}$  sont données par :

$$\hat{\Lambda} = [1-(y,y)]^{-1}(x,y) \left( \sum_{f \in X^*} (f,f) \right)$$

$$\hat{\nabla} = \left( \sum_{f \in X^*} (f,\pi f) \right) \left( \sum_{f \in X^*} (f,f) \right)$$

où  $\pi$  est le morphisme de  $\{x,y\}^*$  sur  $\{y\}^*$  tel que  $\pi(x) = \pi(y) = y$ .

$\hat{\Lambda}$  est évidemment rationnelle, pour montrer que  $\hat{\nabla}$  l'est aussi il

suffit de vérifier que la série  $a = \sum_{f \in X^*} (f,\pi f)$  est rationnelle, or

cette série vérifie l'équation  $a = (x,y)a + (y,y)a + 1$  ; soit

$a = (1-(x,y)-(y,y))^{-1}$ ,  $a$  est rationnelle.

Soit  $L_0$  le langage inclus dans  $X^*$  défini par :

$f$  appartient à  $L_0$  si  $\delta(f) = 0$  et si pour tout facteur gauche  $f'$  de  $f$  ( $f = f'f''$ )  $\delta(f'') \geq 0$ . On a alors la propriété suivante :

Propriété II.3. : Dans  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$ , si  $A$  est un langage inclus dans  $L_0$  et si  $B$  est un langage quelconque, alors :

$$D(A.B) = D(A).B + A.D(B) .$$

Dans une algèbre  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$  ( $\mathcal{A}$  anneau), si  $a$  est une série dont le support est inclus dans  $L_0$  et si  $b$  est quelconque, alors :

$$D(ab) = D(a).b + aD(b) - a\bar{x}b .$$

Pour montrer cette propriété, nous vérifions que pour tout couple de mots  $f$  et  $g$  tels que  $f$  appartient à  $L_0$ , on a :

$$D(f.g) = D(f).g \cup fD(g)$$

et  $D(f).g \cap fD(g) = \{f\bar{x}g\}$  .

APPLICATIONS ANALYTIQUES

Ainsi les deux parties de la propriété sont démontrées par linéarité.

Si  $h$  appartient à  $D(fg)$  alors  $h = h_1 \bar{x} h_2$  (où  $\delta(h_1) = 0$ ),  
 si  $|h_1| < |f|$  alors  $f = h_1 h'_1$  et  $h = h_1 \bar{x} h'_1 g$  appartient à  
 $D(f).g$  ; de même si  $|h_1| \geq |f|$ ,  $h$  appartient à  $fD(g)$ . Ainsi,  
 $D(fg) \subset fD(g) + D(f).g$ .

Réciproquement, si  $h$  appartient à  $D(f).g$  alors  $h = f_1 \bar{x} f_2 g$   
 avec  $\delta(f_1) = 0$  et  $h$  appartient à  $D(fg)$  ; si  $h$  appartient à  
 $fD(g)$   $h = fg_1 \bar{x} g_2$  et  $h \in L_0$  implique  $\delta(f) = 0$ , ainsi  $\delta(fg_1) = 0$   
 et  $h$  appartient à  $D(f.g)$ . Ainsi  $D(f.g) = fD(g) \cup D(f).g$ .

Si  $h$  appartient à  $D(f).g \cap fD(g)$ , alors nécessairement  
 $h = h_1 g = f h_2$ , or tous les mots de  $D(f)$  ont pour longueur  $|f|+1$ ,  
 ainsi  $h = fug$  où  $u$  est une lettre qui ne peut être que  $\bar{x}$ . La  
 propriété II.3 est ainsi démontrée.

Propriété II.4. : Si  $a$  et  $b$  sont deux séries de  $\mathcal{K}\langle\langle X \rangle\rangle$  où  
 $\mathcal{K}$  est un anneau, alors :

$$\Lambda(a.b) = (\Lambda a).b + a(0,y).(\Lambda b)$$

$$\nabla(a.b) = (\nabla a).b + a(y,y).(\nabla b) - a(y,y).b$$

$a(0,y)$  et  $a(y,y)$  désignant les séries où respectivement on fait  
 $x = 0$  et  $x = y$  dans  $a$ .

Ce résultat se vérifie comme pour la propriété précédente  
 pour  $a = f$ ,  $b = g$  deux mots de  $X^*$  et s'étend par linéarité  
 à  $\mathcal{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ .

Propriété II.5. : Les opérateurs  $d$  et  $D$  n'ont pas d'image commu-  
tative. Les images commutatives de  $\Lambda$  et  $\nabla$  existent et sont données  
par :

$$\chi\Lambda(a) = \frac{y}{x} (\chi a(x,y) - \chi a(0,y))$$

$$\chi\nabla(a) = \frac{x\chi a(x,y) - y\chi a(y,y)}{x-y}$$

Il suffit pour montrer que  $d$  et  $D$  n'ont pas d'image commutative, d'exhiber deux mots  $f$  et  $g$  tels que  $\chi(f) = \chi(g)$  et  $\chi df \neq \chi dg$  ;  $\chi Df \neq \chi Dg$  .

Ces deux mots sont :  $f = \overline{\overline{\overline{xxx}}}$  ,  $g = \overline{\overline{\overline{xxx}}}$  .

En effet :  $\chi f = \chi g = x^2 \overline{x^3}$  ;  $df = 0$  ,  $dg = (\overline{\overline{\overline{xxx}}}) \overline{\overline{\overline{xxx}}}$  ,  $D(f) = \overline{x}f$  et  $Dg = \overline{x}g + g\overline{x}$  , et  $\chi Dg = 2\chi Df$  .

Pour vérifier que  $\chi\Lambda$  et  $\chi\nabla$  sont bien les opérateurs donnés, il suffit de le vérifier pour les mots  $f$  de  $X^*$  .

Pour  $\Lambda$  : si  $f = y^n$   $\Lambda f = 0$   $\chi\Lambda f = 0$  et

$$\frac{y}{x} (\chi f - \chi \overline{f}) = \frac{y}{x} (y^n - y^n) = 0 ,$$

$$\text{si } f = y^n x g \quad \Lambda f = y^{n+1} g \quad \text{et} \quad \chi\Lambda f = y^{n+1} \chi g$$

$$\frac{y}{x} (\chi f - \chi \overline{f}) = \frac{y}{x} (xy^n g - 0) = y^{n+1} g .$$

Pour  $\nabla$  : on vérifie le résultat par récurrence sur la longueur de

$$f : \quad \nabla 1 = 1 \quad \chi 1 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x-y}{x-y} = 1 .$$

$$\text{Si } f = xg \quad \nabla f = xg + y\nabla g .$$

$$\chi \nabla f = x\chi g + y \frac{x\chi g - y^{n+1}}{x-y} \quad \text{si } |g| = n \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

$$\text{Ainsi :} \quad \chi \nabla f = \frac{x^2 \chi g - y^{n+2}}{x-y} = \frac{x\chi f - y \cdot (y^{n+1})}{x-y} ,$$

$$\text{Si } f = yg \quad \nabla f = y\nabla g ,$$

$$\chi \nabla f = y \frac{x\chi g - y^{n+1}}{x-y} \quad \text{si } |g| = n$$

$$= \frac{x(\chi f) - y(y^{n+1})}{x-y} .$$

C.Q.F.D.

3. Relation entre  $\nabla$ , D et les cartes planaires.

Cette relation est mise en évidence par les deux propriétés suivantes :

Propriété II.6. : La solution  $\xi$  de l'équation suivante dans

$\mathbb{Z}\langle\langle x, y \rangle\rangle$  :

$$\xi = 1 + x\xi x\xi + xy\nabla\xi$$

admet pour image commutative la série :

$$a = 1 + \sum_{n, p > 0} a_{p, q} x^p y^q$$

où  $a_{p, q}$  est le nombre de cartes planaires pointées ayant p+q brins dont p appartiennent au sommet distingué.

Propriété II.7. : Le langage L de Lehman-Lenormand vérifie dans

$\mathbb{B}\langle\langle x, \bar{x}, y, \bar{y} \rangle\rangle$  l'équation  $L = 1 + yL\bar{y}L + xD(L)$  .

Preuve de la propriété II.6.: Nous utilisons le théorème IV (chapitre premier, paragraphe VI). Ce théorème établit que les cartes planaires pointées, ayant  $k$  sommets, sont en bijection avec les mots du langage  $L_k$  donné par les équations :

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 + x_0 L_1 \bar{x}_0 L_1 \\ L_2 &= x_0 \vec{L}_1 \bar{x}_0 L_2 + x_0 L_2 \bar{x}_0 L_1 + x_0 \bar{x}_1 \nabla_1 L_1 \\ &\dots\dots\dots \\ L_{k+1} &= \sum_{0 \leq p \leq k} x L_{p+1}^{\rightarrow} \bar{x}_0 L_{k-p+1} + x_0 \bar{x}_k \nabla_k L_k \end{aligned}$$

et que le nombre de cartes pointées ayant  $p_i$  brins appartenant au sommet numéroté  $i$  (pour  $i=0, k$ ) est égal au nombre de mots de  $L_{k+1}$  ayant  $p_i$  occurrences de  $x_i$  ou  $\bar{x}_i$ . Ainsi, soit  $\bar{\omega}$  le morphisme de  $X_k^*$  dans  $\{x, y\}^*$  défini par  $\bar{\omega}x_0 = \bar{\omega}\bar{x}_0 = x$  ;  $\bar{\omega}x_i = \bar{\omega}\bar{x}_i = y$  (pour  $i \neq 0$ ), la série  $a_k = \bar{\omega}x_0(L_{k+1})$  est égale à

$1 + \sum_{p,q} a_{p,q}^{k+1} x^p y^q$  où  $a_{p,q}^{k+1}$  est le nombre de cartes planaires pointées ayant  $k+1$  sommets,  $p+q$  brins dont  $p$  sont incidents au sommet distingué. On a donc  $a = \sum_{k \geq 0} a_k$ . On obtient, en prenant l'image

par  $\mathbb{W}$  des équations données plus haut, les équations suivantes pour les séries  $l_{k+1} = \mathbb{W}l_{k+1}$  (considérées comme élément de  $Z\langle\langle x, y \rangle\rangle$ ) :

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 1 + xl_1xl_1 \\
 &\dots \\
 l_{k+1} &= \sum_{0 \leq p \leq k} xl_{p+1}xl_{k-p+1} + xy\mathbb{V}l_k
 \end{aligned}$$

car quelque soit l'entier  $k$ , on a  $\mathbb{W}\mathbb{V}_k f = \mathbb{V}\mathbb{W}f$ . Ainsi en faisant la somme de ces équations, on obtient que la série  $\xi = \sum_{i \geq 1} l_i$  vérifie :

$$\xi = 1 + x\xi x\xi + xy\mathbb{V}\xi$$

Preuve de la propriété II.7. : Soit  $M$  le langage solution de l'équation  $M = 1 + yM\bar{y}M + xD(M)$ , (cette équation admet une solution unique d'après la propriété I.1, puisque l'opérateur qui à  $A$  fait correspondre  $1+yA\bar{y}A+xD(A)$  est contractant dans  $\mathbb{H}\langle\langle X \rangle\rangle$ ). Nous montrons que  $M = L$  (la définition de  $L$  est donnée au chapitre deuxième, §.II.3.) par récurrence sur la longueur des mots.

- Pour les mots de longueur 0, le mot vide 1 appartient aux deux langages.

1°). Soit  $f$  un mot de  $L$  :

- Si  $f$  commence par  $x$ ,  $f$  s'écrit de manière unique sous la forme  $f = xf_1\bar{x}f_2$ , où  $\delta(f_1) = 0$ . (Puisque  $\pi_x(f)$  appartient à  $L_x$ ).  $f_1f_2$  appartient alors à  $L$  d'après la propriété II.9 (chapitre 2). Ainsi d'après l'hypothèse de récurrence  $f_1f_2$  est élément de  $M$  et  $xD(M) \subset M$  implique alors que  $f = xf_1\bar{x}f_2$  ( $\in D(f_1f_2)$ ) appartient à  $M$ .

- Si  $f$  commence par  $y$ ,  $f$  s'écrit de manière unique sous la forme  $f = yf_1\bar{y}f_2$  où  $\pi_y(f_1) \in L_y$ . Ainsi, pour  $f_1$ , on a :  $\delta_y(f_1) = 0$  et  $\delta_y(f'_1) \leq 0$  pour tout facteur droit  $f'_1$  de  $f_1$ . Ceci implique, d'après la propriété II.4 du chapitre deuxième, que  $\delta_x(f_1) \leq 0$ ;  $\pi_x(f_1)$  étant facteur gauche d'un mot de  $L_x$ , on ne peut avoir que  $\delta_x(f_1) = 0$  et ainsi  $\pi_x(f_1)$  appartient à  $L_x$  et  $f_1$  à  $L$ . Il en est de même pour  $f_2$  d'après la propriété II.6 du même chapitre. D'après l'hypothèse de récurrence ces deux mots appartiennent à  $M$  et  $yf_1\bar{y}f_2$  ( $\in y\bar{M}yM$ ) est aussi élément de  $M$ .

2°). Soit  $f$  un mot de  $M$  :

- Si  $f$  commence par  $x$ ,  $f$  appartient à  $xD(M)$  et s'écrit  $f = xf_1\bar{x}f_2$  où  $f_1f_2 \in M$ , d'après l'hypothèse de récurrence  $f_1f_2 \in L$  et en appliquant la propriété II.7 du chapitre 2, on obtient  $xf_1\bar{x}f_2 = f \in L$ .

- Si  $f$  commence par  $y$ ,  $f$  appartient à  $y\bar{M}M$  et s'écrit  $f = yf_1\bar{y}f_2$  où  $f_1$  et  $f_2$  appartiennent à  $M$ . D'après l'hypothèse de récurrence  $f_1$  et  $f_2$  sont aussi dans  $L$ . En appliquant alors deux fois la propriété II.5 du chapitre 2, on obtient que  $yf_1\bar{y}$  et puis  $yf_1\bar{y}f_2$  sont éléments de  $L$ .

III. DE CERTAINES EQUATIONS EN  $d$  ET  $D$ .

Dans ce paragraphe nous cherchons à résoudre des équations dans  $\mathcal{K}\langle\langle X \rangle\rangle$  faisant intervenir  $d$  ou  $D$ .

1). Les équations linéaires en  $D$  dans  $\mathcal{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ .

Nous nous proposons de chercher, dans  $\mathcal{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ , dans quels cas l'équation

$$L = A + BD(L)$$

(où  $A$  et  $B$  sont des éléments connus de  $\mathcal{K}\langle\langle X \rangle\rangle$  et où  $L$  est l'inconnue) admet une solution algébrique. Remarquons tout de suite la propriété suivante :

Propriété III.1. : L'équation  $L = A + BD(L)$  admet une solution unique  
quels que soient  $A$  et  $B$ .

En effet, l'application qui à un langage  $M$  fait correspondre  $A + BD(M)$  est une contraction puisque  $D$  ajoute une lettre à chaque mot sur lequel il opère.

Si  $A = \emptyset$ , la solution de cette équation est  $L = \emptyset$ , si  $B = \emptyset$  la solution est  $L = A$ .

La propriété suivante permet d'écarter tout de suite le cas où  $A$  et  $B$  ne sont pas des parties rationnelles de  $X^*$ .

Propriété III.2. : Soit l'alphabet  $X = \{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$ , soit  $L_y$  le langage qui vérifie l'équation  $L_y = 1 + yL_y\bar{y}$ , alors les équations

$$L = L_y + xD(L) \quad (I)$$

$$L = 1 + L_yxD(L) \quad (II)$$

n'ont pas de solution algébrique.

Soit  $L_1$  la solution de (I) et  $L_2$  celle de (II). Calculons  $L_1 \cap x^*y^*(\bar{x}\bar{y})^*$ , il est clair que tout mot de  $L_1$  a autant d'occurrences de  $x$  que d'occurrences de  $\bar{x}$  et autant d'occurrences de  $y$

APPLICATIONS ANALYTIQUES

que d'occurrences de  $\bar{y}$  (on peut, si on n'est pas convaincu le démontrer par récurrence sur le nombre de  $x$  apparaissant dans le mot) ; ainsi :

$$L_1 \cap x^*y^*(\bar{x}\bar{y})^* \subset \bigcup_{n \geq 0} \{x^n y^n (\bar{x}\bar{y})^n\} .$$

Or tout mot  $x^n y^n (\bar{x}\bar{y})^n$  est un mot de  $L_1$  puisqu'il appartient à  $\underbrace{(xD)(xD) \dots (xD)}_{n \text{ fois}} (y^{\overline{n-n}})$  et que  $y^{\overline{n-n}} \in L_y$  ; ainsi  $L_1 \cap x^*y^*(\bar{x}\bar{y})^*$  est un langage non algébrique et il en est de même pour  $L_1$  (car l'intersection d'un algébrique et d'un rationnel est un langage algébrique).

Pour  $L_2$ , calculons  $x^*y^*(\bar{x}\bar{y})^*x\bar{x} \cap L_2$ . Pour les mêmes raisons que pour  $L_1$ , les mots de  $L_2$  ont autant d'occurrences de  $y$  (resp. de  $x$ ) que d'occurrences de  $\bar{y}$  (resp. de  $\bar{x}$ ), ainsi  $x^n y^n (\bar{x}\bar{y})^n x\bar{x} \supset x^*y^*(\bar{x}\bar{y})^*x\bar{x} \cap L_2$  ; or tout mot de  $x^n y^n (\bar{x}\bar{y})^n x\bar{x}$  appartient à  $L_2$  puisqu'il appartient à  $\underbrace{x\bar{D}.x\bar{D} \dots x\bar{D}}_{n \text{ fois}} [y^{\overline{n-n}} x\bar{D}(1)]$  et que  $1 \in L_y$  et  $y^{\overline{n-n}} \in L_y$ .

La conclusion est alors la même que pour  $L_1$ .

Nous pouvons ainsi écarter le cas où les langages  $A$  et  $B$  ne sont pas rationnels et nous nous proposons d'établir que l'équation :

$$L = A + B D(L)$$

a pour solution un langage algébrique dans les cas suivants :

- (1) -  $A = 1$        $B = y$
- (2) -  $A = 1$        $B = x$
- (3) -  $A = 1$        $B = fxg$     où  $f$  et  $g \in X^*$
- (4) -  $A \subset X'^*$      $B = B'x$        $B' \subset X'^*$
- (5) -  $A = \bar{x}^*$        $B = x$
- (6) -  $A = 1$        $B = x^*$
- (7) -  $A = x$        $B = \bar{x}^*$  .



Les cas (1) et (2) sont assez simples, dans le cas (3) nous donnons des équations explicites du langage solution ; (4) nous sera utile dans la partie V pour l'énumération ; (5), (6) et (7) sont les seuls cas où A et B contiennent des  $x$  et des  $\bar{x}$ .

Propriété III.3. : Le langage  $M_1$  solution de l'équation

$$L = 1 + yD(L)$$

vérifie l'équation polynomiale  $M_1 = 1 + yM_1\bar{x}M_1$  et est ainsi un langage algébrique non ambigu.

Nous montrons ce résultat par récurrence sur la longueur des mots de  $M_1$ .

- Le mot vide  $1$  appartient aux deux langages  $L$  et  $M_1$ .

- Soit  $f$  un mot, différent de  $1$ , de  $M_1$  alors il existe une décomposition (unique) de  $f$  sous la forme  $f = yf_1\bar{x}f_2$  telle que  $|f_1|_{\bar{x}} = 0$ . Il est clair que  $f_1f_2$  appartient alors à  $M_1$  et donc à  $L$  d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi  $f$  qui est élément de  $yD(f_1f_2)$  appartient à  $yD(L)$ , donc à  $L$ .

- Soit  $f$  un mot de  $L$ , différent de  $1$ ,  $f$  par construction de  $L$  se décompose en  $f = yf_1\bar{x}f_2$  où  $f_1f_2$  appartient à  $L$  et où  $|f_1|_{\bar{x}} = 0$ . D'après l'hypothèse de récurrence  $f_1f_2$  appartient à  $M_1$ ,  $|f_1|_{\bar{x}} = 0$  implique alors que  $yf_1\bar{x}f_2$  appartient à  $M_1$ .

Propriété III.4. : Le langage  $L_1$  solution de l'équation

$$L = 1 + xD(L)$$

vérifie l'équation polynomiale  $L_1 = 1 + xL_1\bar{x}L_1$  et est ainsi algébrique non ambigu.

De même que pour la propriété III.3, nous démontrons ce résultat par récurrence sur la longueur des mots de  $L_1$ .

APPLICATIONS ANALYTIQUES

- Le mot vide  $1$  appartient aux deux langages  $L$  et  $L_1$ .

- Soit  $f$  un mot, différent de  $1$ , de  $L_1$  alors il existe une décomposition unique de  $f$  sous la forme  $f = x f_1 \bar{x} f_2$  telle que  $f_1 \in L_1$ ,  $f_2 \in L_1$ . Alors  $\delta(f_1) = 0$  implique que  $f$  appartienne à  $x D(f_1 f_2)$  et,  $L_1$  étant un sous-monoïde, on obtient que  $f$  appartient à  $x D(L)$  d'après l'hypothèse de récurrence.

- Soit  $f$  un mot, différent de  $1$ , de  $L$  alors il existe une décomposition de  $f$  sous la forme  $f = x f_1 \bar{x} f_2$  telle que  $\delta(f_1) = 0$  et que  $f_1 f_2$  appartienne à  $L$ . L'hypothèse de récurrence implique que  $f_1 f_2$  est élément de  $M_1$  et  $\delta(f_1) = 0$  entraîne alors  $f_1 \in L_1$ ,  $f_2 \in L_1$ , donc  $f = x f_1 \bar{x} f_2 \in L_1$ .

Théorème IX. : Soit  $f$  et  $g$  deux mots de  $X^*$  (ne contenant pas d'occurrences de  $x$  ou de  $\bar{x}$ )  $f$  s'écrivant  $f = a_1 a_2 \dots a_k$  ( $a_i \in X'$ ), alors l'équation

$$L = 1 + f x g D(L)$$

admet une solution et une seule qui est le langage algébrique non ambigu donné par le système d'équations :

$$\begin{aligned} L &= 1 + L_k x g L_k \bar{x} \\ L_k &= L_{k-1} a_k + L_k x g L_k \bar{x} \\ L_{k-1} &= L_{k-2} a_{k-1} + L_k x g L_{k-1} \bar{x} \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ L_2 &= L_1 a_2 + L_k x g L_2 \bar{x} \\ L_1 &= L a_1 + L_k x g L_1 \bar{x} \end{aligned}$$

Démonstration : Nous vérifions le résultat en calculant  $D(L)$  pour le langage  $L$  donné par le système d'équations. Nous en avons donné une autre démonstration dans "Automata, Languages and Programming" édité par M. Ni-vat (North Holland, 1973).

Reportons la valeur de  $L$  dans l'équation donnant  $L_1$ , on obtient :

$$L_1 = a_1 + L_K xg(L\bar{x}a_1 + L_1\bar{x}) .$$

En reportant cette valeur dans l'équation donnant  $L_2$  :

$$L_2 = a_1 a_2 + L_K xg(L\bar{x}a_1 a_2 + L_1\bar{x}a_2 + L_2\bar{x}) .$$

Soit en itérant  $i$  fois, on trouve pour  $L_i$  :

$$L_i = a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i + L_K xg(L\bar{x}a_1 a_2 \dots a_i + L_1\bar{x}a_2 \dots a_i + \dots L_j\bar{x}a_{j+1} \dots a_i + \dots + L_{i-1}\bar{x}a_i + L_i\bar{x}) .$$

Et finalement, pour  $L_K$  :

$$L_K = f + L_K xg(L\bar{x}f + L_1\bar{x}a_2 \dots a_k + \dots L_{K-1}\bar{x}a_k + L_K\bar{x}) .$$

Notons  $M_K$  le langage  $L\bar{x}f + L_1\bar{x}a_2 \dots a_k + \dots + L_{K-1}\bar{x}a_k + L_K\bar{x}$ , on a ainsi :

$$L_K = f + L_K xgM_K .$$

Calculons maintenant  $D(L_1)$  dans les équations donnant les  $L_i$  ; en remarquant que tous les mots de  $xgL_i\bar{x}$  ont une image nulle par  $\delta$  et sont tels que tous leurs facteurs gauches ont une image strictement positive (et en utilisant la propriété II.3).

$$\begin{aligned} D(L) &= L\bar{x} + D(L_K)xgL\bar{x} \\ D(L_K) &= L_K\bar{x} + D(L_{K-1})a_k + D(L_K)xgL_K\bar{x} \\ D(L_{K-1}) &= L_{K-1}\bar{x} + D(L_{K-2})a_{k-1} + D(L_K)xgL_{K-1}\bar{x} \\ &\dots \\ &\dots \\ D(L_2) &= L_2\bar{x} + D(L_1)a_2 + D(L_K)xgL_2\bar{x} \\ D(L_1) &= L_1\bar{x} + D(L)a_1 + D(L_K)xgL_1\bar{x} . \end{aligned}$$

APPLICATIONS ANALYTIQUES

En reportant  $D(L)$  dans l'équation donnant  $D(L_1)$ , on trouve :

$$D(L_1) = L_1 \bar{x} + L \bar{x} a_1 + D(L_K) xg(L_1 \bar{x} + L \bar{x} a_1) .$$

En reportant cette valeur dans l'équation donnant  $D(L_2)$  :

$$D(L_2) = L_2 \bar{x} + L_1 \bar{x} a_2 + L \bar{x} a_1 a_2 + D(L_K) xg[L_2 \bar{x} + L_1 \bar{x} a_2 + L \bar{x} a_1 a_2] .$$

En itérant cette opération, on obtient pour  $D(L_K)$  :

$$D(L_K) = M_K + D(L_K) xgM_K .$$

Soit  $D(L_K) = M_K (1 - xgM_K)^{-1}$ , (car  $1 - xgM_K$  est une série qui a pour terme constant 1, ce qui implique qu'elle est inversible). On obtient en reportant dans

$$D(L) = L \bar{x} + D(L_K) xgL \bar{x}, \quad D(L) = L \bar{x} + M_K (1 - xgM_K)^{-1} xgL \bar{x} \quad \text{et} \quad fxgD(L) = fxgL \bar{x} + fxgM_K (1 - xgM_K)^{-1} xgL \bar{x} .$$

Or  $xgM_K$  et  $(1 - xgM_K)^{-1}$  commutent, ce qui donne :

$$fxgD(L) = fxgL \bar{x} + f(1 - xgM_K)^{-1} xgM_K xgL \bar{x} .$$

En utilisant la relation que nous avons établie avant de calculer les  $D(L_i)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} fxgD(L) &= fxgL \bar{x} + L_K xgM_K xgL \bar{x} \\ &= (f + L_K xgM_K)(xgL \bar{x}) . \end{aligned}$$

En utilisant une nouvelle fois la relation :

$$fxgD(L) = L_K xgL \bar{x} .$$

Enfin, la première équation du système définissant  $L$  donne :

$$L = 1 + fxgD(L) .$$

Le théorème IX est ainsi démontré.

Dans la suite, nous aurons besoin du produit  $\bar{w}$  de  $\mathfrak{B}(X^*) \times \mathfrak{B}(X'^*)$  dans  $\mathfrak{B}(X^*)$  définit par :

$$1 \bar{w} g = g$$

$$fy \bar{w} g = fyg \quad \text{quelque soit } y \text{ dans } X'$$

$$fx \bar{w} g = fxg$$

$$(f \bar{x}) \bar{w} (g) = \sum_{g'g''=g} (f \bar{w} g') \bar{x} g'' .$$

En quelque sorte, les lettres de  $X'$  commutent avec  $\bar{x}$ , mais pas avec les autres.

Théorème X. : Soient A et B deux parties rationnelles de  $X'^*$ , alors l'équation  $L = A + BxD(L)$  a pour solution un langage algébrique non ambigu.

Nous démontrons que le langage  $L$  solution de cette équation est donné par :

$$L = L_0 \cap (B_1x)^*.A_1$$

où : -  $L_0$  est le langage donné dans le paragraphe II (on peut aussi dire que  $L_0 = \pi_x^{-1}(L_1)$  ;  $L_1$  étant donné dans la propriété III.4) ;

$$- B_1 = x^* \bar{w} B ;$$

$$- A_1 = \bar{x}^* \bar{w} A .$$

Il est alors immédiat que si  $A$  et  $B$  sont rationnelles, il en est de même pour  $B_1$  et  $A_1$  ; alors  $L_0$  étant un langage algébrique non ambigu,  $L$  vérifie ces propriétés qui sont conservées par image inverse et intersection par un rationnel ( voir par exemple Ginsburg [24]).

$$\underline{\text{Vérifions donc que}} \quad L = L_0 \cap (B_1x)^*.A_1 .$$

Nous effectuons cette vérification par récurrence sur le nombre d'occurrences de  $x$  apparaissant dans les mots de  $L$  ;

- Soit  $f$  un mot de  $L$  n'ayant aucune occurrence de  $x$ ,  $f$  appartient alors à  $A$ , ainsi  $f$  appartient à  $L_0$  et à  $(B_1x)^*.A_1$  puisque  $A \subset A_1$  et que  $(B_1x)^*.A_1 \supset A_1$ . Réciproquement, si  $f$  est un mot de  $L_0 \cap (B_1x)^*.A_1$  ne contenant aucune occurrence de  $x$  il ne contient aucune occurrence de  $\bar{x}$  (comme mot de  $L_0$ ) et est donc élément de  $A$ , donc de  $L$ .

- Soit  $w$  un mot de  $L$  tel que  $|w|_x = n > 0$ . Par définition de  $L$ , il s'écrit :

APPLICATIONS ANALYTIQUES

$w = fxg\bar{x}h$  où  $\delta(g) = 0$ , où  $gh$  appartient à  $L$  et où  $f$  appartient à  $B$ .  
 D'après l'hypothèse de récurrence  $gh$  appartient à  $L_0$ ,  $\delta(g) = 0$  implique alors que  $g$  et  $h$  appartiennent à  $L_0$ ; il en est donc de même pour  $fxg\bar{x}h$  (puisque  $f$  ne contient pas d'occurrence de  $x$  ou de  $\bar{x}$ ).

D'autre part,  $gh$  appartient à  $(B_1x)*A_1$  d'après l'hypothèse de récurrence, il en est de même pour  $g\bar{x}h$  car on ne fait qu'ajouter un  $\bar{x}$  supplémentaire. Ainsi  $w$  appartient à  $Bx(B_1x)*A_1 \cap L_0 \subset (B_1x)*A_1 \cap L_0$ .

- Réciproquement, soit  $w$  un mot de  $L_0 \cap (B_1x)*A_1$  tel que  $|w|_x = n > 0$ . Soit  $f$  le facteur gauche le plus long de  $w$  tel que  $|f|_x = 0$ , ainsi  $w = fxf'$ . Du fait que  $w$  appartient à  $L_0$  on déduit  $w = fxg\bar{x}h$  où  $g$  et  $h$  appartiennent à  $L_0$ . D'autre part,  $f$  est élément de  $B_1$  car  $w$  appartient à  $(B_1x)*A_1$  et les seules occurrences de  $x$  dans  $f$  sont celles qui correspondent à  $B_1x$ . Donc  $f$  appartient à  $B$  car  $|f|_x = |f|_{\bar{x}} = 0$ . Enfin  $gh$  appartient à  $L_0$  (car c'est un sous-monoïde) et à  $(B_1x)*A_1$  car on a enlevé  $fx$  qui est un facteur de  $w$  appartenant à  $B_1x$ . D'après l'hypothèse de récurrence  $gh$  appartient alors à  $L$  et  $w$  qui appartient à  $fxD(gh)$  est élément de  $BxD(L)$ , donc de  $L$ .

Le théorème X est ainsi démontré.

Corollaire : Si A et B sont des parties rationnelles incluses dans  $L_0$ ,  $L = A + BxD(L)$  admet une solution algébrique non ambiguë.

En effet seule cette propriété de A et B est intervenue dans la démonstration du théorème.

Propriété III.5. : Les langages solution des équations

$$L = \bar{x}^* + xD(L) \quad (1)$$

$$L = 1 + x*D(L) \quad (2)$$

$$L = x + \bar{x}^*D(L) \quad (3)$$

sont respectivement :

Pour (1), le langage  $L_1, \bar{x}^*$  (où  $L_1$  est définie dans III.4) ;

Pour (2),  $\{x, \bar{x}\}^* \bar{x} + 1$  ;

Pour (3),  $\bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* + x$  .

Equation (1) : Posons  $L'_1 = L_1 \bar{x}^*$  . On a  $D(L'_1) = D(L_1) \bar{x}^*$   
d'après la propriété II.3 puisque  $D(\bar{x}^*) = \bar{x} \bar{x}^*$  et que  $L_1 x \subset D(L_1)$  . Soit  
 $x D(L'_1) = x D(L_1) \bar{x}^*$  et  $\bar{x}^* + x D(L'_1) = \bar{x}^* + x D(L_1) \bar{x}^*$   
 $= (1 + x D(L_1)) \bar{x}^*$  .

Or d'après la propriété III.3.  $1 + x D(L_1) = L_1$  . Ainsi  $\bar{x}^* + x D(L'_1) = L_1 \bar{x}^* = L'_1$  .

Equation (2) : Soit  $f$  un mot différent de  $1$  du langage  $L$   
solution de cette équation, il se termine nécessairement par  $\bar{x}$  (on peut le  
voir par récurrence sur la longueur par exemple), donc  $L \subset 1 + \{x, \bar{x}\}^* \bar{x}$  .

Soit d'autre part, un mot  $f$  se terminant par  $\bar{x}$  , alors  $f = x^n \bar{x} g$   
(où  $g$  se termine par  $\bar{x}$  ou bien est égal à  $1$  ), alors  $f$  appartient à  
 $x^n D(g)$  et donc à  $x^n D(L)$  (par l'hypothèse de récurrence), d'où le résultat.

Equation (3) : Calculons  $D(\bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*)$  . On a  
 $\bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* = \bar{x} \bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* + \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*$  .  
Ainsi :  $D(\bar{x} \bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*) = \bar{x}^2 \bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*$  et  $D(\bar{x} \bar{x} \bar{x}^*) = \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* + \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*$  .  
Soit  $D(\bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*) = \bar{x}^2 \bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* + \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* + \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*$   
 $= (\bar{x}^2 \bar{x}^* + \bar{x}) \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* + \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*$   
 $= \bar{x} \bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* + \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*$  .

Et  $D(x)$  étant égal à  $\bar{x} x$  , on a :

$D(\bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*) + D(x) = \bar{x} \bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* + \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* + \bar{x} x$   
 $= \bar{x} \bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* + \bar{x} x (\bar{x} \bar{x}^* + 1)$   
 $= \bar{x} \bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^* + \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*$   
 $= (\bar{x} \bar{x}^* + 1) (\bar{x} \bar{x} \bar{x}^*) = \bar{x}^* \bar{x} \bar{x} \bar{x}^*$  .

D'où le résultat.

2). Des équations linéaires en d dans  $\mathbb{B}\langle\langle X \rangle\rangle$ .

Nous effectuons pour d la même étude que pour D, et nous nous proposons d'examiner dans quels cas l'équation  $L = A + B d(L)$  a pour solution un langage algébrique.

Remarquons que ces équations ont une solution unique, pour les mêmes raisons que pour celles qui font intervenir D. Nous établissons pour des cas sensiblement analogues à ceux pour D (avec un léger changement car une retranscription littérale donnerait des solutions nulles). Les propriétés sont données sans démonstration, elles seraient les mêmes que pour D.

Propriété III.6. :                    Les langages solutions des équations

- (1')  $L = y + yd(L)$  ;
- (2')  $L = x\bar{x} + xd(L)$  ;
- (3')  $L = x\bar{x}^* + xd(L)$  ;
- (4')  $L = x\bar{x} + x^*d(L)$  ;
- (5')  $L = x\bar{x} + \bar{x}^*d(L)$

sont respectivement :

- Pour (1') :             $y(y\bar{x})^*$  ;
- Pour (2') :             $x^n \bar{x}^n$              $(n \geq 1)$  ;
- Pour (3') :             $x^n \bar{x}^{n-1} \bar{x}^* + x$      $(n \geq 1)$  ;
- Pour (4') :             $x\bar{x} + x^* \overline{xxx}^*$
- Pour (5') :             $\bar{x}^* \overline{xxx}^* + x\bar{x}$  .



Propriété III.7. : Le langage solution de l'équation  $L = y + fxgd(L)$

où  $f$  et  $g$  sont des mots de  $X^*$ , est donné par :

- si  $f \neq 1$ ,  $f$  s'écrit alors  $f = a_1 f'$   $f' \in X^*$  et

$$L = y + fxg(a_1 \bar{x} f' xg)^* y \bar{x} ;$$

- si  $f = 1$

$$L = y + (xg)^n y \bar{x}^{-n} \quad (n \geq 0)$$

Définition : Soit  $A$  et  $B$  deux langages inclus dans  $X^*$ , nous notons  $A'_1$  et  $B'_1$  les langages obtenus en insérant une lettre  $\bar{x}$  après la première lettre de chaque mot de  $A$  et  $B$  respectivement. Nous notons  $\tilde{A}'_1$  et  $\tilde{B}'_1$  ceux obtenus en insérant un nombre arbitraire (éventuellement nul) de  $\bar{x}$  après chacune des premières lettres des mots de  $A$  et  $B$  respectivement (ainsi :  $\tilde{A}'_1 = A + A'_1 + (A'_1)'_1 + \dots$  ). On a alors :

Propriété III.8. : Le langage solution de l'équation  $L = A + Bxd(L)$

(où  $A$  et  $B$  sont inclus dans  $X^*$  ) est donné par :

- Si  $1 \notin B$ ,  $L = B(xB'_1)^* x A'_1$  ;

- Si  $1 \in B$ ,  $L = L_0 \cap B(x\tilde{B}'_1)^* x \tilde{A}'_1$  .

Remarquons que dans les deux cas  $L$  est langage algébrique non ambigu (dans le premier cas, c'est un langage rationnel) car l'opération qui à  $A$  fait correspondre  $A'_1$  (resp.  $\tilde{A}'_1$ ) est une transduction rationnelle.

En effet, si  $\pi$  est le morphisme (projection) de  $X^*$  dans  $X^*$  donné par  $\pi(\bar{x}) = \pi(x) = 1$  et  $\pi y = y$  pour tout  $y \in X'$ , on a :

$$A'_1 = \pi^{-1}(A) \cap X' \bar{x} X'^*$$

$$\tilde{A}'_1 = \pi^{-1}(A) \cap X' \bar{x}^* X'^* .$$

3). Equations dans la semi-algèbre  $\mathcal{T}\langle\langle X \rangle\rangle$ .

On peut se poser la question de résoudre les équations en  $d$  et  $D$  dans une algèbre  $\mathcal{T}\langle\langle X \rangle\rangle$  quelconque, il se trouve que les résultats sont à peu près les mêmes. On remarque en particulier que si les constantes sont des séries caractéristiques (dont tous les coefficients sont 0 ou 1) particulières alors la solution est aussi une série caractéristique (ce qui permet de se ramener à  $\mathcal{A}\langle\langle X \rangle\rangle$ ). Plus exactement :

Propriété III.9. : Si  $a$  et  $b$  sont des séries caractéristiques de langages inclus dans  $X^*$ , alors l'équation  $\xi = a + bxD(\xi)$  admet pour solution une série caractéristique d'un langage inclus dans  $L_0$ .

Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $L_0$  et si  $f$  est différent de  $g$ , alors  $D(f)$  et  $D(g)$  sont disjoints. La propriété en découle immédiatement en utilisant le fait que pour un mot  $f$  le nombre d'occurrences de  $x$  indique le nombre de fois où on a appliqué  $xD$ . Enfin, l'inclusion dans  $L_0$  est due au fait que  $A \subset L_0$  implique  $xD(A) \subset L_0$ .

C.Q.F.D.

En ce qui concerne l'algébricité du résultat, on obtient un résultat analogue au théorème X.

Propriété III.10. : Si  $a$  et  $b$  sont des séries rationnelles de  $\mathcal{T}\langle\langle X \rangle\rangle$ , alors la solution de  $\xi = a + bxD(\xi)$  est une série algébrique.

La démonstration est analogue à celle du théorème X, en élargissant le produit  $\otimes$ , définit pour les langages, à l'algèbre des séries formelles.

Plus précisément, on obtient :

$$\xi = \bar{L}_0 \otimes (1 - b_1 x)^{-1} a_1$$

où  $\bar{L}_0$  désigne la série caractéristique du langage  $L_0$  ;

$\odot$  désigne le produit de Hadamard de deux séries (cf. Schützenberger [54]) ,

$$b_1 = \bar{x}^* \bar{w} b$$

$$a_1 = \bar{x}^* \bar{w} a .$$

Vérification de la formule :

De la définition du produit de

Hadamard, il ressort que si  $r$  et  $s$  sont deux séries

$$D(r \odot s) = D(r) \odot D(s) .$$

D'autre part, si  $t$  est une autre série

$$t.(r \odot s) = \tilde{t}r \odot ts \text{ où } \tilde{t} \text{ désigne la série où on a remplacé tous}$$

les coefficients non nuls par 1 .

En appliquant ces règles, on trouve pour  $D(\xi)$  :

$$D(\xi) = D(\bar{L}'_0) \odot D[(1-b_1x)^{-1}a_1] .$$

Or  $\bar{L}'_0 = xD(\bar{L}'_0) = x\bar{L}'_0\bar{x}\bar{L}'_0$  (= tous les mots de  $L'_0$  qui commencent par  $x$ ) ,

$$D[(1-b_1x)^{-1}a_1] = (1-b_1x)^{-1}a_1 - (1-bx)^{-1}a$$

(= tous les termes de  $(1-b_1x)^{-1}a_1$  qui contiennent un  $\bar{x}$ ) .

$$\text{Or } x(1-bx)^{-1}a \odot \bar{L}'_0 = 0 , \text{ car tous les termes de } \bar{L}'_0 \text{ contiennent un } \bar{x} . \text{ Ainsi :}$$

$$xD(\xi) = \bar{L}'_0 \odot x(1-b_1x)^{-1}a_1$$

$$\begin{aligned} \text{et } bxD(\xi) &= \tilde{b}\bar{L}'_0 \odot bx(1-b_1x)^{-1}a_1 \\ &= \tilde{b}\bar{L}'_0 \odot b_1x(1-b_1x)^{-1}a_1 \end{aligned}$$

car aucun terme à coefficient non nul de  $\tilde{b}\bar{L}'_0$  admet une première occurrence

de  $\bar{x}$  précédent celle de  $x$  . Enfin en remarquant que  $a = L'_0 \odot a_1$  , on trouve :

$$\begin{aligned} a + bxD(\xi) &= L'_0 \odot [b_1x(1-b_1x)^{-1}a_1 + a_1] \\ &= L'_0 \odot [(1-b_1x)^{-1}a_1] = \xi . \end{aligned}$$

Q.E.D.

4). Une équation non linéaire.

La résolution des équations linéaires ayant été amorcée, il est naturel de se demander ce qu'il en est pour les équations faisant intervenir  $L$  au second degré, d'autant plus que nous savons (paragraphe 2) que le langage de Lehman-Lenormand vérifie une telle équation, à savoir :

$$L = 1 + yL\bar{y}L + xD(L) .$$

Malheureusement on ne peut rien dire sur ce type d'équations et en particulier le langage  $L$  n'est pas algébrique puisque :

$$L \cap x*y*(\bar{x}\bar{y})^* = \bigcup_{n \geq 0} x^n y^n (\bar{x}\bar{y})^n$$

qui n'est pas algébrique.

IV. DE CERTAINES EQUATIONS EN  $\Lambda$  ET EN  $\nabla$  .

Dans ce paragraphe nous résolvons certaines équations en  $\Lambda$  et  $\nabla$  , les résultats obtenus seront utiles pour les énumérations du paragraphe V. Ceux-ci sont essentiellement dus à J. Richard, nous les donnons sans démonstration (on se reportera à [17] et [51]).

1). Une conséquence de la propriété III.10.

Nous commençons tout d'abord par remarquer que la résolution des équations en  $D$  et  $d$  permet d'aborder celle des équations faisant intervenir  $\nabla$  et  $\Lambda$  pour cela nous introduisons une transformation  $T$  de  $L_0 \subset \mathbb{Z}\langle\langle x, \bar{x}, y \rangle\rangle$  dans  $\mathbb{Z}\langle\langle x, y \rangle\rangle$  définie comme suit :

Définition : Soit  $f$  un mot de  $L_0 \subset \{x, \bar{x}, y\}^*$  , ce mot  $f$  se décompose d'une manière unique ( $L_0$  étant un code) en un produit  $f = f_1 f_2 \dots f_k$  où les  $f_i$  sont des mots de  $L_0$  indécomposables en produit de deux éléments de  $L_0$  (ainsi  $f_i = y$  ou bien  $f_i = x f'_i \bar{x}$   $f'_i \in L_0$  ). Alors  
 $T(f) = x y^{j_1} x y^{j_2} \dots x y^{j_k}$  où  $j_i$  est :

- le nombre d'occurrences de  $x$  et de  $y$  dans  $f'_i$  si  $f_i = x f'_i \bar{x}$  ;
- $j_i = 0$  si  $f_i = y$  .

Ainsi, par exemple si  $f = yx y x \bar{x} \bar{x} y x y y \bar{x}$

$$f = (y)(y)(x y x \bar{x} \bar{x})(y)(x y y \bar{x})$$

$$T(f) = x x x y^2 x x y^2 .$$

Lemme IV.1. : La transformation  $T$  vérifie les propriétés :

si  $f \in L_0$        $T[x D f] = x \nabla T f$   
                      $T[x d f] = x \Lambda T f .$

Nous vérifions le résultat par récurrence sur le nombre de facteurs de  $L_0$  intervenant dans  $f$  .

APPLICATIONS ANALYTIQUES

Si  $f = 1$  :  $D(f) = \bar{x}$  ;  $T(x\bar{x}) = x$  ,  
 $Tf = 1$  ;  $\nabla Tf = 1$  et  $x\nabla Tf = x$  .

Pour  $\Lambda$  , on a :  $d(f) = 0$   $T(xdf) = 0$  ,  
 $Tf = 1$   $\Lambda 1 = 0$  et  $x\Lambda Tf = 0$  .

Pour  $D$  : Si  $f$  a un facteur dans  $L_0$  non vide, alors :

$f = f_1 f_2$  où  $f_2 \neq 1$  et  $f_2$  n'est pas décomposable.

Alors  $D(f) = D(f_1) \cdot f_2 + f_1 f_2 \bar{x}$   
 $x D(f) = x D(f_1) \cdot f_2 + x f_1 f_2 \bar{x}$  .

D'après l'hypothèse de récurrence  $T x D(f_1) = x \nabla T f_1$  . Soit  $T x D(f) = x (\nabla T f_1) \cdot T f_2 + x y^n$  où  $n = |f_1 f_2|_x + |f_1 f_2|_y$  puisque pour  $f$  et  $g \in L_0$  ,  $T(fg) = T(f) \cdot T(g)$ .

Calculons  $\nabla T f$  : on a  $T f = T f_1 T f_2$  , or  $f_2$  est un facteur non décomposable de  $L_0$  , ainsi  $T f = T f_1 x y^p$  où  $p = |f_2|_x + |f_2|_y$  . De par les propriétés de  $\nabla$  (proposition II.4), on obtient alors :

$$\nabla T f = (\nabla T f_1) \cdot T f_2 + y^n .$$

D'où le résultat.

Pour  $d$  : Si  $f$  a un facteur non vide dans  $L_0$  , alors :

$f = f_1 f_2$  où  $f_1$  est non décomposable dans  $L_0$  .

Alors  $d(f) = f_1 \bar{x} f_2$  ;  $x d f = x f_1 \bar{x} f_2$  ,  $T x d f = x y^p T(f_2)$  où

$p = |f_1|_x + |f_1|_y$  .

D'autre part,  $T f = x y^{p-1} T f_2$  et  $\Lambda T f = y^{p+1} T f_2$  .

D'où le résultat.

En utilisant le lemme, on obtient :

Propriété IV.1. : Si a et b sont des séries rationnelles en x ,  
alors les équations :

$$\xi = a + b x \nabla \xi$$

et  $\xi = a + b x \Lambda \xi$

ont des solutions algébriques.

En effet, par linéarité les propriétés de  $T$  s'étendent aux séries. Soient les équations

$$L = a(y) + b(y) \times D(L)$$

et  $L = a(y) + b(y) \times d(L)$ ,

alors les  $\xi = T(L)$  vérifient respectivement :

$$\xi = T(a) + T(b) \text{Tx}D(L).$$

Soit  $\text{Tx}D(L) = x \nabla TL$  et  $\xi = a(x) + b(x) \cdot x \nabla \xi$ .

Il en est de même avec la deuxième équation.

Ces équations ont été résolues au paragraphe précédent, il reste donc à montrer que la transformation par  $T$  conserve les propriétés d'algébricité (dans le cas particulier considéré).

Ceci vient du fait que :

$$T(\bar{L}_0 \odot (1-b_1x)^{-1} a_1) = T(\bar{L}_0) \odot T[(1-b_1x)^{-1} a_1].$$

Or  $T[(1-b_1x)^{-1} a_1]$  est rationnelle et  $T(\bar{L}_0)$  algébrique.

C.Q.F.D.

## 2). Les équations linéaires en $\Lambda$ et $\nabla$ .

Nous énonçons ici, sans démonstration des résultats dûs à J. Richard.

Définition : Soit  $M$  une série dépendant d'une seule variable  $y$  et soit  $\nabla_M$  l'opérateur

$$\nabla_M = (1 - M\Lambda)^{-1} = \sum_{n \geq 0} M^n \Lambda^n.$$

Remarquons que si  $M = 1$ ,  $\nabla_1 = \nabla$ .

Théorème : L'équation  $\xi = A + B\Delta\xi$  où A et B sont deux séries de  
 $\mathcal{A} \ll x, y \gg$  admet une solution unique donnée par :

$$\xi = A + B(1 - \Delta \nabla_M B)^{-1} \cdot (\Delta \nabla_M A)$$

où M est donné par :

$$M = B(yM, y) .$$

Si A et B sont algébriques,  $\xi$  est algébrique.

Théorème : L'équation  $\xi = A + B\nabla\xi$  où A et B sont deux séries  
de  $\mathcal{A} \ll x \gg$  telle que B n'admette pas de terme constant, a une solution  
unique donnée par :

$$\xi = A + B(1 - \nabla_M B)^{-1} \nabla_M A$$

où M vérifie l'équation

$$M = 1 + MB(yM, y) .$$

Si A et B sont algébriques, cette solution est algébrique.

### 3). Equations non linéaires.

Là encore, les résultats sont ceux de J. Richard.

Soit  $P(\xi)$  un polynôme en  $\xi$  ; non nécessairement commutatif vérifiant l'une des deux conditions :

(1)  $(P, 1) = 0$  et  $P(\xi)$  ne contient pas de termes  $\alpha\xi$  ( $\alpha$  appartenant à  $\mathcal{A}$ ) ;

(2)  $(P, 1) \neq 0$  et  $P(\xi)$  ne contient pas de terme de la forme  $\alpha\xi^n$  ( $\alpha \in A$ ,  $n \geq 1$ ) .

Théorème : L'équation  $\xi = P(\xi) + B\nabla\xi$  telle que B ne contienne pas  
de terme constant, admet une solution unique. Si B est une série algébrique  
l'image commutative  $\chi(\xi)$  est algébrique .



CODE DES GRAPHERS PLANAIRES

Nous formulons de plus la conjecture que  $\xi$  elle-même est une série algébrique de  $\mathcal{K}\langle\langle x, y \rangle\rangle$ .

Théorème : Soit  $P$  un polynôme vérifiant les conditions précédentes, alors l'équation  $\xi = P(\xi) + (1+B)\Lambda\xi$ , telle que  $B$  n'admette pas de terme constant, admet une solution unique.

Si  $B$  est une série algébrique, alors la série  $\chi(\xi)$  image commutative de  $\xi$  est algébrique.

V. APPLICATION A L'ENUMERATION.

1). Les cartes.

Nous avons vu (Propriété II.6) que la série  $a = 1 + \sum_{p,q} a_{p,q} x^p y^q$  (où  $a_{p,q}$  est le nombre de cartes planaires pointées ayant  $p+q$  brins dont  $p$  appartiennent au sommet distingué) est l'image commutative de la série  $\xi$  qui vérifie l'équation en  $\nabla$  :

$$\xi = 1 + x\xi x\xi + xy \nabla \xi .$$

Si on note encore  $\nabla$  l'image commutative de  $\nabla$ , on voit facilement que  $a$  vérifie l'équation :

$$a = 1 + x^2 a^2 + xy \nabla a . \quad (1)$$

Pour résoudre cette équation, nous utilisons la méthode développée par J. Richard.

On introduit une nouvelle série  $M$  qui ne dépend que de la variable  $y$  et dont nous déterminerons la valeur au milieu des calculs. Pour une série  $\psi$  qui dépend de deux variables  $x$  et  $y$ , on note  $\tilde{\psi}$  la série  $\psi(yM, y)$  (on fait  $x = yM$ ) et  $\bar{\psi}$  la série  $\psi(y, y)$  (on fait  $x = y$ ).

Appliquons l'opérateur  $\nabla_M$  à l'équation (1), on obtient :

$$\nabla_M a = 1 + x^2 a^2 + xy M a^2 + y^2 M (\nabla_M a) + y^2 M \tilde{\nabla}_M a - y^2 M \bar{\nabla}_M a + xy \nabla_a + y^2 M \nabla_M \nabla a .$$

Calculons  $\nabla_M \nabla a$  pour une série  $a$  quelconque :

$$\begin{aligned} \nabla_M \nabla a &= \nabla a + M \Lambda \nabla a + M^2 \Lambda^2 \nabla a + \dots + M^n \Lambda^n \nabla a + \dots \\ &= a + \Lambda a + \Lambda^2 a + \dots + M(\Lambda a + \Lambda^2 a + \dots) \\ &\quad + M^n (\Lambda^n a + \Lambda^{n+1} a + \dots) + \dots \\ &= a + (1+M)\Lambda a + (1+M+M^2)\Lambda^2 a + \dots + (1+M+\dots+M^n)\Lambda^n a + \dots \end{aligned}$$

Soit en multipliant par  $M.1$  :

$$\begin{aligned} (M-1) \nabla_M \nabla a &= a(M-1) + \Lambda a(M^2-1) + \dots + (M^{n+1}-1)\Lambda^n a + \dots \\ &= M \nabla_M a \nabla a ; \end{aligned}$$

Ce qui donne en reportant dans la relation donnant  $\nabla_M a$  :

$$(M-1)\nabla_M a = (M-1)[1+x^2 a^2 + xyMa^2 - y^2 M^2 \tilde{a}\tilde{a}] + (M-1)[y^2 Ma + y^2 M\tilde{a}] \nabla_M a + xy(M-1)\nabla a + y^2 M^2 \nabla_M a - y^2 M \nabla a .$$

Posons  $1+x^2 a^2 + xyMa^2 - y^2 M^2 \tilde{a}\tilde{a} = \varphi$  pour simplifier l'écriture, on tire  $\nabla a$  en fonction de  $\nabla_M a$  :

$$(xy+y^2 M - xyM)\nabla a = (M-1)\varphi + [(M-1)(y^2 Ma + y^2 M\tilde{a}) - (M-1)y^2 M^2] \nabla_M a .$$

Soit en reportant dans l'équation (1) :

$$(2) \quad (xy+y^2 M - xyM)a = (xy+y^2 M - xyM)(1+x^2 a^2) + xy(M-1)\varphi + [(M-1)(y^2 Ma + y^2 M\tilde{a} - 1) + y^2 M^2] \nabla_M a .$$

Choisissons  $M$  de telle façon qu'en appliquant  $\nabla_M$  à l'équation (2), le coefficient de  $\nabla_M \nabla_M a$  soit nul, on a ainsi :

$$(M-1)[(y^2 M\tilde{a} + y^2 M\tilde{a} - 1) + y^2 M^2] = 0 .$$

$$\text{Soit } M = 1 + (1 - 2y^2 M^2 \tilde{a})^{-1} y^2 M^2 . \quad (3)$$

Faisons  $x = yM$  dans l'équation (2) :

$$(2y^2 M - y^2 M^2)\tilde{a} = (2y^2 M - y^2 M^2)(1 + y^2 M^2 \tilde{a}^2) + y^2 M(M-1)\tilde{\varphi} .$$

$$\text{Or } \tilde{\varphi} = 1 + y^2 M^2 \tilde{a}^2 .$$

D'où, en simplifiant par  $y^2 M$  :

$$(2-M)\tilde{a} = (1 + y^2 M^2 \tilde{a}^2) . \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) permettent de calculer les équations donnant  $M$  et  $\tilde{a}$ , on trouve :

$$M = 1 + y^2 M^2 (3-2M)^{-1}$$

$$\tilde{a} = (3-2M)^{-1} .$$

En calculant  $\nabla_M a$  et en reportant sa valeur dans (2), on obtient en faisant  $x = y$  :

$$+ My^3 \tilde{a} + y(1 + (M-1)^2 (3-2M)^{-1}) - yM = 0 .$$

$$\text{Soit en développant : } \tilde{a} = M(4-3M)(3-2M)^{-2} .$$

Or le nombre  $a_n$  de cartes planaires pointées ayant  $2n$  brins ( $n$  arêtes) est le coefficient de  $y^{2n}$  dans le développement de  $\tilde{a}$ , on trouve

(en appliquant la formule de Lagrange, voir [75]) :

$$a_n = \frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!} .$$

2). Les cartes simples.

Rappelons (§ III du chapitre premier) que nous avons défini une carte simple comme une carte admettant une face  $f^*$  telle que pour toute arête  $a$  on ait :  $a \cap f^* \neq \emptyset$ . On pointe une carte simple en distinguant un brin  $b_0$  tel que  $\alpha(b_0)$  appartienne à  $f^*$ .

On peut montrer la propriété suivante relative à l'algorithme de codage d'une telle carte :

Propriété IV.1. :            Si  $(\sigma, \alpha, b_0)$  est une carte simple, l'algorithme de codage lui associe une permutation circulaire  $\zeta$  telle que

$$\alpha \zeta^{2i+1} b_0 = \zeta^{2i+2} b_0 \quad \forall i .$$

(1). Nous commençons par montrer que si  $(\sigma, \alpha, b_0)$  est une carte simple pointée et si  $\alpha b_0$  appartient au même sommet que  $b_0$ , alors  $\sigma b_0 = \alpha b_0$ . Nous pouvons supposer que  $B = [n]$ ,  $b_0 = 1$  et que la permutation circulaire associée est  $\zeta_n$  (au besoin on change les noms). Remarquons tout d'abord que 1 n'appartient pas à la face  $f^*$ , sinon  $(1, \alpha 1)$  serait un isthme et d'après le corollaire 2 de la propriété I.2 du chapitre premier, ce serait ou bien une arête disconnectante (ce qui est impossible car 1 et  $\alpha 1$  appartiennent au même sommet) ou une arête telle que supprimée, elle diminue le genre de la carte (et il est impossible de diminuer le genre d'une carte planaire). Si  $\sigma 1 \neq \alpha 1$ , pour tout  $b$  tel que  $1 < \alpha b < \alpha 1$ , on aurait  $1 < \alpha b < \alpha 1$  (lemme IV.2 du chapitre premier) et  $1 \leq \alpha \sigma b < \alpha 1$  pour tout  $b$

vérifiant  $1 \leq b < \alpha 1$ . Alors  $b$  et  $\alpha b$  n'appartiendrait pas à la face  $f^*$ , ce qui est contradictoire avec le fait que  $(\sigma, \alpha)$  est simple.

(2). Venons-en à la démonstration de la propriété. Soit  $\sigma, \alpha, b_0$  une carte simple pointée, si  $\alpha b_0$  appartient au même sommet que  $b_0$  on supprime l'arête  $(b_0, \alpha b_0)$ . Puisque  $\{b_0\}$  constitue une face, on obtient encore une carte simple (on ne fait que supprimer  $\alpha b_0$  de  $f^*$ ) en posant  $b'_0 = \sigma \alpha b_0$  on obtient une carte simple pointée car  $\alpha b'_0 \in f^*$  (il est égal à  $\alpha(\alpha b_0)$ ). Après un certain nombre de suppression (éventuellement sans suppression), on obtient une carte simple pointée telle que  $\alpha b_0$  n'appartient pas au même sommet que  $b_0$ . Posant  $\iota = (b_0, \sigma^{-1} \alpha b_0)$  et  $\sigma' = \sigma \iota$ ,  $(\sigma', \alpha)$  est encore une carte simple pointée ayant même permutation circulaire  $\zeta$  associée que  $(\sigma, \alpha)$  (voir la démonstration de l'algorithme du codage), le résultat s'en déduit par récurrence sur le nombre de sommets de  $(\sigma, \alpha)$ .

Corollaire : Le langage S qui code les cartes simples pointées (comme sous langage de L) vérifie l'équation :

$$S = 1 + y\bar{y}S + xD(S) .$$

Or cette équation peut être résolue par la méthode développée au Théorème X ; en posant  $A = B = (y\bar{y})^*$ .

$$\text{On a ainsi : } A_1 \text{ qui vérifie } A_1 = \{y\bar{x}\bar{y}, \bar{x}, y\bar{y}\}^* = B_1 .$$

Soit  $S = L_0 \cap (B_1 x)^* A_1$  et S vérifie les équations :

$$S = 1 + y\bar{y}S + xS\bar{x}S + xT\bar{x}\bar{y}S$$

$$T = Sy + SxT\bar{x} .$$

On peut vérifier que le langage S donné par ce système vérifie bien

$$S = 1 + y\bar{y}S + xD(S) , \text{ en effet :}$$

des équations, on tire :

$$D(S) = \bar{x}S + y\bar{x}\bar{y}S + y\bar{y}D(S) + xS\bar{x}D(S) + xT\bar{x}\bar{y}S + xT\bar{x}\bar{y}D(S) ;$$

soit :

$$(1 - y\bar{y} - xS\bar{x} - xT\bar{x}\bar{y})D(S) = \bar{x}S + y\bar{x}\bar{y}S + xT\bar{x}\bar{y}S .$$

Or la première équation peut s'écrire :

$$(1 - y\bar{y} - xS\bar{x} - xT\bar{x}\bar{y})S = 1 ,$$

ceci implique :

$$D(S) = S\bar{x}S + Sy\bar{x}\bar{y}S + SxT\bar{x}\bar{y}S$$

$$D(S) = S\bar{x}S + (Sy + SxT\bar{x})\bar{x}\bar{y}S .$$

La deuxième équation donne alors :

$$D(S) = S\bar{x}S + T\bar{x}\bar{y}S \text{ et}$$

$$1 + y\bar{y}S + xD(S) = 1 + y\bar{y}S + xS\bar{x}S + xT\bar{x}\bar{y}S$$

et S vérifie bien l'équation :

$$S = 1 + y\bar{y}S + xD(S) .$$

Le nombre de cartes simples.

Comme conséquence de l'étude faite au paragraphe I.3 du précédent chapitre et du corollaire du théorème VII (chapitre 2ème paragraphe II), les séries suivantes :

$$s(x, y) = \sum_{p, q} s_{p, q} x^p y^q$$

et  $\bar{s} = \sum_n s_n x^n$

où :

-  $s_{p, q}$  désigne le nombre de cartes simples pointées ayant  $p+1$  sommets et  $q+1$  faces (soit  $p+q$  arêtes) ;

-  $s_n$  désigne le nombre de cartes simples pointées ayant  $n$  arêtes

vérifient les équations :

$$s = 1 + ys + xs^2 + xts$$

$$t = sy + xst$$

et  $\bar{s} = s(x, x)$

$$\bar{s} = 1 + x\bar{s} + x\bar{t}\bar{s} + x\bar{s}^2$$

$$\bar{t} = \bar{s}x + x\bar{s}\bar{t} .$$

Résolution des équations donnant  $\bar{s}$  .

On obtient :

$$\bar{s} = 1 + (1-x\bar{s})^{-1}x^2\bar{s}^2 + x\bar{s}^{-2} + x\bar{s}$$

(car la deuxième équation donne  $\bar{t} = (1-x\bar{s})^{-1}x\bar{s}$  ) .

Soit :

$\bar{s}(1-x\bar{s}) = 1 + (1-x\bar{s})^{-1}x^2\bar{s}^2 + x\bar{s}$  et en multipliant par  $(1-x\bar{s})$  :

$$\bar{s}(1-x\bar{s})^2 = (1+x\bar{s})(1-x\bar{s}) + x^2\bar{s}^2 ,$$

soit  $\bar{s} = (1-x\bar{s})^{-2}$  .

En appliquant à  $x\bar{s}$  la formule de Lagrange (cf. Whittaker et Watson [75] ) , on obtient :

$$x\bar{s} = \sum \frac{x^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}(1-u)^{-2n}}{du^{n-2}} \right]_{u=0}$$

$$x\bar{s} = \sum \frac{(3n-2)!}{n!(2n-1)!} x^n$$

et  $s_n = \frac{(3n+1)!}{(n+1)!(2n+1)!}$  .

Résolution des équations donnant  $s$  .

Ces équations donnent :

$$s = (1-xs)^{-1}(1+t)$$

(car  $sxt+ys = t$  ) .

Posons  $u = (1-xs)^{-1}$  et  $v = (1+t)$ . On obtient  $s = uv$  soit en reportant dans la relation donnant  $u$  :

$$u = (1-xuv)^{-1}$$

$$x = \frac{u-1}{u^2v} .$$

Et  $sxt \neq ys = t$  entraîne (puisque  $v = 1+t$ ) :

$$\frac{uv(v-1)(u-1)}{u^2v} + yuv = (v-1)$$

$$y = \frac{(v-1)}{u^2v} .$$

On applique alors une généralisation à 2 variables de la formule de Lagrange donnée par I.J. Good [25] (et utilisée par Brown et Tutte [10]), et on obtient :

$$s = \sum \frac{x^p y^q}{p!q!} \left[ \frac{\partial^{p+q}}{\partial a^p \partial b^q} a^{2p+2q+1} b^{p+q+1} \Delta \right]_{\substack{a=1 \\ b=1}}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -xa^2 \\ -2yab & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2xya^3 .$$

La valeur de l'expression entre crochets est :

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial a^p \partial b^q} (a^{2p+2q+1} b^{p+q+1} - 2xya^{2p+2q+4} b^{p+q+2})$$

soit :

$$s = \frac{x^p y^q}{p!q!} \frac{(2p+2q)!(p+q)!}{(p+2q)!(p+1)!} .$$

### 3). Les arbres.

Remarquons qu'un mot  $f$  du langage  $L$  code un arbre si et seulement si  $f$  ne contient pas d'occurrence de  $y$ , ainsi le langage  $A$  dont les mots codent les arbres vérifie l'équation :

$$A = T + xD(A) .$$



D'après la propriété III.3,  $A$  n'est autre que le langage restreint de Dyck sur une lettre et vérifie l'équation polynomiale :

$$A = 1 + x\bar{A}x\bar{A} .$$

La série commutative associée est  $\sum \frac{(2n)!x^n}{n!(n+1)!}$ , le nombre d'arbre ayant  $n$

arêtes est donc  $\frac{2n!}{n!(n+1)!}$ .

Arbres parfaits.

Tutte introduit dans [67] la notion d'arbre parfait. Un arbre est parfait s'il existe une partition (coloration) de ses arêtes en deux parties (couleur)  $A'$  et  $A''$  telles que tout sommet soit incident à une et une seule arête de  $A'$  (arête noire).

Appelons arbre pointé quasi-parfait un arbre tel qu'il existe une coloration des arêtes en deux couleurs, blanche et noire, telle que le sommet distingué ne soit incident qu'à des arêtes blanches les autres étant incidents à une arête noire et une seule.

On vérifie facilement que si  $B$  désigne le langage des mots qui codent les arbres parfaits et  $B'$  celui des mots qui codent les arbres quasi-parfaits, on a les équations :

$$B = xB\bar{x}B + xB'\bar{x}B'$$

$$B' = 1 + xB\bar{x}B' .$$

Soit pour les séries génératrices :

$$b = x(b^2 + b'^2)$$

$$b' = 1 + xbb' .$$

Ainsi  $b' = (1-xb)^{-1}$

et  $b(1-xb) = x(1-xb)^{-2}$  ;

soit  $b = x(1-xb)^{-3}$  .

APPLICATIONS ANALYTIQUES

Utilisant la formule de Lagrange, on obtient :

$$b = \sum x^{2n-1} \frac{(4n-1)!}{(3n-1)!n!} .$$

D'autre part,  $b'$  vérifie  $b' = (1-x^2b')^{-1}$ . Soit d'après la formule de Lagrange appliquée à  $x^2b'$  :

$$b' = \sum x^{2n} \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} .$$

Propriété IV.2. :                      Le nombre d'arbres parfaits ayant  $2n-1$  arêtes

est  $\frac{(4n-1)!}{(3n-1)!n!}$ , le nombre d'arbres quasi-parfaits ayant  $2n$  arêtes est

$\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] C. BERGE. Théorie des graphes et ses applications. Dunod, Paris, 1963.
- [ 2 ] C. BERGE. Principes de Combinatoire. Dunod, Paris, 1968.
- [ 3 ] C. BERGE. Graphes et hypergraphes. Dunod, Paris, 1970.
- [ 4 ] W. G. BROWN. Enumeration of non separable planar maps. Can. J. Math. 15 (1963), 526-545.
- [ 5 ] W. G. BROWN. Enumeration of triangulations of the disk. Proc. London Math. Soc. 14 (1964), 746-768.
- [ 6 ] W. G. BROWN. Enumeration of quadrangular dissections of the disk. Canad. J. Math. 17 (1965), 302-317.
- [ 7 ] W. G. BROWN. A historical note on a recurrent combinatorial problem. Amer. Math. Monthly 72 (1965), 973-977.
- [ 8 ] W. G. BROWN. On the existence of square roots in certain rings of power series. Math. Annalen 158 (1965), 82-89.
- [ 9 ] W. G. BROWN. On the enumeration of non planar maps. Mem. Amer. Math. Soc. 65 (1966), 1-42.
- [10] W.G. BROWN et W.T. TUTTE. On the enumeration of rooted non separable planar maps. Can. J. Math. 16 (1964), 572-577.
- [11] C. CHOFRUT. Un code pour les triangulations. Manuscrit non publié.
- [12] N. CHOMSKY et M.P. SCHÜTZENBERGER. The algebraic theory of context free languages ; in "Computer Programming and Formal Languages" (P. Braffort et D. Hirschberg, edit.) p. 118-161, North Holland, Amsterdam, (1963).
- [13] R. CORI. Graphes planaires et systèmes de parenthèses. Thèse de 3ème cycle, Paris, 1969.
- [14] R. CORI. Planar maps and bracketting systems in : Combinatorial structures and their applications. Gordon Breach, New-York, 1970.
- [15] R. CORI. Sur la rationalité de certaines séries génératrices. Discrete Mathematics 3 (1972), 215-31.
- [16] R. CORI. Sur un opérateur lié aux graphes planaires. C.R. Acad. Sci. Paris 274 (1972), 1197-1200.
- [17] R. CORI et J. RICHARD. Enumération des graphes planaires à l'aide des séries formelles en variables non commutatives. Discrete Mathematics 2 (1972), 115-162.

- [ 18 ] G. DEMOUCRON, Y. MALGRANGE, R. PERTUISET. Reconnaissance et construction de représentations planaires topologiques. Revue Française de Recherche Opérationnelle 30 (1964) 33-47.
- [ 19 ] J. EDMONDS. A Combinatorial Representation for Polyhedral surfaces. Notices Amer. Math. Soc. 7 (1960) 646.
- [ 20 ] S. EILENBERG. Livre à paraître.
- [ 21 ] M. FLIESS. Transductions algébriques. R.I.R.O. 4 (1970) R1 109-125.
- [ 22 ] M. FLIESS. Sur certaines familles de séries formelles. Thèse Sc. Math. Univ. Paris VII, Paris, 1972.
- [ 23 ] D. FOATA, M.P. SCHÜTZENBERGER. Théorie géométrique des polynômes Eulériens. Springer Verlag, Berlin, 1970, (Lecture Notes in Mathématique N° 138).
- [ 24 ] S. GINSBURG. The Mathematical Theory of Context Free Languages. Mc Graw Hill, New-York, 1966.
- [ 25 ] I.J. GOOD. Generalisations to several variables of Lagrange's expansion. Proc. Camb. Phil. Soc. 56 (1960) 367-380.
- [ 26 ] M. GROSS. Applications géométriques des langages formels. I.C.C. Bul., 5 (1961) 141-168.
- [ 27 ] M. GROSS et A. LENTIN. Notions sur les grammaires formelles. Gauthier Villars, Paris, 1967.
- [ 28 ] W. GUSTIN. Orientable embeddings of Cayley Graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) 272-275.
- [ 29 ] F. HARARY, G. PRINS et W.T. TUTTE. The number of Plane Trees. Indag Math. 26 (1964) 319-329.
- [ 30 ] A. JACQUES. Sur le genre d'une paire de substitutions. C.R. Acad. Sci. Paris 267 (1968) 625-627.
- [ 31 ] A. JACQUES. Constellations et propriétés algébriques des graphes topologiques. Thèse de 3ème cycle, Paris, 1969.
- [ 32 ] A. JACQUES. Constellations et graphes topologiques. in P. Erdős et. al. eds. Combinatorial Theory and its Applications, (Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai.) North Holland, Amsterdam, 1970 (p.657-672).
- [ 33 ] D.A. KLARNER. Correspondance between plane trees and binary sequences. J. Comb. Theory 9 (1970) 401-411.
- [ 34 ] W. KUICH. Languages and the enumeration of planted plane trees. Indag. Math. 32 (1970) 268-280.

- [ 35 ] J. LEDERBERG. "Dendral 64" : A system for computer construction, enumeration and notation of organic molecules as tree structures and cyclic graphs. Interim report National Aeronautics and Space (Administration Grant Nsg 81-60, NASA CR 68 898), 1965.
- [ 36 ] A. B. LEHMAN. A Bijective Census of Rooted Planar Maps. Communication at Ontario Math. Conf. (1970).
- [ 37 ] A. LEMPEL, S. EVEN, I. CEDERBAUM. An Algorithm for planarity testing of Graphs. dans P. Rosenstiehl ed. Theorie des Graphes, Rome I.C.C. Dunod, 1967, 215-232.
- [ 38 ] R.C. LYNDON. On Dehn's Algorithm. Math. Annalen 166 (1966) 208-228.
- [ 39 ] W. MAGNUS, A. KARASS et D. SOLITAR. Combinatorial Group Theory. Interscience Publisher, J. Wiley & Sons, New-York, 1966.
- [ 40 ] MONDSHEIN. Combinatorial orderings and embedding of Graphs. Tech. Note 1971-35 Lincoln Laboratory M.I.T., 1971.
- [ 41 ] R.C. MULLIN. On counting rooted triangular maps. Canad. J. Math. 17 (1965) 373-382.
- [ 42 ] R.C. MULLIN. The enumeration of rooted triangular maps. Amer. Math. Monthly 71 (1964) 1007-1010.
- [ 43 ] R.C. MULLIN. The enumeration of Hamiltonian polygons in triangular maps. Pacific J. Math. 16 (1966) 139-145.
- [ 44 ] R.C. MULLIN. On the average number of trees in certain maps. Canad. J. Math. 17 (1965) 33-41.
- [ 45 ] R.C. MULLIN et P.J. SCHELLENBERG. The enumeration of c-nets via quadrangulations. J. Comb. Theory 4 (1968) 259-276.
- [ 46 ] R.C. MULLIN et R.G. STANTON. A map theoretic approach to Davenport Schinzel sequences. Pacific J. Maths 40 (1972) 167-172.
- [ 47 ] M. NIVAT. Transductions des langages de Chomsky. Ann. Inst. Fourier 18 (1968) 339-456.
- [ 48 ] O. ORE. The four colour problem. Academic Press, New-York (1967).
- [ 49 ] G. RANEY. Functional composition patterns and Power series reversion. Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960) 441-451.
- [ 50 ] J. RICHARD. Sur un type d'équations liées à certains problèmes combinatoires. C.R. Acad. Sci. Paris 272 (1971) 203-206.
- [ 51 ] J. RICHARD. Sur certaines équations intervenant dans l'énumération des graphes planaires. in Logique et Automates Séminaires I.R.I.A. (1971).
- [ 52 ] P.E. SCHUPP. On Dehn's algorithm and the conjugacy Problem. Math. Annalen 178 (1968) 119-130.

- [53] M.P. SCHÜTZENBERGER. On the definition of a family of Automata. Information and Control, 4 (1961) p.245-270.
- [54] M.P. SCHÜTZENBERGER. On a theorem of R. Jungen. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962) 885-890.
- [55] M.P. SCHÜTZENBERGER. Le théorème de Lagrange selon N. Raney. in Logique et automates Séminaires I.R.I.A. (1971).
- [56] SERRET. Cours d'Algèbre supérieure 2, 3ème ed. Gauthier Villars, Paris, 1866.
- [57] TARJAN. An efficient planarity algorithm. Ph. Dissertation Stanford University (1971).
- [58] W.T. TUTTE. A Census of planar triangulations. Canad. J. Math. 14 (1962) 21-38.
- [59] W.T. TUTTE. A Census of Hamiltonian polygons. Canad. J. Math. 14 (1962) 402-417.
- [60] W.T. TUTTE. A Census of Slicings. Canad. J. Math. 14 (1962) 708-722.
- [61] W.T. TUTTE. A Census of Planar Maps. Canad. J. Math. 15 (1963) 249-271.
- [62] W.T. TUTTE. A New Branch of enumerative graph theory. Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1962) 500-504.
- [63] W.T. TUTTE. Topics in graph theory. in Harary : Graph theory and theoretical physics Academic Press, New-York, 1967.
- [64] W.T. TUTTE. On the enumeration of planar maps. Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968) 64-74.
- [65] W.T. TUTTE. On the enumeration of almost bicubic rooted maps. Rand. Corp. (February 1969).
- [66] W.T. TUTTE. On the enumeration of four coloured maps. Siam J. Appl. Math. 17 (1969) 454-460.
- [67] W.T. TUTTE. On the enumeration of two coloured, rooted, and weighted Plane Trees. Equations Mathematicae 4 (1970) 143-156.
- [68] W.T. TUTTE. What is a map. A paraître dans Proceeding of the Michigan Conference on Graph Theory, 1971.
- [69] Van KAMPEN. On some lemmas in the theory of groups. Ann. J. Math. 55 (1933) 268-273.
- [70] T. WALSH. Combinatorial Enumeration of Non Planar Maps. Ph. Dissertation Toronto (1971).
- [71] T. WALSH, A.B. LEHMAN. Counting rooted maps by genus. I. J. Comb. Theory 13B (1972) 192-218.
- [72] T. WALSH, A.B. LEHMAN. Counting rooted maps by genus. II. J. Comb. Theory 13B (1972) 122-141.

- [73] C.M. WEINBAUM. Visualizing the Word Problem with an application to sixth-groups. Pacific J. Math. 16 (1966) 557-578.
- [74] H. WHITNEY et W.T. TUTTE. Kempe chains and the four colour problem. Utilitas Mathematica (Winnipeg) 2 (1972) 241-281.
- [75] E.T. WHITTAKER et G.N. WATSON. A course of Modern analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1940.

Robert CORI  
Mathématiques - Informatique  
Université de Bordeaux I  
351, cours de la Libération  
33405 TALENCE

## ABSTRACT

In the years 1962-1967 W.T. TUTTE and his school have discovered the following remarkable properties of the numbers counting certain families of planar maps : these numbers are expressed as a monomial of factorials and their generating power series are the expansions of algebraic functions.

In this article we establish that the properties of these counting numbers are, in most cases, a consequence of the existence of a 1 to 1 mapping from the set of planar maps onto a context free language.

In chapter 1 it is shown that the existence of the 1 to 1 mapping (coding) follows from a theorem on permutation-couples (hypermaps). In chapter 2 we use the previous coding theory to establish combinatorial proofs of counting formulas and to explain the relationship between planar maps and the word problem in a group defined by generators and relations. Finally, in chapter 3, we study differential-type equations which are satisfied by codes of families of planar maps. By solving these equations we demonstrate the algebraicity of the power series which generate the map-counting numbers.