Astérisque

ROGER MARLIN

Comparaison de l'anneau de Chow et de l'anneau de Grothendieck

Astérisque, tome 36-37 (1976), p. 229-240
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__229_0>

COMPARAISON DE L'ANNEAU DE CHOW ET DE L'ANNEAU DE GROTHENDIECK

par Roger MARLIN

§ 0. Notations et préliminaires.

Soient :

$\underline{k}$ un corps algébriquement clos,

G un $\underline{k}$-groupe algébrique semi-simple simplement connexe (déployé),

B un groupe de Borel de G,

T un tore maximal de B (donc de G),

W le groupe de Weyl de G par rapport à T ($W = \mathrm{Norm}_G(T)/T$).

Si X est une variété lisse et quasi-projective, soient :

$A(X)$ son anneau de Chow,

$K(X)$ son anneau de Grothendieck,

$Gr_{top}(X)$ l'anneau gradué associé à $K(X)$ par la filtration topologique (codimension).

0.1. Lemme fondamental.

Soient X et $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ des variétés telles que $(X_i)_i$ soit une suite croissante de parties fermées de X, avec $X_n = X$, $u_i : X_i \hookrightarrow X$ et $v_i : (X_i - X_{i-1}) \hookrightarrow X_i$ les morphismes d'injections. Soit, pour tout i, S_i une partie de $A(X_i)$ telle que $v_i^*(S_i)$ engendre le $\underline{Z}$-module $A(X_i - X_{i-1})$. Si $S = \bigcup_i u_{i*}(S_i)$, alors S est une partie génératrice du $\underline{Z}$-module $A(X)$.

Démonstration.- (Pour $i = 0$ on pose $X_i - X_{i-1} = X_i$, i.e. $X_{-1} = \emptyset$). Si $n = 0$ l'assertion est triviale. Nous procéderons à une démonstration par récurrence sur n.

Supposons donc $n > 0$, et l'assertion démontrée pour les valeurs strictement inférieures de l'indice. Considérons le système X_{n-1}, $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$,

$$u_i^! : X_i \hookrightarrow X_{n-1} \quad , \quad S' = \bigcup_{o \leqslant i \leqslant n-1} u^!_{i*}(S_i) \quad .$$

Il résulte de l'hypothèse de récurrence que S' engendre le $\underline{Z}$-module $A(X_{n-1})$.

Considérons la suite exacte :

$$A(X_{n-1}) \xrightarrow{(u_{n-1})_*} A(X_n) \xrightarrow{v_n^*} A(X_n - X_{n-1}) \longrightarrow 0 \quad .$$

Comme $v_n^*(S_n)$ engendre le $\underline{Z}$-module $A(X_n - X_{n-1})$ et que S' engendre $A(X_{n-1})$, $(u_{n-1})_*(S') \cup S_n$ engendre $A(X_n)$. Or ce système de générateurs n'est autre que S .

§ 1. Anneau de Chow de G/B .

1.1. Rappel. Décomposition cellulaire de Bruhat.

G/B est la réunion disjointe de cellules de Bruhat $(BwB/B \ , \ w \in W)$, et chacune de ces cellules est isomorphe à l'espace affine de dimension $l(w)$ (longueur de w dans W).

1.2. LEMME.- Les seuls points de G/B invariants par T sont les classes modulo B des éléments du normalisateur de T $(wB/B \ , \ w \in W)$.

Démonstration.- Soit g un élément dont la classe modulo B est invariante par T . On a donc $Tg \subset gB$, soit $g^{-1}Tg \subset B$.

$g^{-1}Tg$ est donc un tore de B, il est donc conjugué à T dans B . En d'autres termes, il existe b dans B tel que : $g^{-1}Tg = b^{-1}Tb$, soit : $bg^{-1}Tgb^{-1} = T$, soit : $gb^{-1} \in \mathrm{Norm}_G(T)$.

1.3. Notations.

Soient :

X_w l'adhérence de BwB/B ,

$[X_w]$ la classe (pour l'équivalence rationnelle) de X_w ,

$[X_e]$ la classe du point,

w_o l'élément de longueur maximale de W $(w_o B w_o^{-1} \cap B = T)$.

1.4. PROPOSITION [III].- Soient w et w' deux éléments de W tels que $l(w) \leqslant l(w')$, alors :

(a) $X_w \cap w_o X_{w_o w'} = \emptyset$, si $w \neq w'$,

(b) $X_w \cap w_o X_{w_o w} = wB/B$,

(c) $[X_w].[X_{w_o w'}] = \delta_{w,w'}[X_e]$.

Démonstration.

(a) Supposons $X_w \cap w_o X_{w_o w'} \neq \emptyset$, et soit A une composante irréductible de cette intersection. Alors A est propre et stable par T , donc contient un point fixe par T d'après le théorème de Borel ; soit $w''B/B$ ce point. On a alors :

$$w''B/B \in X_w \quad \text{et} \quad w_o w''B/B \in X_{w_o w'} ,$$

donc

$$X_{w''} \subset X_w \quad \text{et} \quad X_{w_o w''} \subset X_{w_o w'} ,$$

donc

$$(l(w'') < l(w) \quad \text{ou} \quad w'' = w) \quad \text{et} \quad (l(w'') > l(w') \quad \text{ou} \quad w'' = w') .$$

Vue l'hypothèse, on a alors $w = w' = w''$. D'où (a) .

(b) Ce qui précède montre que A contient nécessairement wB/B . Pour prouver (b), il suffit de démontrer que $X_w \cap w_o X_{w_o w}$ est réduit à wB/B au voisinage de ce point. Si n (resp. n_o) est un représentant de w (resp. w_o) dans $\mathrm{Norm}_G(T)$, posons : $B_w^u = n n_o B^u n_o^{-1} n^{-1}$. Le morphisme

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G/B \\ g &\longmapsto gwB/B \end{aligned}$$

induit des immersions ouvertes

$$B_w^u \hookrightarrow G/B \ , \quad B_w^u \cap B \hookrightarrow X_w \ , \quad B_w^u \cap w_o B w_o \hookrightarrow w_o X_{w_o w} \ .$$

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : (B_w^u \cap B) \times (B_w^u \cap w_o B w_o) &\longrightarrow B_w^u \\ (x,y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

φ étant un isomorphisme, ceci conclut la démonstration.

(Pour de plus amples détails sur les immersions et φ voir [II], exp. 13).

(c) Vus (a) et (b), il suffit de remarquer que $[w_o X_{w'}] = [X_{w'}]$ puisque les opérations de G dans $A(G/B)$ sont triviales.

Remarque.- Cette proposition montre qu'il suffit, dans ce cas particulier $(l(w) \leqslant l(w'))$, de faire "bouger" le cycle $X_{w_o w'}$ en lui appliquant un élément de $W(w_o)$ pour le mettre "en bonne position" par rapport à X_w. Ceci semble malheureusement faux pour $l(w) > l(w')$. Il n'y a en fait aucune formule donnant en général le produit de deux classes de cycles $[X_w]$ et $[X_{w'}]$.

1.5. PROPOSITION.- Si on pose $Z_w = [X_{w_o w}]$, $(Z_w)_{w \in W}$ forme une base du $\underline{Z}$-module libre $A(G/B)$.

Démonstration.

$*(Z_w)_{w \in W}$ est une partie génératrice.

Il suffit de remarquer que $A(\mathbb{A}_i) \simeq \underline{Z}$, une base de $A(\mathbb{A}_i)$ étant constituée par $[\mathbb{A}_i]$, et d'appliquer le lemme fondamental, après avoir muni W d'une relation d'ordre total compatible avec la relation d'ordre partiel donnée par la longueur, avec $X_{(w)} = \bigcup_{w' \leqslant w} Bw'B/B$ (les $X_{(w)}$ ainsi définis sont bien fermés puisque l'adhérence d'une cellule de Bruhat est constituée de cette cellule et de cellule plus petites).

$*(Z_w)_{w \in W}$ est une partie libre.

Soit $\alpha Z_w = \sum_{w_i > w} \beta_i Z_{w_i}$ avec $\alpha \neq 0$, alors :

$$\alpha Z_{w_o} = \alpha Z_w Z_{w_o w} = \sum_{w_i > w} \beta_i Z_{w_i} Z_{w_o w} = 0$$

(d'après 1.4.c), donc $\alpha = 0$, contradiction.

1.6. Homomorphisme caractéristique de la fibration $G \longrightarrow G/B$.

1.6.1. Fibré vectoriel associé à une représentation de B.

DÉFINITIONS.- Soit ρ une représentation de B dans $GL(V)$.

Soit $G \times {}^B V$ le quotient de $G \times V$ par la relation d'équivalence $(g,v) \sim (gb, \rho(b)^{-1} v)$.

$G \times^B V$ sera le fibré vectoriel de base G/B associé à ρ .

En particulier à chaque caractère λ de B on associe un fibré en droite de base G/B .

Si $\chi(B)$ est le groupe des caractères de B , soit $c_1 : \chi(B) \longrightarrow A^1(G/B)$ l'homomorphisme qui, à tout caractère λ de B , associe la première classe de Chern du fibré en droite associé à λ .

Si $S(\chi(B))$ désigne l'algèbre symétrique engendrée par $\chi(B)$, soit c l'homomorphisme d'algèbre graduée qui prolonge c_1

$$c : S(\chi(B)) \longrightarrow A(G/B)$$

c sera appelé l'homomorphisme caractéristique de la fibration $G \longrightarrow G/B$.

1.6.2. PROPOSITION ([I]).- Soient $w \in W$ et $\lambda \in \chi(B)$. Alors dans $A(G/B)$ on a :

$$c(\lambda)Z_w = \sum_{\substack{\alpha \in R_+ \\ l(ws_\alpha) = l(w)+1}} \langle \alpha , \lambda \rangle Z_{ws_\alpha} .$$

Où R_+ désigne le système de racines positives associé à B , S_α la symétrie associée à α .

COROLLAIRE.- Soient $\alpha \in S$ et $w \in W$. Alors dans $A(G/B)$ on a :

$$Z_{s_\alpha} Z_w = \sum_{\substack{\beta \in R_+ \\ l(ws_\beta) = l(w)+1}} \langle \beta^\vee , \omega_\alpha \rangle Z_{ws_\beta} .$$

Où S désigne le système des racines simples, ω_α le poids fondamental associé à α .

Démonstration.- Cf. [III] 4.4, prop. 2.

1.6.3. Remarque.- L'homomorphisme canonique de fibration est surjectif si et seulement si G est sans torsion, c'est-à-dire si G est isomorphe à un produit de groupes $Sl(n)$ et $Sp(m)$.

§ 2. Anneau de Chow de G .

2.1. PROPOSITION ([V]).- *Si π est l'homomorphisme de projection $G \longrightarrow G/B$, $\pi^* : A(G/B) \longrightarrow A(G)$ est surjectif et son noyau est l'idéal engendré par l'image par c de $S^+(\chi(B))$.*

COROLLAIRE.- *$A(G)$ est réduit à $\mathbf{Z}$ si et seulement si G est isomorphe à un produit de $Sl(n)$ et $Sp(m)$.*

Démonstration.- Une démonstration complète se trouve dans [V] , mais on peut aisément voir que le noyau de π^* contient cet idéal. En effet un fibré en droite sur G/B associé à un caractère de B se relève en un fibré trivial sur G .

§ 3. Anneau de Grothendieck de G/B .

3.1. DÉFINITIONS.- *Si X est une sous-variété irréductible de G/B , soit $\gamma(X)$ la classe dans $K(G/B)$ de $\mathcal{O}_X$ considéré comme faisceau algébrique cohérent sur G/B . Par linéarité γ se prolonge aux cycles sur G/B .*

Soit $K^i(G/B)$ le sous-groupe de $K(G/B)$ engendré par les classes des faisceaux algébriques cohérents dont la codimension du support est supérieure ou égale à i .

3.2. *Rappel.*

Le morphisme γ vérifie alors les propriétés suivantes :

3.2.1. Le groupe $K^i(G/B)$ est engendré par les $\gamma(X)$, où X parcourt l'ensemble des sous-variétés de G/B de codimension supérieure ou égale à i .

3.2.2. Si deux cycles X et X' , homogènes de codimension i , sont rationnellement équivalents, alors dans $K(G/B)$ on a :

$$\gamma(X) \equiv \gamma(X') \bmod K^{i+1}(G/B) .$$

3.2.3. Si deux cycles X et X' , homogènes de codimensions respectives i et j , sont "en bonne position", alors on a :

$$\gamma(X).\gamma(X') \equiv \gamma(X.X') \mod K^{i+j+1}(G/B) \quad .$$

3.2.4. D'après ce qui précède, γ induit un homomorphisme surjectif d'anneaux gradués

$$\varphi : A(G/B) \longrightarrow Gr_{top}(G/B) \quad .$$

3.2.5. Le noyau de φ est de torsion. Ce dernier point résulte du fait que si ψ est l'homomorphisme classe de Chern

$$\psi : Gr_{top}(G/B) \longrightarrow A(G/B)$$

on a alors :

$$\begin{cases} \psi \circ \varphi(x) = (-1)^{i-1}(i-1)!x \mod \text{torsion}, & x \in A^i(G/B) \quad , \\ \varphi \circ \psi(x) = (-1)^{i-1}(i-1)!x \mod \text{torsion}, & x \in Gr^i_{top}(G/B) \quad . \end{cases}$$

Si x est un sous-schéma fermé irréductible lisse de G/B la première formule n'est autre que Riemann-Roch pour l'inclusion de x dans G/B , la seconde se déduit de la première puisque φ est surjective.

3.3. PROPOSITION ([III]).- <u>Soient</u> w <u>et</u> w' <u>des éléments de</u> W <u>tels que</u> $l(w) + l(w') \leq \dim(G/B)$.

<u>Dans l'anneau</u> $K(G/B)$, <u>on a alors</u> :

(a) $\gamma(X_w).\gamma(X_{w'}) = \delta_{w,w_o w'}\gamma(X_e)$,

(b) $\chi(X_w, \mathcal{O}_{X_{w'}}) = \delta_{w,w_o w'}$,

(c) $K(G/B)$ <u>est un</u> <u>Z-module libre de base</u> $(\gamma(X_w))_{w \in W}$. <u>Les formes linéaires</u> $(u \longmapsto \chi(X_w, u))_{w \in W}$ <u>forment une base du</u> <u>Z-module dual.</u>

<u>Démonstration</u>.- Cela résulte des propositions 1.4 et 1.5 et de la partie 3.2. En ce qui concerne (c), (b) montre que la matrice $(\chi(X_w, \gamma(X_{w'})))_{w,w' \in W}$ est "triangulaire", avec des 1 sur la diagonale.

COROLLAIRE.- φ <u>est un isomorphisme d'anneaux gradués de</u> $A(G/B)$ <u>sur</u> $Gr_{top}(G/B)$.

<u>Démonstration</u>.- Cela résulte immédiatement du fait que $A(G/B)$ est sans torsion et de 3.2.5

3.4. Homomorphisme caractéristique.

3.4.1. La construction faite dans 1.6.1 permet d'associer à toute représentation de B un fibré vectoriel $G \times^{B} V$ de base G/B, auquel on peut faire correspondre le faisceau localement libre de ses sections. Si $Z(\chi(B))$ désigne l'algèbre du groupe $\chi(B)$, $Z(\chi(B))$ s'identifie à $R(B)$, l'algèbre des représentations de B.

En composant le tout, on obtient l'homomorphisme caractéristique c_K :

$$c_K : Z(\chi(B)) \longrightarrow R(B) \longrightarrow K(G/B) \quad .$$

3.4.2. PROPOSITION ([III]).- Il existe une base $(a_w)_{w \in W}$ du $\mathbb{Z}$-module $K(G/B)$ telle que l'homomorphisme caractéristique soit donné par :

$$c_K(e^\lambda) = \sum_{w \in W} \chi(X_w, \mathcal{L}(\chi))a_w \quad ,$$

où $\mathcal{L}(\lambda)$ désigne le module inversible associé à λ, et e^λ l'élément de la base du $\mathbb{Z}$-module $Z(\chi(B))$ associé à λ.

Démonstration.- Ceci résulte immédiatement du fait que les formes linéaires $(u \longmapsto \chi(X_w, u))_{w \in W}$ constituent une base du $\mathbb{Z}$-module dual de $K(G/B)$.

3.4.3. Remarque ([III]).- On peut définir des opérateurs L_w, $w \in W$, de l'anneau $Z(X(B))$ jouissant des prppriétés suivantes :

- si w et w' appartiennent à W et sont tels que $l(w) + l(w') = l(ww')$, alors : $L_w L_{w'} = L_{ww'}$.
- si α est une racine simple, S_α la symétrie correspondante, λ un caractère :

$$L_{S_\alpha} L_{S_\alpha} = L_{S_\alpha} \quad ,$$

$$L_{S_\alpha}(e^\lambda) = \frac{e^\lambda - e^{S_\alpha(\lambda)}}{1 - e^\alpha} \quad .$$

Si ρ désigne la demi-somme des racines positives du système, ε l'augmentation naturelle de $Z(\chi(G/B))$ $(e^\lambda \longmapsto 1)$. On a alors :

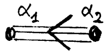
$$\chi(X_w, \mathcal{L}(\lambda)) = \varepsilon L_w(e^{\lambda - \rho}) \quad .$$

§ 4. Anneau de Grothendieck de G .

4.1. PROPOSITION ([V]).- *Si* π *est l'homomorphisme de projection* $\pi : G \longrightarrow G/B$, $\pi^* : K(G/B) \longrightarrow K(G)$ *est surjectif et son noyau est l'idéal engendré par l'image par* c_K de $Z^+(X(B))$.

Démonstration.- Cette proposition est l'analogue de la proposition 2.1. Sa démonstration s'obtient de manière identique.

§ 5. G groupe algébrique semi-simple déployé de type G_2 .



5.1. *Anneaux de Chow.*

5.1.1. LEMME.- *Soit* G *un groupe algébrique semi-simple déployé de type* G_2 . *On a* :

$$A^0(G/B) \sim \underline{Z} \ ,$$
$$A^i(G/B) \sim \underline{Z}^2 \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant 5 \ ,$$
$$A^6(G/B) \sim \underline{Z} \ ,$$
$$A^i(G/B) = \{0\} \ , \quad i > 6 \ .$$

Démonstration.- Claire d'après 1.5 et la structure du groupe de Weyl du système G_2 .

5.1.2. PROPOSITION.- *Soit* I *l'idéal de* $A(G/B)$ *engendré par l'image de l'homomorphisme caractéristique*, $I = \bigoplus_{i>0} I^i$. *Soient* Z_{w_1} *et* Z_{w_2} *les deux éléments de base de* $A^3(G/B)$. *On a alors* :

$$I^i = A^i(G/B) \ , \quad i > 0 \ , \quad i \neq 3 \ ,$$

I^3 *admet pour base* $(Z_{w_1} + Z_{w_2}, Z_{w_1} - Z_{w_2})$.

Démonstration.- Ce résultat est obtenu dans [VI], § 8 , en utilisant la formule de Chevalley 1.6.2.

COROLLAIRE 1.- *L'anneau de Chow de* G/B *n'est pas engendré par les classes des modules inversibles.*

COROLLAIRE 2.- Dans l'anneau de Chow de G , on a :

$$A^0(G) \sim \underline{Z} \ ,$$
$$A^3(G) \sim \underline{F}_2 \ ,$$
$$A^i(G) = \{0\} \ , \quad i \notin \{0,3\} \ .$$

5.2. Anneau de Grothendieck.

5.2.1. PROPOSITION.- L'homomorphisme caractéristique c_K est surjectif.

COROLLAIRE 1.- L'anneau de Grothendieck de G/B est engendré par les classes des modules inversibles.

COROLLAIRE 2.- $K(G)$, et donc $Gr_{top}(G)$, sont tous deux réduits à $\underline{Z}$.

Démonstration.- D'après 3.4.2, on a : $c_K(e^\lambda) = \sum_{w \in W} \chi(X_w, \mathcal{L}(\lambda))a_w$. Il suffit donc de trouver une famille de caractères $(\lambda_w)_{w \in W}$ telle que le déterminant de la matrice de terme général : $\alpha_{w,w'} = \chi(X_w, \mathcal{L}(\lambda_{w'}))$, (matrice carrée d'ordre $\# W$) soit inversible (dans $\underline{Z}$) .

La famille suivante convient :

$\{5\alpha_1 + 3\alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1, -\alpha_1, -\alpha_2, -3\alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2, 0\}$.

Les coefficients $\alpha_{w,w'}$ étant calculés en utilisant les opérateurs L_w de la remarque 3.4.3 la matrice obtenue est :

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 4 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 3 & -3 & 6 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & -5 & 8 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -6 & 6 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -6 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -7 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -7 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

En ajoutant à la 5eme colonne la 7eme et la 12eme,

à la 6eme colonne la 8eme et la 12eme,

En ajoutant à la 7eme colonne la 12eme,

à la 9eme colonne sept fois la 12eme,

on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 8 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 8 & 0 & 3 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 10 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 0 & 3 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 10 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci achève la démonstration de la proposition. Les corollaires s'en déduisent immédiatement.

5.3. <u>Conclusions</u>.

Si G est un groupe algébrique semi-simple déployé de type G_2 , B un sous-groupe de Borel, $A(G/B)$ et $Gr_{top}(G/B)$ sont isomorphes, mais il n'existe pas d'isomorphisme entre ces anneaux et $K(G/B)$ compatible avec les classes de Chern (ce dernier est engendré par les classes des modules inversibles, les autres non). $K(G)$ et $Gr_{top}(G)$ sont isomorphes à $\underline{Z}$, mais $A(G)$ (qui contient un sous-groupe de torsion) ne leur est pas isomorphe. Néanmoins, dans les deux cas, les trois anneaux sont isomorphes une fois tensorisés par Q .

Cette situation se retrouvera avec tous les groupes algébriques semi-simples simplement connexes déployés non isomorphes à un produit de $Sl(n)$ et de $Sp(m)$ (i.e. de type B_n , $n \geqslant 3$; D_n , $n \geqslant 4$; E_6 ; E_7 ; E_8 ; F_4 ; G_2). Des détails sur les anneaux de Chow de tels groupes se trouvent dans [VI]. Le fait que $K(G/B)$ est engendré par les classes des modules inversibles a été obtenu, par voie topologique, par Hodgkin dans sa thèse (pour $\underline{k} = \mathbb{C}$), ou plus généralement dans [VII].

BIBLIOGRAPHIE

[I] C. CHEVALLEY - Sur les décompositions cellulaires des espaces G/B,, (Manuscrit non publié, circa 1958).

[II] C. CHEVALLEY - Classification des groupes de Lie algébriques, multigraphié, Secrétariat Mathématique, Paris 1958.

[III] M. DEMAZURE - Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, Annales Scientifiques de l'E.N.S., 4e série, t. 7, fasc. 1, 1974.

[IV] A. GROTHENDIECK - Exposés 4 et 5 dans "Anneaux de Chow et applications", Séminaire C. Chevalley, multigraphié, Secrétariat Mathématique, Paris, 1958.

[V] A. GROTHENDIECK - Exposé 14 dans S.G.A. 6, Lectures Notes in Mathematics n°225, Springer Verlag 1971.

[VI] R. MARLIN - Anneaux de Chow des groupes algébriques SO(n) , Spin(n) , G_2 et F_4 , Université de Paris XI, n°95-7419.

[VII] R. MARLIN - Anneau de Grothendieck des variétés de drapeaux, à paraître Bull. Soc. Math.