

# *Astérisque*

MARTIN EICHLER

**Représentation moyenne de nombres par des  
formes quadratiques quaternaires**

*Astérisque*, tome 41-42 (1977), p. 199-202

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1977\\_\\_41-42\\_\\_199\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__199_0)

© Société mathématique de France, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATION MOYENNE DE NOMBRES PAR DES FORMES  
 QUADRATIQUES QUATERNAIRES

par

Martin EICHLER

Nous considérons des formes quadratiques, entières, définies positives, à 4 variables, de discriminant donné  $D(F)$ . Soit  $F_1, \dots, F_H$  un système de représentants de ces formes et  $e_i$  ( $1 \leq i \leq H$ ) le nombre des unités de  $F_i$  (c'est-à-dire le nombre des isométries de déterminant 1). Pour tout entier  $m$  positif, soient  $a_i(m)$  les nombres de représentation de  $m$  par  $F_i$  ( $1 \leq i \leq H$ ). On sait que le nombre

$$(1) \quad \sum_{i=1}^H e_i^{-1} a_i(m) = e(m),$$

a une expression élémentaire et est le coefficient d'une certaine série d'Eisenstein

$$E(z) = \sum_{m>0} e(m) e^{2i\pi mz}.$$

Si on se borne aux formes qui représentent 1, on peut aussi définir d'autres "nombres moyens de représentations". Supposons que les classes des formes qui représentent 1 soient données par  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq h$ . Si  $D(F) = q^2$  est le carré d'un nombre premier, on a la relation :

$$(2) \quad \sum_{i=1}^h v_i e_i^{-1} a_i(m) = \frac{1}{2} \sum_{s,f} \left( 1 - \left\{ \frac{(4m-s^2)f^{-1}}{q} \right\} \right) h((4m-s^2)f^{-2}),$$

où

$$\left\{ \frac{a}{q} \right\} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv 0 \pmod{q^2} \\ \left( \frac{a}{q} \right) & \text{le symbole de Legendre, sinon.} \end{cases}$$

Dans le membre de droite, la somme porte sur les couples  $(s, f) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$  tels que  $\Delta = -(4m-s^2)f^{-2}$  soit un entier négatif, congru à 0 ou 1 modulo 4. On note  $h(\Delta)$  le nombre de classes de l'ordre de discriminant  $\Delta$  dans le corps  $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ . Les nombres  $v_i$  seront expliqués plus loin.

Si  $D(\mathbb{F}) = q$ ,  $q \equiv 13 \pmod{24}$  est un nombre premier, on a la relation :

$$(3) \quad \sum_{i=1}^h u_i^{-1} a_i(m) = \frac{1}{2} \sum_{s, f} \left( 1 - \left\{ \frac{q(4m-s^2)f^{-2}}{q} \right\} \right) h(q(4m-s^2)f^{-2}) - ca_2(q^{-\mu} m)$$

où les  $u_i$  sont les nombres de certaines unités symétriques (voir plus loin). On note  $q^\mu$  la plus grande puissance de  $q$  divisant  $m$  et  $a_2(q^{-\mu} m)$  le nombre de décompositions en somme de 2 carrés :

$$q^{-\mu} m = a^2 + b^2 \quad (a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}.$$

La correction apportée au membre de droite est en fait souvent nulle (c'est-à-dire  $c = 0$ ), par exemple pour  $q = 13, 37$  ou si  $\mu$  est impair. Pour  $q = 13$ , comme le nombre de classes  $H = 1$ , les sommes obtenues dans (3) sont égales aux coefficients d'une série d'Eisenstein. Nous obtenons de nouvelles relations entre nombres de classes binaires semblables à celles démontrées par Hirzebruch et Zagier.

#### Remarques sur les démonstrations.

Si  $D(\mathbb{F}) = q^2$ , les  $F_i$  représentent les normes dans les idéaux entiers d'une algèbre de quaternions  $K_q$  totalement définie sur  $\mathbb{Q}$ , ramifiée en  $q$ . On arrange les classes des idéaux dans un schéma carré. Sur la diagonale se trouvent les idéaux unités c'est-à-dire les ordres maximaux. Ceux-ci figurent une ou deux fois selon que l'idéal ambige  $\mathfrak{q}$  de norme  $q$  est principal ou non. Cela nous donne  $v_i = 1$  ou 2. La somme (2) est la trace d'une matrice de Brandt. On rappelle que les matrices de Brandt forment une représentation des opérateurs de Hecke.

## FORMES QUATERNAIRES

Si  $D(F) = q$ , on construit l'algèbre de Clifford de la forme  $F$  en définissant un produit dans le réseau  $L$  associé à  $F$ . Le produit des vecteurs  $\underline{a}, \underline{b}, \dots \in L$  est assujéti aux règles suivantes :

- 1)  $\underline{a}\underline{b}$  est linéaire en chaque facteur
- 2)  $\underline{a}\underline{b} + \underline{b}\underline{a} = (\underline{a}, \underline{b})$  est le produit scalaire défini par la forme  $F$ .

La sous-algèbre  $K$  engendrée sur  $\mathbb{Q}$  par les produits de nombres pairs de vecteurs est l'algèbre de quaternions sur  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{q})$  totalement définie et non ramifiée pour tous les idéaux premiers de  $k$ . On note  $\kappa$  l'anti-automorphisme naturel de  $K$  :

$$(\underline{a}\underline{b}\dots)^{\kappa} = \dots \underline{b}\underline{a}.$$

Soit  $\underline{e}$  un vecteur de norme  $\frac{1}{2}(\underline{e}, \underline{e}) = 1$ . Alors la relation

$$\underline{e}^{-1}(\underline{a}\underline{b}\dots)\underline{e} = (\underline{a}\underline{b}\dots)^{\sigma}$$

définit un isomorphisme  $\sigma$  de  $K$  qui commute évidemment avec  $\kappa$ . Les produits des vecteurs de  $L$  engendrent un ordre  $\mathfrak{O}$  dans  $K$ . Les correspondances entre  $F, L, \mathfrak{O}$  sont bijectives. Les réseaux contenant le vecteur  $\underline{e}$  engendrent les ordres symétriques, on a :

$$\underline{e}^{-1}\mathfrak{O}\underline{e} = \mathfrak{O}^{\sigma} = \mathfrak{O}.$$

Nous nous bornons à ceux-ci. Enfin, on associe à un vecteur  $\underline{m} \in L$ , l'élément distingué de  $K$

$$M = \underline{e}\underline{m}.$$

Il a la propriété de symétrie

$$(4) \quad M^{\kappa\sigma} = M.$$

Inversement tous les éléments de  $K$  ayant cette propriété sont obtenus de cette manière. La norme de  $M$  est égale à celle de  $\underline{m}$  :

$$N_{K/k}(M) = \frac{1}{2}(\underline{m}, \underline{m}).$$

Le calcul du nombre des vecteurs  $\underline{m} \in L$  de norme donnée, donc du nombre des éléments

distingués dans  $\mathcal{O}$  de norme donnée ressemble au calcul des traces des matrices de Brandt. Une des idées essentielles de la démonstration est d'utiliser la symétrie (4) et de se ramener à des considérations dans l'algèbre  $K_q/\mathbb{Q}$  au lieu de  $K/k$ . On trouve d'abord une formule analogue à (3) mais où le membre de droite contient une somme de nombres de classes d'idéaux d'extensions quadratiques de  $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$  symétriques pour  $\sigma$ . On peut exprimer ces nombres avec des nombres de classes de corps quadratiques.

Nous n'avons pas encore défini les nombres  $u_i$  figurant dans le membre de gauche de (3). Ce sont les nombres de certaines unités symétriques des  $\mathcal{O}_i$  attachés aux  $F_i$ . Si  $q \equiv 13 \pmod{24}$ , ces nombres sont indépendants de la symétrie choisie (liée au choix du vecteur  $\underline{e}$ ).

Pour les autres  $q$  la méthode marche aussi en principe, mais les unités causent des difficultés, et je n'ai que des conjectures.

Les démonstrations seront publiées dans un volume dédié au 80-ième anniversaire de C.L. Siegel dans "Communications in Pure and Applied Mathematics".

Martin EICHLER  
Universität Basel  
Mathematisches Institut  
Petersplatz 1  
4051 BASEL (Suisse)