Astérisque

MARC YOR

Un exemple de processus qui n'est pas une semi-martingale

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 219-221
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__219_0>

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 52-53 (1978) p.219-221

UN EXEMPLE DE PROCESSUS QUI N'EST PAS UNE SEMI-MARTINGALE.

Marc YOR

1 - Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré usuel, et $X = (X_t, t \geq 0)$ une semi-martingale sur cet espace.

D'après la formule d'Ito, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, le processus $f \circ X$ est encore une semi-martingale. P.A. Meyer a montré qu'il en est encore de même si f est différence de deux fonctions convexes [2].

Cette propriété n'est plus vérifiée par les fonctions $f_\alpha : x \to |x|^\alpha$, pour $0 < \alpha < 1$, comme l'indique le

Théorème

Soit $0 < \alpha < 1$. Si X est une martingale locale continue, nulle en 0, mais non nulle, le processus $|X|^\alpha$ n'est pas une semi-martingale.

2 - Avant de montrer le théorème, énonçons le

Lemme

Soit X une martingale locale continue, nulle en 0.

Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) X est nulle

(ii) le temps local de X en 0, soit L^0, est nul.

Démonstration : par arrêt, on peut supposer que X est une martingale bornée. Le temps local L^o est alors l'unique processus croissant prévisible A tel que $|X| - A$ soit une martingale, ce qui prouve le lemme.

Démonstration du théorème : supposons que $|X|^\alpha = Y$ soit une semi-martingale. On a alors, en posant $\beta = 1/\alpha > 1$:

$$|X| = Y^\beta = \beta \int_o^\cdot Y_s^{\beta-1}\, dY_s + \frac{\beta(\beta-1)}{2} \int_o^\cdot Y_s^{\beta-2}\, d<Y^c,Y^c>_s$$

D'où :

$$L^o = \int_o^\cdot 1_{(X_s=0)}\, d|X|_s = \int_o^\cdot 1_{(Y_s=0)}\, d(Y^\beta)_s = 0.$$

D'après le lemme, X est donc nulle, ce qui contredit l'hypothèse. $|X|^\alpha$ n'est donc pas une semi-martingale □

Remarques :

1). Le théorème n'est plus valable si l'on remplace X par

a). une martingale conforme Z (à valeurs dans $\mathbb{C}$), car d'après [1] (lemme 5.8), pour tout $0 \leq \alpha < \infty$, $|Z|^\alpha$ est une sous-martingale.

b). en général, une semi-martingale réelle (prendre pour X un processus croissant, ou encore $X = |Y|^\beta$, avec $\beta = 1/\alpha$, et Y une semi-martingale réelle).

2). D'après le théorème, un processus $Y = |X|^\alpha$, où X est une martingale continue, bornée, nulle en 0, mais non nulle, fournit un exemple de martingale asymptotique (ou "amart", selon l'abréviation adoptée par les spécialistes) qui n'est pas une semi-martingale.

3). Les liens entre le théorème obtenu ici et un récent travail de D. Gilat sont développés en [3].

REFERENCES

[1] R. GETOOR et M. SHARPE : Conformal martingales. Inventiones Math. 16, 271-308 (1972).

[2] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire Proba. Strasbourg X, Lect. Notes in Math. 511, Springer.

[3] M. YOR : Remarques sur un théorème de D. Gilat (à paraître).