NICOLE EL KAROUI

Sur les montées des semi-martingales le cas non continu

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 73-87
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__73_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 52-53 (1978) p.73-87

SUR LES MONTÉES DES SEMI-MARTINGALES

LE CAS NON CONTINU

Nicole EL KAROUI

Dans la première partie de cet article, nous avons montré que si I désigne l'intervalle $]a,b[$, de longueur $|I|$, et U_t^I le nombre des montées d'une semi-martingale continue X, au-dessus de I, $|I|\ U_t^I$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2} L^a(X)_t$, lorsque b décroit vers a, où $L^a(X)$ désigne le temps local de X au point a.

La méthode utilisée, est étendue ici, avec quelques difficultés techniques à une semi-martingale générale X.

Nous montrons, en particulier, qu'il convient d'introduire un terme correctif lié aux sauts de X, désigné par W_t^I pour qu'il y ait convergence vers le temps local de X au point a.

Plus précisément, dans la première partie, nous établissons que si X est une semi-martingale de H^p, $|I|\ U_t^I + W_t^I$ converge uniformément en t dans L^p, vers $\frac{1}{2} L^a(X)_t$ lorsque b décroit vers a.

Dans la deuxième partie, nous montrons que si X est une semi-martingale, $|I|\ U_t^I + W_t^I$ converge en probabilité, uniformément sur tout compact vers $\frac{1}{2} L^a(X)_t$, puis nous énonçons des conditions suffisantes pour qu'il y ait convergence p.s.

M. Yor a lu avec un soin exceptionnel les différentes versions de ce travail. Ses nombreuses remarques, toujours constructives, ont contribué à améliorer grandement la deuxième partie de ce travail; qu'il en soit vivement remercié.

I - ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DANS L^p

Nos notations relatives aux semi-martingales sont celles de l'introduction de ce volume, dans sa partie relative aux semi-martingales générales. Nous y ferons systématiquement référence sous la forme : (RPG 2ème partie). Soulignons quelques points que nous utiliserons fréquemment dans l'étude qui va suivre, et qui sont des conséquences assez faciles de la définition des temps locaux, et de leurs propriétés, dont on trouvera une étude très complète dans [2].

X désigne une semi-martingale de $H^p(p \geq 1)$, et $L^a(X)$ son temps local au point a.

Les processus croissants $L^a(X)_t$, $\sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}<b<X_s\}}(X_s-b)$, $\sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}\geq b>X_s\}}(b-X_s)$ sont de puissance p-ième intégrable.

L'intégrale stochastique $\int_o^t 1_{\{X_{s-}=b\}}dX_s$ est un processus à variation finie, égal à $\sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}=b\}}\Delta X_s + \phi_t^b$, où ϕ_t^b est un processus à variation finie, qui ne croit que sur l'ensemble $\{X_{s-}=b\}$, et qui est à variation p-intégrable.

Par ailleurs, nous utiliserons les notations de la première partie de ce travail :

Les montées de X au-dessus de l'intervalle $I=]a,b[$, sont décrites à l'aide des temps d'arrêt :

$$S^a = \inf\{t>0 \; ; \; X_t \leq a\} \; ; \; T_1^b = \inf\{t > S^a, X_t \geq b\}$$

$$S_n^a = \inf\{t > T_{n-1}^b, X_t \leq a\} ; T_n^b = \inf\{t > S_n^a, X_t \geq b\}$$

$$(\inf\{\emptyset\} = +\infty).$$

Le nombre des montées de X dans l'intervalle de temps $[0,t]$ au-dessus de I, U_t^I est défini par $U_t^I = \sum_n 1_{\{T_n^b \leq t\}}$.

Nous aurons aussi à utiliser les processus croissants

$$W_t^I = \sum_{n \geq 1} 1_{\{a < X_{T_n^b -} \leq b\}} (X_{T_n^b} - b)\, 1_{\{T_n^b \leq t\}}$$

et
$$\overline{W}_t^I = \sum_{n \geq 2} 1_{\{a \leq X_{S_n^a -} < b\}} (a - X_{S_n^a})\, 1_{\{S_n^a \leq t\}}$$

$|I|$ désigne la longueur de I.

Les ensembles suivants joueront un rôle important dans la démonstration :

L^I, sous-ensemble prévisible de $\Omega \times R^+$, défini par

$$L^I = \bigcup_{n \geq 0}]\!]S_n^a, T_n^b]\!] = \{(\omega,t) \in \Omega \times R^+, \text{ t.q } \exists n \text{ t.q } S_n^a(\omega) < t \leq T_n^b(\omega)\}$$

et K^I sous-ensemble optionnel de $\Omega \times R^+$ défini par :

$$K^I = \bigcup_{n \geq 0} [\![S_n^a, T_n[\![.$$

Les inclusions suivantes résultent immédiatement de la définition des t.a S_n^a et T_n^b.

(1) $\{(\omega,t) \ ; \ t > S^a, \text{ et } X_{t-} < a\} \subseteq L^I \subseteq \{(\omega,t) ; t > S^a, X_{t-} \leq b\}$

(2) $\{(\omega,t) \ ; \ t \geq S^a \text{ et } X_t \leq a\} \subseteq K^I \subseteq \{(\omega,t) \ ; \ t \geq S^a, X_t < b\}$.

Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème que nous désirons établir.

THEOREME 1

Soit X une semi-martingale de H^p, $p \geq 1$

Lorsque a croit vers b, le processus croissant $|I|\, U_t^I + \overline{W}_t^I$ converge uniformément en t dans L^p vers $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$ où $L^{-b}(-X)_t$ désigne le temps local de $-X$ en $-b$.

Démonstration :

Etape 1 : les idées sont les mêmes que dans le cas continu, mais la présence des sauts complique un peu les choses : il s'agit d'exprimer $|I|\, U_t^I$ à l'aide des processus $X_{t \wedge T_n^b} - X_{t \wedge S_n^a}$.

Toutefois, si $n \geq 2$ et $S_n^a < +\infty$, on a seulement $X_{S_n^a} \leq a$ et $X_{S_n^a -} \geq a$, mais sans avoir nécessairement l'égalité.

L'expression de $(b-a)1_{\{T_n^b \leq t\}}$ n'est plus tout à fait élémentaire

$$(3) \qquad (b-a)1_{\{T_n^b \leq t\}} = X_{T_n^b \wedge t} - X_{S_n^a \wedge t} - (X_t - a)\, 1_{\{S_n^a \leq t < T_n^b\}}$$

$$-1_{\{X_{T_n^b -} \leq b < X_{T_n^b}\}} (X_{T_n^b} - b)\, 1_{\{T_n^b \leq t\}}$$

$$- (a - X_{S_n^a})\, 1_{\{S_n^a \leq t\}}.$$

Notons que si $n \geq 2$, $(a-X_{S_n^a}) = (a-X_{S_n^a})\, 1_{\{X_{S_n^a -} \geq a > X_{S_n^a}\}}$

et que ceci est encore vrai pour $n=1$, si $X_o > a$.

Sommons sur n la relation (3) :

$$(4) \quad |I|U_t^I = \int_o^t L^I(s)dX_s - K^I(t)(X_t - a) - \sum_{n \geq 1} 1_{\{X_{T_n^b -} \leq b < X_{T_n^b}\}} (X_{T_n^b} - b)\, 1_{\{T_n^b \leq t\}}$$

$$- \sum_{n \geq 2} 1_{\{X_{S_n^a -} \geq a > X_{S_n^a}\}} (a - X_{S_n^a})\, 1_{\{S_n^a \leq t\}} - (a - X_{S^a})\, 1_{\{S^a \leq t\}}$$

Nous allons transformer un peu cette expression, en décrivant l'ensemble $L^I \cap \{(\omega,s) ;\ X_{s^-} = b\} = \mathfrak{J}$

Il se décompose en deux ensembles $\mathfrak{J}^1$ et $\mathfrak{J}^2$ définis respectivement par :

$\mathfrak{J}^1 = \{(\omega,s),\ s \in L^I,\ X_{s^-} = b$ et $X_s \geq b\} = \{(\omega,s) : \exists n\ s = T_n^b$ et $X_{T_n^b -} = b\}$

$\mathfrak{J}^2 = \{(\omega,s)\quad s \in L^I,\ X_{s^-} = b$ et $X_s < b\}$

$\mathfrak{J}^1$ et $\mathfrak{J}^2$ sont donc à coupes dénombrables.

D'autre part, l'intégrale stochastique $\int_o^t 1_{\{X_{s^-}=b\}}\, dX_s$ est une semi-martingale à variation finie ([2]), égale à $\sum_{0<s\le t} 1_{\{X_{s^-}=b\}}(X_s-b) + \phi_t^b$, où ϕ^b est un processus à variation finie, continu, de support contenu dans l'ensemble $\{X_{s^-}=b\}$.

$\mathfrak{J}$ étant à coupes dénombrables, $\int_o^t \mathfrak{J}(s)\, d\phi_s^b = 0$ et

$$\int_o^t L^I(s)\, 1_{\{X_{s^-}=b\}}\, dX_s = \sum_{0<s\le t} \mathfrak{J}(s)(X_s-b) = \sum_{0<s\le t} L^I(s)\, 1_{\{X_{s^-}=b>X_s\}}(X_s-b)$$

$$+ \sum_{n\ge 1} 1_{\{X_{T_n^b-}=b\}}\,(X_{T_n^b}-b)\, 1_{\{T_n^b\le t\}}.$$

et $$\sum_{0<s\le t} L^I(s)\, 1_{\{X_{s^-}=b\}}(X_s-b) = \sum_{S^a<s\le t} K^I(s)\, 1_{\{X_{s^-}=b>X_s\}}(X_s-b)$$

$$- \sum_{n\ge 2} 1_{\{X_{S_n^a-}=b\}}\,(X_{S_n^a}-b)\, 1_{\{S_n^a\le t\}}.$$

la relation (4) peut être réécrite, en tenant compte de cette décomposition et de la définition de $\overline{W}_t^I = \sum_{n\ge 2} 1_{\{b>X_{S_n^a-}\ge a>X_{S_n^a}\}}(a-X_{S_n^a})\, 1_{\{S_n^a\le t\}}$

$$(5)\quad |I|\, U_t^I+\overline{W}_t^I = \int_o^t L^I(s)\, 1_{\{X_{s^-}<b\}}dX_s - \left[K^I(t)(X_t-a) - 1_{\{S^a\le t\}}(X_{S^a}-a)\right]$$

$$- \sum_{n\ge 1} 1_{\{X_{T_n^b-}<b<X_{T_n^b}\}}\,(X_{T_n^b}-b)\, 1_{\{T_n^b\le t\}}$$

$$- \sum_{n\ge 2} 1_{\{X_{S_n^a-}>b>a>X_{S_n^a}\}}\,(b-X_{S_n^a})\, 1_{\{S_n^a\le t\}}$$

$$- (b-a) \sum_{n\ge 2} 1_{\{X_{S_n^a-}\ge b\}}\, 1_{\{S_n^a\le t\}}$$

$$- \sum_{S^a<s\le t} K^I(s)\, 1_{\{X_{s^-}=b>X_s\}}\,(b-X_s)$$

Etape 2 : nous étudions maintenant la limite du membre de droite lorsque a croit vers b.

Remarquons tout d'abord, que comme dans le cas continu, les temps d'arrêt S^a décroissent vers un temps d'arrêt $\tilde{S}^b$, égal à $\inf\{t, X_t < b\}$. Les autres termes du membre de droite seront étudiés dans l'ordre où ils se présentent.

α) L'ensemble $L^I \cap \{X_{s^-} < b\}$ converge p.s. vers l'ensemble $\{X_{s^-} < b, s > \tilde{S}^b\}$ qui n'est autre que l'ensemble $\{X_{s^-} < b\}$, par définition de $\tilde{S}^b$. L'intégrale stochastique $\int_o^t L^I(s)dX_s$ converge donc uniformément en t dans L^p vers $\int_o^t 1_{\{X_{s^-} < b\}}\, dX_s$.

β) Le processus $K^I(t)(X_t-a) + (X_t-b)^-$ s'annule, d'après (2), sur l'ensemble $\{a < X_s \leq b\}^c$.

Il est donc majoré par $(b-a)$, et converge donc uniformément en t p.s et dans L^p vers zéro.

Le processus $(X_{S^a}-a)\, 1_{\{S^a \leq t\}}$ converge uniformément en t p.s et dans L^p vers $(X_{\tilde{S}^b}-b)\, 1_{\{\tilde{S}^b \leq t\}}$ car S^a décroit vers $\tilde{S}^b$.

γ) Comme il est rappelé au début de ce travail, le processus croissant V_t^b égal à $\sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s^-} < b < X_s\}} (X_s-b)$ est à variation p-intégrable.

Les processus croissants $\sum_{S^a < s \leq t} 1_{\{X_{s^-} \leq a < b < X_s\}} (X_s-b)$ convergent donc p.s et dans L^p vers V_t^b.

Or $$\sum_{S^a < s \leq t} 1_{\{X_{s^-} \leq a < b < X_s\}} (X_s-b) = \sum_n 1_{\{X_{T_n^b-} \leq a < b < X_{T_n^b}\}} (X_{T_n^b}-b) 1_{\{T_n^b \leq t\}}$$

$$\leq \sum_n 1_{\{X_{T_n^b-} < b < X_{T_n^b}\}} (X_{T_n^b}-b)\, 1_{(T_n^b \leq t)}$$

$$\leq V_t^b .$$

Ces inégalités montrent que $\sum_n 1_{\{X_{T^b_n-} < b < X_{T^b_n}\}} (X_{T^b_n} - b)\, 1_{\{T^b_n \leq t\}}$

converge uniformément en t, p.s et dans L^p vers $\sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s-} < b < X_s\}} (X_s - b)$.

On établit de la même façon, que le processus croissant

$\sum_{n \geq 2} 1_{\{X_{S^a_n-} > b > a > X_{S^a_n}\}} (b - X_{S^a_n})\, 1_{\{S^a_n \leq t\}}$, ce qui est égal à

$\sum_{S^a < s \leq t} 1_{\{X_{s-} > b > a > X_s\}} (b - X_s)$ converge, uniformément en t, p.s et dans L^p

vers $\sum_{\tilde{S}^b < s \leq t} 1_{\{X_{s-} > b > X_s\}} (b - X_s) = \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s-} > b > X_s\}} (b - X_s)$

$$- 1_{\{X_{\tilde{S}^b-} > b > X_{\tilde{S}^b}\}} (b - X_{\tilde{S}^b})\, 1_{\{\tilde{S}^b \leq t\}}$$

δ) le processus croissant $(b-a) \sum_{n \geq 2} 1_{\{X_{S^a_n-} \geq b > X_{S^a_n}\}} 1_{\{S^a_n \leq t\}}$ est

majoré par le processus à variation p-intégrable $K_t = \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s-} \geq b > X_s\}} (b - X_s)$

et même plus précisément par le processus $\int_0^t 1_{\{X_s \leq a\}} \frac{b-a}{b - X_s}\, dK_s$.

Il converge donc, uniformément en t, p.s et dans L^p vers zéro. On établit de même, en utilisant la p-intégrabilité de $\sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s-} = b > X_s\}} (b - X_s)$ que le processus croissant $\sum_{S^a < s \leq t} (K^I)^c (s)\, 1_{\{X_{s-} = b > X_s\}} (b - X_s)$ qui d'après les inégalités (2) est majoré par $\sum_{\tilde{S}^b < s \leq t} 1_{\{X_{s-} = b > X_s > a\}} (b - X_s)$ converge uniformément en t, p.s et dans L^p vers zéro.

ε) En résumé, nous avons établi la convergence uniforme dans L^p de $|I|\, U^I_t + \overline{W}^I_t$ vers

$$\int_0^t 1_{\{X_{s^-} < b\}} \, dX_s + (X_t - b)^- + (X_{\tilde{S}^b} - b) \, 1_{\{\tilde{S}^b \leq t\}}$$

$$- \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s^-} < b < X_s\}} (X_s - b) - \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s^-} > b > X_s\}} (X_s - b)$$

$$+ 1_{\{X_{\tilde{S}^b_-} > b > X_{\tilde{S}^b}\}} (b - X_{\tilde{S}^b}) \, 1_{\{\tilde{S}^b \leq t\}}$$

$$- \sum_{\tilde{S}^b < s \leq t} 1_{\{X_{s^-} = b > X_s\}} (b - X_s)$$

Regroupons tous les termes en $X_{\tilde{S}^b}$. Il vient :

$$\left[(X_{\tilde{S}^b} - b) + 1_{\{X_{\tilde{S}^b_-} \geq b > X_{\tilde{S}^b}\}} (b - X_{\tilde{S}^b}) \right] 1_{\{\tilde{S}^b \leq t\}}$$

Cette expression est nulle sur l'ensemble $t \geq \tilde{S}^b > 0$. Sur l'ensemble $\{\tilde{S}^b = 0\}$ c.à.d $\{X_0 < b\}$, elle vaut $(X_0 - b)$. La limite dans L^p de $|I| U_t^I + \overline{W}_t^I$ est donc égale à :

$$\int_0^t 1_{\{X_{s^-} < b\}} \, dX_s + (X_t - b)^- - (X_0 - b)^- - \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s^-} < b < X_s\}} (X_s - b)$$

$$- \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s^-} \geq b > X_s\}} (X_s - b)$$

La formule de Tanaka-Meyer (RPG 2ème partie) nous montre que cette expression est égale à $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$.

Remarque 1

La démonstration précédente montre en fait que $|I| U_t^I + \overline{W}_t^I + \int_0^t L^I(s) \, 1_{\{X_{s^-} < b\}} \, dX_s$ converge uniformément en t, p.s vers $\int_0^t 1_{\{X_{s^-} < b\}} \, dX_s + \frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$

Remarque 2

Comme dans le cas continu, nous obtenons en fait une nouvelle démonstration de la formule de Tanaka-Meyer.

Etudions maintenant le cas où b décroit vers a.

PROPOSITION 1.2

Soit X une semi-martingale de $H^p (p \geq 1)$. Lorsque b décroit vers a, $|I| U_t^I + W_t^I$ converge uniformément en t dans L^p vers $\frac{1}{2} L^a(X_t)$, où $L^a(X_t)$ désigne le temps local de X au point a.

Démonstration : nous allons comparer $|I| U_t^I$ aux montées de $-X$ au-dessus de l'intervalle $]-b,-a[$ et appliquer l'étude précédente. Nous introduisons les temps d'arrêt :

$$\bar{T}^b = \inf\{t > 0, X_t \geq b\} \quad \bar{S}_1^a = \inf\{t > \bar{T}^b, X_t \leq a\}$$

$$\bar{T}_n^b = \inf\{t > \bar{S}_{n-1}^a, X_t \geq b\} \; ; \; \bar{S}_n^a = \inf\{t > \bar{S}_n^b, X_t \leq a\} \quad \text{si} \quad n \geq 2$$

Le théorème 1 montre que $\bar{V}_t^I = |I| (\sum_n 1_{\{\bar{S}_n^a \leq t\}})$

$$- \sum_{n \geq 2} 1_{\{a < X_{\bar{T}_n^b -} \leq b\}} (b - X_{\bar{T}_n^b}) \, 1_{\{\bar{T}_n^b \leq t\}}$$

converge uniformément en t vers $\frac{1}{2} L^a(X)_t$. Comparons $\bar{V}_t^I$ et

$V_t^I = |I| \; (\sum_n 1_{\{T_n^b \leq t\}}) - \sum_{n \geq 1} 1_{\{a < X_{T_n^b -} \leq b\}} (b - X_{T_n^b}) \, 1_{\{T_n^b \leq t\}}$. Or sur l'ensemble $\{S^a < \bar{T}^b\}$, $\bar{T}^b = T_1^b$ et $\bar{T}_n^b = T_n^b$, $\bar{S}_n^a = S_{n+1}^a$ si $n \geq 1$.

De même sur l'ensemble $\{S^a > \bar{T}^b\}$, $S^a = \bar{S}_1^a$, et $\bar{T}_n^b = T_{n-1}^b$, $\bar{S}_n^a = S_n^a$ si $n \geq 2$.

Par suite,

$$\bar{V}_t^I - V_t^I = 1_{\{S^a < \bar{T}^b\}} \Big[-(b-a) \, 1_{\{S^a \leq t\}} + (b-a) \sum_{n \geq 1} 1_{\{S_n^a \leq t < T_n^b\}} - 1_{\{a < X_{T_1^b -} \leq b\}} (X_{T_1^b} - b) \; 1_{\{T_1^b \leq t\}} \Big]$$

$$+ 1_{\{\bar{T}^b < S^a\}} (b-a) \sum_{n \geq 1} 1_{\{S_n^a \leq t < T_n^b\}}, \text{ c.à.d.}$$

$$\bar{V}_t^I - V_t^I = (b-a)\, K^I(t) - 1_{\{S^a \leq t \wedge \bar{T}^b\}} (b-a) - 1_{\{S^a \leq \bar{T}^b \leq t\}} 1_{\{a < X_{\bar{T}^b -} \leq b\}} (X_{\bar{T}^b} - b)$$

Les temps d'arrêt $\bar{T}^b$ décroissent vers le temps d'arrêt $\tilde{S}^a = \inf\{t : X_t > a\}$. On a donc $X_{\tilde{S}^a -} \leq a$ sur $\{\tilde{S}^a < +\infty\}$.

Sur l'ensemble $H_1 = \{\omega ; \exists b, \tilde{S}^a(\omega) = \bar{T}^b(\omega)\}$, $1_{\{a < X_{\bar{T}^b -} \leq b\}} (X_{\bar{T}^b} - b)$ est nul.

Sur l'ensemble $H_2 = \{\omega ; \tilde{S}^a(\omega)$ est la limite strictement croissante de $\bar{T}^b(\omega)\}$, $1_{\{a < X_{\bar{T}^b -} \leq b\}} (X_{\bar{T}^b} - b)(\omega)$ tend vers $1_{\{a = X_{\tilde{S}^a}\}} (X_{\tilde{S}^a} - a)(\omega) = 0$. La différence $\bar{V}_t^I - V_t^I$, uniformément bornée en module, converge uniformément en t, p.s et dans L^p vers zéro.

V^I a donc même limite que $\bar{V}^I$ c.à.d. $\frac{1}{2} L_t^a$.

Remarque 3

1) Si le processus croissant $\sum_s 1_{\{X_s < X_{s-}\}} (X_{s-} - X_s)$ est p.s fini, $\bar{W}_\infty^I$ converge p.s. vers zéro.

S'il est à variation p-intégrable, la convergence a lieu aussi dans L^p, et $|I|\, U_t^I$ converge uniformément en t dans L^p vers $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$ si a croit vers b.

2) De même, si $\sum_s 1_{\{X_s > X_{s-}\}} (X_s - X_{s-})$ est à variation p-intégrable, $|I|\, U_t^I$ converge dans L^p vers $\frac{1}{2} L^a(X)_t$ si b décroit vers a.

Nous ne donnerons qu'une petite application du théorème 1.

COROLLAIRE 1.3

Désignons par $\mathcal{F}^{a+}$ la filtration naturelle du processus $(X-a)^+$, dûment complétée et rendue continue à droite. Le processus $L^a(X)$, et donc la semi-martingale $\int_0^t 1_{\{X_{s-} > a\}} dX_s + \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s-} > a > X_s\}} (a - X_s)$ sont $\mathcal{F}^{a+}$-adaptés.

Démonstration : les montées de X au-dessus de l'intervalle $]a,b[$ sont les montées de $(X-a)^+$ au-dessus de l'intervalle $]0,b-a[$, les temps d'arrêt S_n^a et T_n^b sont donc aussi des $\mathcal{F}^{a+}$ temps d'arrêt et les processus U_t^I et W_t^I sont $\mathcal{F}^{a+}$ adaptés.

Il en est donc de même de leur limite $\frac{1}{2} L_t^a$.

Or d'après la formule de Tanaka-Meyer (RPG 2ème partie)

$$(X_t-a)^+ = (X_o-a)^+ + \int_o^t 1_{\{X_{s^-} > a\}}\, dX_s + \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s^-} > a > X_s\}} (a-X_s)$$

$$+ \sum_{0<s\leq t} 1_{\{(X_{s^-}-a)^+ = 0\}}\, 1_{\{0 < (X_s-a)^+\}} (X_s-a)^+ + \frac{1}{2} L^a(X)_t .$$

Le processus $\sum_{0<s\leq t} 1_{\{(X_{s^-}-a)^+ = 0\}}\, 1_{\{0<(X_s-a)^+\}} (X_s-a)^+$ est $\mathcal{F}^{a+}$-adapté.

Il en est **donc** de même de la semi-martingale

$$\int_o^t 1_{\{X_{s^-} > a\}}\, dX_s + \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s^-} > a > X_s\}} (a-X_s) .$$

2 - ÉTUDE DE LA CONVERGENCE EN PROBABILITÉ ET PRESQUE SURE

Dans ce paragraphe, nous nous proposons, en étudiant dans un premier temps, la convergence en probabilité sur tout compact, de ne plus faire intervenir d'hypothèse d'intégrabilité sur la semi-martingale X, en nous ramenant par une transformation simple à une semi-martingale appartenant localement à H^p (pour tout $p \geq 1$).

LEMME 2.1

Soit X une semi-martingale.

La semi-martingale Y, défini par $Y_t = \text{Arctg}\,(X_t-a)$, appartient localement à H^p pour tout $p \geq 1$.

Le nombre de montées de Y au-dessus de l'intervalle $]0,\text{Arctg}\,(b-a)[= \hat{I}$ est égal à U_t^I, nombre de montées de X au-dessus de $]a,b[$. Si $\hat{W}_t^I$ désigne le processus croissant $\sum_{n\geq 1} 1_{\{a < X_{T_n^b -} \leq b\}} \left[\text{Arctg}(X_{T_n^b}-a)-\text{Arctg}(b-a)\right] 1_{\{T_n^b \leq t\}}$,

et W_t^I le processus $\sum_{n\geq 1} 1_{\{a < X_{T_n^b -} \leq b\}} (X_{T_n^b}-b)\, 1_{\{T_n^b \leq t\}}$

$\hat{\hat{W}}_t^I - W_t^I$ converge p.s uniformément en t sur tout compact vers zéro. Le temps local de Y au point 0 est égal à $L^a(X)_t$.

Démonstration :la fonction Arctg est strictement croissante, de classe C^2, à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Y est donc une semi-martingale bornée, appartenant localement à H^p pour tout $p \geq 1$.

Puisque Arctg est strictement croissante, le nombre des montées de Y au-dessus de $]0, \text{Arctg}\ (b-a)[$ est égal à celui de X au-dessus de $]a,b[$.

De plus, $\sup_{t\leq K} \left|\hat{\hat{W}}_t^I - W_t^I\right| \leq \sum_n 1_{\{a < X_{T_n^b -} \leq b\}} (X_{T_n^b}-b)^2\, 1_{\{T_n^b \leq K\}}$,

car la dérivée seconde de Arctg est bornée par 1. On a donc

$\sup_{t\leq K} |\hat{\hat{W}}_t^I - W_t^I| \leq \sum_{s\leq K} 1_{\{a < X_{s-} \leq b\}} (\Delta X_s)^2$. Le processus $\sum_{s\leq K} (\Delta X_s)^2$ est fini, donc le membre de droite converge p.s vers zéro.

D'autre part, la fonction Arctg étant impaire de dérivée égale à 1 en zéro, $|\text{Arctg}\ (X_t-a)| \leq \text{Arctg}|X_t-a|$, ce qui entraîne que le temps local en 0 de Y est égal à celui de X au point a.

THÉORÈME 2.2

Soit X une semi-martingale.

Lorsque a croit vers b (resp. b décroit vers a) le processus croissant $|I|\, U_t^I + \tilde{W}_t^I$ (resp $|I|\, U_t^I + W_t^I$) converge uniformément sur tout compact, en probabilité vers $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$ (resp $\frac{1}{2} L^a(X)_t$).

Démonstration : d'après le lemme 2.1, si nous montrons que $|\hat{I}|\, U_t^I + \hat{\hat{W}}_t^I$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2} L^a(X)_t$, la même propriété sera vraie pour

$|I|\ U_t^I + W_t^I$.

Nous pouvons donc supposer que X appartient localement à H^p $(p \geq 1)$. Soit T_n une suite croissante de temps d'arrêt tendant vers $+\infty$, telle que les semi-martingales X^{T_n} appartiennent à H^p.

Pour tout N, $P\left[\sup_{t \leq N} \left| |I|\ U_t^I + W_t^I - \frac{1}{2} L^a(X)_t \right| > \varepsilon \right]$

$$\leq P(T_n \leq N) + P\left[\sup_{t \leq T_n} \left| |I|\ U_t^I + W_t^I - \frac{1}{2} L^a(X)_t \right| > \varepsilon \right]$$

D'après le théorème 1, le deuxième terme du membre de droite tend vers zéro lorsque b décroit vers a.

Comme T_n tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers zéro lorsque $n \to +\infty$ ce qui entraîne que $|I|\ U_t^I + W_t^I$ converge uniformément sur tout compact en probabilité vers $\frac{1}{2}\ L^a(X)_t$.

Pour obtenir un résultat sur la convergence p.s, nous serons amenés à faire des hypothèses analogues à celles de [3], qui assurent la continuité à droite des temps locaux.

THEOREME 2.3 (1)

Soient X une semi-martingale telle que $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s| < +\infty$ pour tout t et $(\alpha_n)_{n \in N}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe $p \geq 1$ pour lequel la série (α_n^p) est convergente.

Désignons par $U_t^{\alpha_n, b}$ (resp U_t^{a,α_n}) le nombre de montées de X au-dessus de l'intervalle $]b-\alpha_n, b[$ (resp $]a, a+\alpha_n[$).

Le processus croissant $\alpha_n\ U_t^{\alpha_n, b}$ (resp $\alpha_n\ U_t^{a,\alpha_n}$) converge p.s uniformément en t sur tout compact vers $\frac{1}{2}\ L^{-b}(-X)_t$ (resp $\frac{1}{2}\ L^a(X)_t$)

Remarque

Il est établi dans [3] que les hypothèses faites sur X assurent que $L^{-b}(-X)$ est en fait la limite à gauche de $L^{\cdot}(X)$ au point b.

(1) Je remercie M. Yor d'avoir corrigé une erreur dans la première version.

Démonstration : soit $p \geq 1$ telle que la série (α_n^p) soit convergente. D'après le lemme 2.1, il suffit d'établir la propriété pour $|\hat{I}|\ U_t^{\hat{I}} + \hat{W}_t^{\hat{I}}$, c.à.d que nous pouvons ne considérer que des semi-martingales X qui appartiennent localement à H^p. Nous désignons par L^n, l'ensemble L^I associé à l'intervalle $]b-\alpha_n,b[$. D'après la remarque 1 (proposition 1.1) de la première partie, il suffit d'établir que $\int_0^t L^n(s)\ 1_{\{X_{s^-} < b\}}\ dX_s$ converge p.s. vers $\int_0^t 1_{\{X_{s^-} < b\}} dX_s$.
D'après les hypothèses, $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s| < +\infty$ et X appartient localement à H^p, on peut trouver une suite croissante de temps d'arrêt T_n tendant vers $+\infty$, telle que : X^{T_n} se décompose en $X^{T_n} = X_o + N+B$ où N est une martingale continue de H^p et B un processus à variation finie.

L'intégrale stochastique $\int_0^t L^{n,c}(s)\ 1_{\{a_n \leq X_{s^-} < b\}}\ dB_s$ est une intégrale de Stieltjes sur les trajectoires qui converge donc uniformément en t vers zéro, lorsque $a_n = b-\alpha_n$ croit vers a.

Par ailleurs, il est établi dans [3] (inégalité qui généralise celle du cas continu) que

$$E\left(\int_0^\infty 1_{\{a \leq X_{s^-} < b\}}\ d\langle N,N\rangle_s\right)^p \leq (b-a)^p ||X^{T_n}||_{H^p},$$ ce qui entraîne d'après

les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy,

$$E\left(\sup_t \left|\int_0^\infty L^{k,c}(s)\ 1_{\{a_k \leq X_{s^-} < b\}}\ dN_s\right|^{2p}\right) \leq c\ \alpha_k^p\ ||X^{T_n}||_{H^p}.$$

Notons $Z_k^* = \sup_t \left|\int_0^\infty L^{k,c}(s)\ 1_{\{a_k \leq X_{s^-} < b\}}\ dN_s\right|$. La série $E((Z_k^*)^{2p})$ est convergente, donc d'après le lemme de Borel-Cantelli la suite Z_k^* converge p.s vers zéro.

L'intégrale stochastique $\int_0^{t \wedge T_n} L^{k,c}(s)\ 1_{\{X_{s^-} < b\}}\ dX_s$ converge donc p.s uniformément en t vers zéro. La suite T_n tendant vers $+\infty$, ceci entraîne que $\alpha_n\ U_t^{\alpha_n,b} + \vec{W}_t^{]b-\alpha_n,b[}$ converge p.s uniformément en t sur tout compact vers $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$.

Or nous avons vu (remarque 3, proposition I.2) que si $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s| < +\infty$, $\underline{W}^{]b-\alpha_n, b[}$ tend vers zéro, p.s. uniformément en t sur tout compact. Ceci établit le théorème.

RÉFÉRENCES

(1) Rappels et préliminaires généraux (dans ce volume)

(2) Ch. YOEURP : Compléments sur les temps locaux et les quasi-martingales (dans ce volume)

(3) M. YOR : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales (dans ce volume).