

# *Astérisque*

A. MARIN

## **Présentation du groupe de difféotopies d'une surface compacte orientable**

*Astérisque*, tome 66-67 (1979), p. 267-282

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_66-67\\_\\_267\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__267_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PRÉSENTATION DU GROUPE DE DIFFÉOTOPIES  
D'UNE SURFACE COMPACTE ORIENTABLE

(Une démonstration d'un théorème de A. Hatcher et W. Thurston)

par F. LAUDENBACH <sup>\*</sup>  
(exposé oral de A. MARIN)

- § 1. - Introduction
- § 2. - Méthode pour présenter  $G$
- § 3. - Le complexe cellulaire des fonctions marquées
- § 4. - Le complexe des marquages

§ 1. - INTRODUCTION

Soient  $M$  une surface compacte fermée <sup>(\*\*)</sup> de genre  $n$  et  $G$  le groupe de difféotopies de  $M$  (les éléments de  $G$  sont les classes d'isotopie de difféomorphismes de  $M$  conservant l'orientation). Soit  $C$  une courbe simple de  $M$  à  $n$  composantes ; on dira que  $C$  est un marquage de  $M$ , si  $M - C$  est connexe ; puisque  $n$  est le genre de  $M$ , la variété compacte à bord obtenue en coupant  $M$  le long de  $C$  est le disque  $\Delta$  à  $(2n - 1)$  trous. Le groupe  $G$  agit transitivement à droite sur l'ensemble des classes d'isotopie de marquages par :

$$C \longrightarrow \varphi^{-1}(C) ,$$

où  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $M$ . Choisissons un marquage de base  $C_0$  et désignons par  $H$  le sous-groupe de  $G$  stabilisateur de  $C_0$ . Le groupe  $H$  est de présentation finie : celle-ci se calcule en termes du groupe des tresses pures à  $(2n - 1)$  brins,

---

\* Je remercie A. Marin pour son exposé oral et pour les éclaircissements qu'il m'a apportés sur le travail de Hatcher et Thurston.

\*\* Le cas à bord peut se traiter de façon analogue.

du groupe des permutations des composantes de  $C_0$ , des "twists" de Dehn le long de chacune de ces courbes.

A. Hatcher et W. Thurston [2] ont donné une présentation de  $G$  modulo  $H$  ; précisément, ils ont construit un élément  $\sigma$  de  $G$  et des mots  $\mu_1, \dots, \mu_q$  dont les lettres appartiennent à  $\{\sigma^k ; k \in \mathbb{Z}\} \cap H$  ayant les propriétés suivantes :

1°  $H$  et  $\sigma$  engendrent  $G$  ;

2° pour  $i = 1, \dots, q$ , l'élément  $m_i$  de  $G$ , représenté par  $\mu_i$ , appartient à  $H$  ;

3° les mots  $\mu_i m_i^{-1}$  engendrent les relations de  $G$ , c'est-à-dire engendrent comme sous-groupe invariant le noyau du morphisme naturel  $H \times \mathbb{Z} \rightarrow G$  associé à  $\sigma$ .

En fait, même si on connaît une présentation de  $H$ , ceci dit seulement qu'il existe une présentation de  $G$ , mais n'en donne une que si l'on sait calculer les  $m_i$ . Il est vrai que les mots  $\mu_i$  sont donnés par des constructions géométriques simples et qu'un difféomorphisme de  $\Delta$  est entièrement déterminé à isotopie près si l'on dit ce qu'il fait sur quelques arcs. On pourra donc toujours, avec du courage, rendre explicites les "relations implicites" de Hatcher-Thurston.

Bien que l'exposé oral de A. Marin rapportât fidèlement sur ce travail, il semble inopportun de mimer un article à paraître. On tente ici de rendre un peu plus conceptuels les arguments de Hatcher-Thurston ; on verra par exemple dans la preuve du lemme 1, § 4, un fait géométrique particulier à la dimension 2 qui contribue de façon essentielle à la finitude. Pour simplifier, nous avons choisi de n'explicitier aucune présentation de  $G$ , sauf le cas du tore.

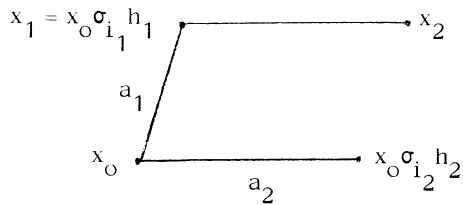
## § 2. - UNE MÉTHODE POUR PRÉSENTER $G$

2.1. Soit  $X$  un complexe polyédral 1-connexe de dimension 2 (pouvant être non localement fini), dans lequel chaque arête ou face est déterminée par ses sommets. Soient  $x_0$  un sommet de base,  $A$  (resp.  $F$ ) l'ensemble des arêtes (resp. faces) passant

par  $x_0$ . On suppose que le groupe  $G$  agit cellulièrement à droite sur  $X$ , que  $G$  agit transitivement sur le 0-squelette  $X^{[0]}$  et que  $H$  est le stabilisateur de  $x_0$  ; alors  $H$  agit à droite sur  $A$  et  $F$ . On suppose  $A/H$  et  $F/H$  finis et on note  $a_1, \dots, a_p, f_1, \dots, f_q$  des représentants de chaque orbite.

GÉNÉRATEURS

On choisit  $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in G$  tels que les extrémités de  $a_i$  soient  $(x_0, x_0 \sigma_i)$ . Alors les extrémités de toute arête s'écrivent  $(x_0 g, x_0 \sigma_i h g)$ ,  $g \in G, h \in H$ . Donc un mot  $\sigma_{i_k} h_k \dots \sigma_{i_1} h_1$  décrit un chemin d'arêtes partant de  $x_0$  et passant successivement par  $x_1 = x_0 \sigma_{i_1} h_1, x_2 = x_0 \sigma_{i_2} h_2 \sigma_{i_1} h_1, \dots$  (voir Figure 1).



$(x_1$  et  $x_2$  sont joints par  $a_2 \cdot \sigma_{i_1} h_1)$

Figure 1

Tout chemin d'arêtes a une telle description. De la connexité de  $X$  découle alors que  $\sigma_1, \dots, \sigma_p$  et  $H$  engendrent  $G$ . Noter qu'un mot représente un lacet si et seulement si le produit des lettres appartient à  $H$ .

RELATIONS

1) Aller-retour : en exprimant que  $(x_0, x_0 \sigma_i, x_0)$  est un lacet, on obtient une relation ; ou encore, il existe un entier  $j \in [1, p]$  et  $h \in H$  tels que :

$$\sigma_j h \sigma_i \in H .$$

2) Différentes écritures de la même arête : il faut calculer le stabilisateur  $T_i$  de l'arête  $(x_0, x_0 \sigma_i)$  et, pour chaque  $t \in T_i$ , exprimer

$$(x_0, x_0 \sigma_i) t = (x_0, x_0 \sigma_i)$$

c'est-à-dire

$$\sigma_i t \sigma_i^{-1} \in H .$$

3) Le bord de chaque face  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , indique une relation.

Pour voir qu'on obtient ainsi une présentation de  $G$  modulo  $H$  au sens du § 1, il suffit de se rappeler que toute homotopie à zéro d'un lacet d'arêtes de  $X$  est formée des opérations élémentaires suivantes : insertion ou suppression du bord d'une face ou d'un aller-retour. On a donc démontré :

PROPOSITION. Si  $H$  est de présentation finie et si les stabilisateurs des arêtes sont de type fini, alors  $G$  est de présentation finie.

2. 2. L'objectif maintenant est de trouver un  $X$  sur lequel agisse le groupe de difféotopies. Le premier auquel on pense est le nerf  $N$  de l'espace des fonctions  $C^\infty$  numériques (de codimension  $\leq 2$ ), muni de sa stratification naturelle [ 1 ] ;  $N$  est 1-connexe, mais  $G$  n'agit pas transitivement sur  $N^{-0}$ . On peut penser à ne garder des strates de codimension 1 que celles qui correspondent à des croisements essentiels (voir § 3.1) ; on trouve alors un nerf 1-connexe sur les sommets duquel  $G$  agit transitivement, mais le stabilisateur d'un sommet est plus gros que  $H$  et semble difficile à étudier. Nous allons néanmoins utiliser ces idées pour faire apparaître l'ensemble des classes d'isotopie de marquages comme 0-squelette d'un complexe qui tirera sa 1-connexité de celle de  $N$ . A cet égard, le lemme ci-dessous est utile.

2. 3. Si  $Y$  et  $Z$  sont deux complexes connexes, on dira que  $\pi : Y \rightarrow Z$  est cellulaire dans le cas suivant :

- 1) pour chaque cellule  $\sigma$  de  $Y$ ,  $\pi(\sigma)$  est une cellule de  $Z$  ;
- 2)  $\pi|_{\text{int } \sigma}$  est une fibration sur son image (int  $\sigma$  désigne la cellule ouverte).

Par exemple, si  $\sigma$  est une 2-cellule, ou bien  $\pi(\sigma)$  est un point ; ou bien  $\pi(\sigma)$  est une arête et  $\partial\sigma$  est réunion de quatre lignes brisées  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ , avec  $\pi(\tau_1) = 1$  point,  $\pi(\tau_3) = 1$  point,  $\pi(\tau_2) = \pi(\sigma) = \pi(\tau_4)$  ; ou bien  $\pi(\sigma)$  est une 2-cellule et  $\pi|_{\partial\sigma}$  est de degré 1 sur son image. On obtient alors très facilement :

LEMME. Soit  $\pi : Y \rightarrow Z$  une application cellulaire au sens ci-dessus. On suppose que

- 1) pour tout  $x \in Z^{[2]} - Z^{[1]}$ ,  $\pi^{-1}(x)$  est non vide ;
- 2) pour tout  $x \in Z^{[1]} - Z^{[0]}$ ,  $\pi^{-1}(x)$  est connexe ;
- 3) pour tout  $x \in Z^{[0]}$ ,  $\pi^{-1}(x)$  est 1 -connexe.

Alors  $\pi_1(Z) = 0$  entraîne  $\pi_1(Y) = 0$ .

La réciproque est vraie dès que  $\pi^{-1}(x)$  est connexe pour tout  $x \in Z^{[0]}$  et que  $\pi$  est surjectif sur le 1-squelette.

### § 3. - LE COMPLEXE CELLULAIRE DES FONCTIONS MARQUÉES

3. 1. On considère l'espace  $\mathfrak{F}$  des fonctions  $C^\infty$  sur  $M$ , de codimension  $\leq 2$  pour l'action  $\text{Diff } M \times \text{Diff } \mathbb{R}$ , et le nerf  $N$  de  $\mathfrak{F}$  stratifié par les orbites.  $G$  agit à droite par la formule :  $f \mapsto f \circ \varphi$ , où  $f \in \mathfrak{F}$ ,  $\varphi \in \text{Diff } M$ .

Deux fonctions sont dites isotopes si elles sont dans la même orbite de la composante neutre de ce groupe.

A toute fonction  $f \in \mathfrak{F}$ , on peut associer son graphe (des niveaux)  $\Gamma(f)$  : la projection  $M \rightarrow \Gamma(f)$  identifie deux points chaque fois qu'ils appartiennent à la même composante d'un niveau de  $f$  ;  $\Gamma(f)$  est un complexe de dimension 1. Si  $f$  est

générique, le nombre de Betti  $\beta_1(\Gamma(f))$  est égal au genre  $n$  de  $M$ . Si  $f$  est de codimension 1 et si  $\beta_1(\Gamma(f)) = n - 1$ , on dit que  $f$  appartient à une strate de croisement essentiel. La figure 2 présente le niveau critique du croisement ainsi que les deux niveaux voisins ; la figure 3 présente les graphes des fonctions d'un chemin de traversée de la strate.

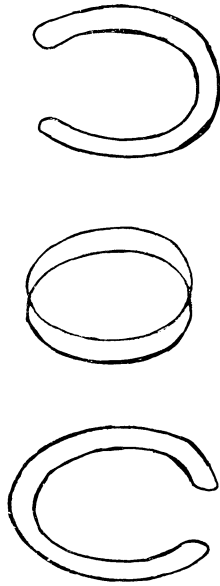


Figure 2

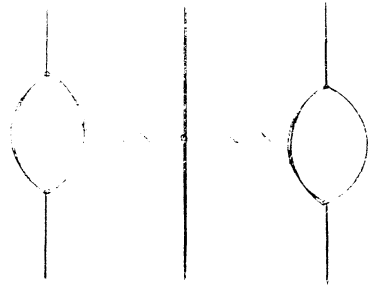


Figure 3

Une arête de  $N$ , duale d'une strate de croisement essentiel, est dite de 1ère espèce. Les autres arêtes sont de 2e espèce. Une face de  $N$  est dite principale si elle est duale d'une strate d'égalité de 3 valeurs critiques adhérente à 3 strates de croisement essentiel ; une telle face est un hexagone avec en alternance 3 arêtes de 1ère espèce et 3 arêtes de 2e espèce. Les figure 4, 5 et 6 présentent respectivement les niveaux (immergés) d'une fonction de codimension 2 "principale", la stratification du déploiement et le graphe de l'une quelconque des fonctions génériques voisines.

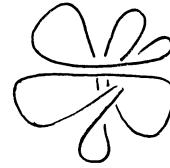
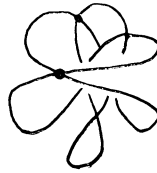
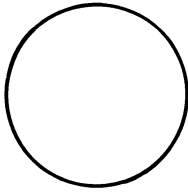
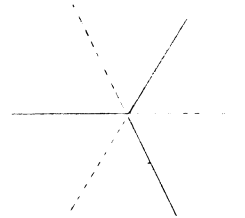


Figure 4



Figure 6



— = croisement essentiel  
 - - - = croisement de 2e espèce

Figure 5

3. 2. On dit que  $(f, C)$  est une fonction marquée, si  $C$  est un marquage de  $M$  dont chaque composante est dans un niveau de  $f$ . Chaque composante du marquage désigne une arête de  $\Gamma(f)$  et le complémentaire de ces arêtes (ouvertes) est un sous-arbre maximal. Toute fonction générique admet un marquage, mais une fonction de codimension 1 ou 2 adhérente à une strate de croisement essentiel n'admet qu'un marquage incomplet ( $n-1$  composantes).

Par exemple, si  $f$  appartient à une strate de croisement essentiel, on peut marquer  $f$  par des courbes simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  ; si on marque des fonctions génériques voisines  $f'$  et  $f''$ , de part et d'autre de la strate, par  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha')$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha'')$  respectivement, alors l'intersection minimale de  $\alpha'$  et  $\alpha''$  est un point.

On met sur les fonctions marquées la relation d'isotopie suivante :  $(f, C)$  est isotope à  $(f', C')$  si  $f$  est isotope à  $f'$  et  $C$  isotope à  $C'$ . [Cette relation est



moins fine que la relation d'isotopie de paires]. Le complexe cellulaire  $Y$  des fonctions marquées est construit avec l'ensemble des classes d'isotopie de fonctions marquées pour 0-squelette. On a une projection :

$$\pi : Y^{[0]} \longrightarrow N^{[0]}$$

par oubli du marquage. La fibre au-dessus de  $[f] \in N^{[0]}$  est formée de tous les marquages, à isotopie près, de  $f$ .

LEMME. Il existe une borne indépendante de  $f$  pour la cardinalité de  $Y^{[0]} \cap \pi^{-1}([f])$ .

Preuve : Le graphe  $\Gamma(f)$  "collapse" sur un sous-graphe réduit (incompressible)  $\Gamma_{\text{red}}(f)$ . Le nombre de marquages, à isotopie près de  $f$ , coïncide avec le nombre de marquages de  $\Gamma_{\text{red}}(f)$  ; en effet, si deux marquages  $C_1$  et  $C_2$  de  $f$  marquent  $\Gamma(f)$  de part et d'autre du pied d'un arbre collapsible (voir Figure 7), alors  $C_1$  et  $C_2$  sont isotopes.

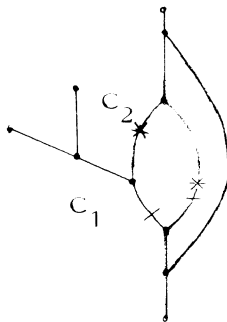


Figure 7

Le lemme résulte alors du fait que, le nombre de Betti étant fixé, à isomorphisme PL près, il n'y a qu'un nombre fini de graphes réduits.  $\square$

Remarquons que ce lemme n'est pas vrai si on munit les fonctions marquées de la relation d'isotopie fine.

Le groupe  $G$  agit à droite sur  $Y^{[0]}$  par  $(f, C) \rightarrow (f\phi, \phi^{-1}(C))$ . Cette action n'est pas transitive. La projection  $\pi$  est équivariante.

3. 3. Le 1-squelette.

Arête de 1ère espèce : Soient  $y_0$  et  $y_1$  deux sommets de  $Y$  représentés par  $(f_0, C_0)$  et  $(f_1, C_1)$ , où  $C_0$  et  $C_1$  ont  $(n-1)$  composantes communes. A toute arête de 1ère espèce de  $N$  joignant  $[f_0]$  à  $[f_1]$ , (unique si elle existe) <sup>\*</sup>, on associe une arête dite de 1ère espèce de  $y_0$  à  $y_1$ .

Observer que si une telle arête existe, nécessairement le marquage incomplet commun à  $C_0$  et  $C_1$  marque la fonction de codimension 1 du croisement essentiel ; les composantes distinctes se coupent en un point.

Arête de 2e espèce : Soient  $(f_0, C)$  et  $(f_1, C)$  deux sommets ayant le même marquage. Soit  $f_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , un chemin représentant une arête  $\tau$  de deuxième espèce dans  $N$ . Si, à isotopie près,  $C$  est un marquage de  $f_t$  pour tout  $t$ , on relève  $\tau$  en une arête, dite de 2e espèce, de  $(f_0, C)$  à  $(f_1, C)$ .

Arête de 3e espèce : On joint par une arête, dite de 3e espèce, chaque paire de sommets distincts de  $\pi^{-1}([f])$ .

La projection  $\pi$  et l'action de  $G$  s'étendent naturellement à  $Y^{[1]}$ .

3. 4. Le 2-squelette.

Face du type I : Par examen des modèles géométriques associés à chaque strate de codimension 2 de l'espace des fonctions (voir [1]), on vérifie que, pour chaque face  $\sigma^1$  de  $N$ , il existe un lacet  $\gamma$  de  $Y^{[1]}$  tel que  $\pi|_\gamma$  soit un isomorphisme de  $\gamma$  sur  $\partial\sigma^1$ .

---

(\*) S'il y avait deux arêtes de 1ère espèce de  $[f_0]$  à  $[f_1]$ , on aurait pour  $f_1$  deux marquages  $C_1$  et  $C_1^1$  tels que  $i(C_1, C_1^1) \neq 0$ , ce qui est absurde (ici  $i(.,.)$  est l'intersection au sens de Thurston ; voir exposé 4). Pour voir cela, on utilise la classification des croisements de valeurs critiques, due à J. Cerf [1].

Cette remarque étant faite, on choisit une face  $\sigma'$  dans chaque classe modulo  $G$  ; on choisit un relèvement  $\gamma$  de  $\partial\sigma'$  vérifiant la condition précédente ; on attache à  $\gamma$  une 2-cellule  $\sigma$  et on sature par l'action de  $G$ .

Noter que la condition 1) du lemme 2.3 est assurée.

Face du type II : Soit  $\tau$  et  $\tau'$  deux arêtes de  $Y$  relevant la même arête de 1ère ou 2e espèce de  $N$ . En joignant leurs extrémités dans les fibres de  $\pi$ , on forme un carré ou un triangle, sur lequel on attache une face  $\sigma$ . On étend  $\pi$  à  $\sigma$ , à valeurs dans  $\pi(\tau) = \pi(\tau')$ , de sorte que  $\pi$  soit cellulaire.

La condition 2) du lemme est maintenant assurée.

Face du type III : A tout triangle d'une fibre de  $\pi$ , on attache une face ; façon brutale de rendre 1-connexes les fibres  $\pi^{-1}([\tilde{f}])$  pour tout  $[\tilde{f}] \in N^{\tilde{0}}$ .

Finalement, on a construit  $Y$ , qui est 1-connexe d'après le lemme 2.3, et sur lequel  $G$  agit cellulièrement.

Remarque. On aurait pu économiser des arêtes de 3e espèce et, par conséquent, des faces des types II et III ; dans ce langage, Hatcher et Thurston n'auraient mis une arête entre  $(f, C_0)$  et  $(f, C_1)$  que si  $C_0$  et  $C_1$  ont  $(n-1)$  composantes communes. L'avantage de leur système restreint est d'obtenir des relations dans  $G$  qui sont toutes portées par une surface de genre 2 trouée.

#### § 4. - LE COMPLEXE DES MARQUAGES

4. 1. Construction. Le 0-squelette  $X^{[0]}$  est formé des classes d'isotopie de marquages de  $M$ . On a une projection équivariante

$$P : Y^{[0]} \longrightarrow X^{[0]}$$

par oubli de la fonction. Rappelons que le groupe  $G$  agit transitivement sur  $X^{-0}$  avec  $H$  pour stabilisateur.

Deux marquages distincts  $C_0$  et  $C_1$  sont joints par une arête dès qu'il existe des fonctions marquées  $(f_0, C_0)$  et  $(f_1, C_1)$  jointes par une arête de  $Y^{-1}$ . L'action de  $G$  s'étend à  $X^{-1}$  et la projection  $P$  se prolonge équivariante à  $Y^{-1}$ . Par exemple, si  $(f_0, C)$  et  $(f_1, C)$  sont liées par une arête (nécessairement de 2e espèce), sa projection est réduite à un point.

On attache une 2-cellule  $\sigma$  à un lacet  $\gamma$  de  $X^{-1}$  s'il existe un lacet  $\tilde{\gamma}$  de  $Y^{-1}$  tel que :

- 1)  $\tilde{\gamma} = \partial\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\sigma} \in Y^{-2}$ ,
- 2)  $P$  est de degré 1 de  $\tilde{\gamma}$  sur  $\gamma$ .

Il est alors facile de prolonger  $P$  en un homéomorphisme  $\text{int } \tilde{\sigma} \rightarrow \text{int } \sigma$ . D'autre part,  $G$  agit sur  $X$ .

En examinant les types des faces, on voit tout de suite que, pour chaque face  $\sigma$  de  $Y$ , ou bien  $P(\partial\sigma)$  est un arête ou un point, ou bien  $P(\partial\sigma)$  est une boucle dans  $X^{-1}$  et  $P|_{\partial\sigma}$  est de degré 1 sur son image (c'est par exemple le cas pour les relèvements dans  $Y$  des faces principales de  $N$ ). Il est alors immédiat de prolonger  $P$  à  $Y$ .

La projection  $\pi$  identifie injectivement  $P^{-1}([C])$  au nerf d'un ouvert convexe de l'espace des fonctions, à savoir l'ouvert des fonctions qui admettent  $C$  pour marquage. Par conséquent  $P^{-1}([C])$  est sûrement connexe (même 1-connexe). Ainsi  $X$  est 1-connexe (Lemme 2.3).

#### 4. 2. Finitude.

Soit  $C_0$  un marquage de base.

**LEMME 1** Soit  $f$  une fonction marquée par  $C_0$ . Les cellules de  $Y$  passant par  $(f, C_0)$  se projettent sur un ensemble fini modulo  $H$  de cellules de  $X$ .

Preuve : Soit  $G_f$  le stabilisateur de  $\pi(f, C_0) = [f]$ . On démontre en fait un lemme plus fort, où on considère toutes les cellules rencontrant  $\pi^{-1}([f])$  et où on remplace  $H$  par le sous-groupe  $G_f \cap H$ .

D'après le lemme 3.2, il n'y a qu'un nombre fini, uniformément borné, de cellules de  $Y$  au-dessus d'une cellule de  $N$  ; d'ailleurs, appliqué aux 0-cellules, cela dit que  $G_f \cap H$  est d'indice fini dans  $G_f$ . Le lemme est donc réduit à l'affirmation que, dans  $N$ , il n'y a qu'un nombre fini de cellules passant par  $f$  modulo  $G_f$ .

Ce fait ne correspond pas à une propriété générale de la stratification de l'espace des fonctions sur une variété. En dimension 2, il suffit de le prouver pour les arêtes de croisement (valeurs critiques doubles) et les faces de valeurs critiques triples ; car les cellules passant par  $[f]$ , qui sont duales de singularités "à la source", sont, elles, en nombre fini. Le fait, qui lui est général, c'est qu'une cellule duale d'une strate d'égalité de deux ou trois valeurs critiques est déterminée par un système de nappes adaptées à  $f$  (voir [1]). Mais justement, pour les surfaces, les "twists" de Dehn le long de courbes de niveau de  $f$  représentent des éléments de  $G_f$  et agissent sur les systèmes de nappes adaptées à  $f$ , transitivement à un ensemble fini près.  $\square$

Définitions. J'appelle "petite boucle" un lacet de  $\Gamma(f)$  non homotope à zéro et ne passant que par deux points de branchement.

Si  $m$  est un maximum (resp. un minimum) de  $f$ , je note  $d(m)$  le nombre minimal d'arêtes que l'on parcourt pour descendre (resp. monter) du sommet de  $\Gamma(f)$ , correspondant à  $m$ , jusqu'à une "petite boucle" ; si celle-ci n'existe pas,  $d(m)$  n'est pas défini.

Une fonction est dite minimale si elle ne possède qu'un maximum et un minimum.

Une fonction de Morse  $f$ , à valeurs critiques distinctes, est dite presque-minimale dans l'un des cas suivants :

- a) si  $\Gamma(f)$  ne possède pas de "petite boucle", alors  $f$  est minimale ;
- b) si  $\Gamma(f)$  possède au moins une "petite boucle", alors, pour tout extremum non absolu

$m$ , on a  $d(m) \leq 2$ .

Remarquons que les graphes des fonctions presque-minimales forment un ensemble fini. Les fonctions presque-minimales sont importantes parce que, en général, par une fonction minimale il ne passe pas de face principale de  $N$ .

LEMME 2. Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isotopie de fonctions presque-minimales marquées par  $C_0$ .

Preuve. A partir d'une fonction minimale, on ne peut faire naître qu'un nombre fini de paires de points critiques si l'on veut rester dans l'espace des fonctions presque-minimales ; à isotopie près, il n'y a qu'un nombre fini de choix possibles pour chaque naissance. Comme toute fonction presque-minimale est obtenue par ce procédé à partir d'une fonction minimale, il suffit de prouver le lemme pour les fonctions minimales. En fait, on va prouver que si, en plus du marquage, on se donne le graphe, muni de sa fonction hauteur, et la position du marquage sur ce graphe, alors la fonction est déterminée à isotopie près.

Pour cela, il s'agit de placer les courbes en huit de niveau critique dans le disque  $\Delta$ , qui est obtenu en coupant  $M$  le long du marquage. Or le graphe marqué indique quels sont les trous de  $\Delta$  entourés par chaque boucle du huit. Donc, en partant du niveau le plus bas, les courbes de niveau critique se placent les unes après les autres, de façon unique à isotopie près. A partir de là, le lemme est clair.  $\square$

Si  $f$ , marquée par  $C_0$ , n'est pas presque-minimale,  $\Gamma(f)$  contient une arête  $\alpha$  avec une extrémité libre  $m$  telle que  $d(m)$  soit ou bien non défini ou bien  $> 2$ . Collapser  $\alpha$  revient à faire l'élimination d'une paire de points critiques de  $f$ . Soit  $f'$  l'extrémité de ce chemin.

LEMME 3. Pour toute cellule  $\sigma$  de  $Y$  passant par  $(f, C_0)$ , il existe une cellule  $\sigma'$  passant par  $(f', C_0)$  telle que  $P(\sigma) = P(\sigma')$ .

Comme corollaire immédiat de ces trois lemmes, on obtient que par  $C_0$  ne passent qu'un nombre fini de cellules de  $X$  modulo  $H$ .

Preuve du lemme 3. Puisque l'arête qui est collapsée, lorsqu'on passe de  $f$  à  $f'$ , se trouve loin des "petites boucles", l'élimination est indépendante de tous les croisements essentiels ou changements de marquage que l'on peut faire à partir de  $(f, C_0)$ . A partir de là, le lemme est clair. Noter que si  $\sigma$  fait jouer la selle correspondant au point de branchement de  $\alpha$ , alors  $\dim P(\sigma) < \dim \sigma$  et on prend  $\sigma'$  avec  $\dim \sigma' = \dim P(\sigma)$ .  $\square$

THÉORÈME. Le groupe  $G$  de difféotopies d'une surface est de présentation finie.

Preuve : Pour appliquer la proposition 2.1, il reste à prouver que les stabilisateurs des arêtes sont de type fini.

Soient  $C_0$  et  $C_1$  deux marquages de  $M$  que l'on choisit dans leurs classes d'isotopie avec un nombre minimal de points d'intersection. Soient  $H_0$  et  $H_1$  les stabilisateurs de  $[C_0]$  et  $[C_1]$  dans  $X$ . Si les deux sommets sont joints par une arête,  $H_0 \cap H_1$  est le stabilisateur de l'arête. D'après prop. 12 (exp. 3), ce groupe s'identifie aux composantes connexes du groupe des difféomorphismes de  $M$  laissant  $C_0$  et  $C_1$  invariants. A des permutations près, il s'agit du groupe des difféomorphismes d'un certain disque troué, qui est donc de type fini.  $\square$

#### 4.3. Le cas du tore $T^2$ .

On a ici la simplification qu'une fonction n'admet qu'un seul marquage à isotopie près. Donc :

$$Y \cong N.$$

D'après les lemmes de 4.2, on obtient les classes de cellules passant par  $[C_0]$  dans  $X$  de la façon suivante : on considère une fonction marquée  $(f_0, C_0)$ , presque minimale, c'est-à-dire dont le graphe  $\Gamma(f_0)$  a l'allure de la figure 8 ; on considère

un croisement essentiel issu de  $f_0$  (unique modulo  $G_{f_0}$ ) que l'on détermine en choisissant une courbe  $C_1$  coupant  $C_0$  en un point ; on considère une face principale passant par cette arête que l'on détermine en choisissant une courbe  $C_2$  telle que  $C_1 \cap C_2 = 1 \text{ pt}$  et  $C_0 \cap C_2 = 1 \text{ pt}$ . Dans le cas particulier du tore, il se trouve que,  $C_0$  et  $C_1$  étant fixés, il y a exactement deux possibilités pour  $C_2$  à isotopie près (Figure 9), notée respectivement  $C_2^I$  et  $C_2^{II}$ . Donc modulo  $H$ ,  $X$  possède en  $[C_0]$  une arête  $(C_0, C_1)$  et deux triangles  $(C_0, C_1, C_2^I)$ ,  $(C_0, C_1, C_2^{II})$ .



Figure 8

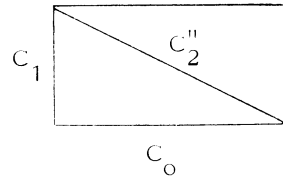
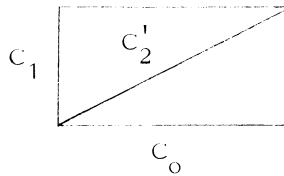


Figure 9

On note  $\sigma$  la rotation de  $90^\circ$  dans les axes du tore où  $C_0$  et  $C_1$  coïncident avec chacun des axes :

$$(1) \quad \begin{aligned} C_1 &= C_0 \sigma, \\ \sigma^2 &\in H. \end{aligned}$$

Soit  $\rho$  le twist parallèle à  $C_0$ , tel que :  $C_2^I = C_1 \rho$ .

Alors, on a :  $C_2^{II} = C_1 \rho^{-1}$ . Enfin, la géométrie du tore donne que l'arête  $(C_1, C_2^I)$  est transformée par  $\sigma$  de  $(C_0, C_2^{II})$ . Donc le chemin  $(C_0, C_1, C_2^I)$  est décrit par le mot  $\sigma \rho^{-1} \sigma$ , alors que l'arête  $(C_0, C_2^I)$  est décrite par  $\sigma \rho$ . D'où la relation :

$$(2) \quad \sigma \rho^{-1} \sigma \rho^{-1} \sigma \in H.$$

On voit immédiatement que l'autre cellule donne :

$$(3) \quad \sigma \rho \sigma \rho \sigma \in H.$$

Mais (3) résulte de (2) et (1). Enfin le stabilisateur d'une arête est trivial ; donc



on a écrit un système complet de relations modulo  $H$ . Pour déterminer complètement la relation (2), on calcule l'effet de l'élément écrit sur  $C_1$  ; il transporte  $C_1$  sur  $C_2'$  ; donc  $(\sigma \rho^{-1})^3$  stabilise l'arête  $(C_0, C_1)$ . D'où :

$$(\sigma \rho^{-1})^3 = 1 .$$

Enfin,  $H$  est engendré par  $\rho$  et  $\sigma^2$ , avec la relation de commutation  $[\sigma^2, \rho] = 1$ .

□

Remarque finale. Dans [3], McCool a donné une preuve purement algébrique du théorème. Dans [4], Joan Birman, qui a été la première à donner une présentation explicite dans le cas d'une surface de genre 2, signale qu'il paraît difficile d'exhiber une présentation à partir de la démonstration de McCool.

D'autre part, il y a une approche par la géométrie algébrique (voir [5]).

### RÉFÉRENCES

- [1] J. CERF, La stratification naturelle de l'espace des fonctions différentiables réelles et le problème de la pseudo-isotopie, Publ. Math. I.H.E.S. 39 (1970), p. 5-173.
- [2] A. HATCHER and W. THURSTON, A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface, à paraître.
- [3] J. MCCOOL, Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group, J. Algebra 35 (1975), p. 205-213.
- [4] J. BIRMAN, The algebraic structure of surface mapping class groups, in Discrete groups and automorphic functions, edited by W. Harvey, Acad. Press, 1977.
- [5] A. MARDEN, Geometrically finite kleinian groups, ouvrage collectif édité par W. Harvey, déjà cité.