JEAN-PIERRE SERRE

Appendice II : Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs

Astérisque, tome 69-70 (1979), p. 191-202

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__69-70__191_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 69-70 (1979) p. 191-202

Appendice II

Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs

par

Jean-Pierre SERRE

Soit G un groupe algébrique commutatif connexe sur un corps k de caractéristique 0. Dans les pages qui précèdent, M.Waldschmidt et D.Bertrand utilisent les propriétés suivantes du groupe G :

1) existence d'une compactification projective lisse ;

2) croissance au plus quadratique de la fonction hauteur, lorsque k est algébrique sur $\mathbf{Q}$;

3) uniformisation par des fonctions entières d'ordre ≤ 2, lorsque $k = \mathbf{C}$.

Ce sont ces propriétés que je me propose de démontrer. La méthode suivie, inspirée de Severi [Sev] et Weil [We 1], consiste à se ramener, par une fibration convenable, aux deux cas particuliers déjà connus : celui où G est un groupe linéaire, et celui où G est une variété abélienne.

§ 1. Compactification de G

1.1. Le groupe L

On sait ([Ba 1], [Ros 1]) que G possède un plus grand sous-groupe linéaire connexe L. Le groupe L se décompose en $L = L_u \times L_m$, où L_u est unipotent et L_m est de type multiplicatif. Pour simplifier, nous supposerons (*) que L_m est déployé sur k, i.e. produit de groupes isomorphes au groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ (on peut toujours se ramener à ce cas par extension finie du corps de base). Comme L_u est produit de groupes isomorphes au groupe additif $\mathbf{G}_a$ (loc.cit.), on peut écrire L comme un produit

$$L = \prod_{\alpha} L_{\alpha} ,$$

(*) On pourrait se débarrasser de cette hypothèse en utilisant les compactifications de L_m construites par J-L.Brylinski (C.R.A.S., 288, 1979, p. 137-139).

où les L_α sont égaux à $\mathbf{G}_a$ ou à $\mathbf{G}_m$. Dans ce qui suit, nous choisirons une telle décomposition.

1.2. Compactification de L

Soit $\bar{L}_\alpha$ l'unique courbe lisse, complète et connexe contenant L_α . On peut identifier $\bar{L}_\alpha$ à la droite projective P_1 ; on a

$$\bar{L}_\alpha - L_\alpha = \{\infty\} \text{ si } L_\alpha = \mathbf{G}_a \quad \text{et} \quad \bar{L}_\alpha - L_\alpha = \{0, \infty\} \text{ si } L_\alpha = \mathbf{G}_m .$$

Nous choisirons pour compactification de L le produit

$$\bar{L} = \prod_\alpha \bar{L}_\alpha .$$

Soit $L^\infty = \bar{L} - L$; on a :

$$L^\infty = \bigcup_\alpha L_\alpha^\infty \ , \quad \text{où } L_\alpha^\infty = \{\bar{L}_\alpha - L_\alpha\} \times \prod_{\beta \neq \alpha} \bar{L}_\beta .$$

(Noter que $\bar{L}$ et L^∞ dépendent de la décomposition $L = \prod L_\alpha$ choisie.)

1.3. Construction de $\bar{G}$

Soit $A = G/L$. Le groupe A est une variété abélienne, et la projection canonique $p : G \to A$ fait de G un espace fibré principal localement trivial, de base A et de groupe structural L (cf. [Ros 1]). Or la loi de composition $L \times L \to L$ se prolonge en $L \times \bar{L} \to \bar{L}$, autrement dit définit une action de L sur $\bar{L}$. On peut donc parler de l'espace fibré $\bar{G} = G \times^L \bar{L}$ associé à l'espace fibré principal G, et de fibre type $\bar{L}$. (Si G s'obtient en "recollant" des $U_i \times L$, où les U_i sont des ouverts de A, $\bar{G}$ s'obtient en recollant les $U_i \times \bar{L}$.) Nous noterons encore par p la projection de l'espace fibré $\bar{G}$ sur sa base A. Comme A et $\bar{L}$ sont complètes et lisses, il en est de même de $\bar{G}$. De plus, l'injection $L \to \bar{L}$ définit un plongement de G dans $\bar{G}$ qui identifie G à un ouvert dense de $\bar{G}$; ainsi, $\bar{G}$ est une compactification lisse de G.

La loi de composition $G \times G \to G$ se prolonge en $G \times \bar{G} \to \bar{G}$, autrement dit définit une action de G sur $\bar{G}$; cela résulte de la propriété analogue pour L et $\bar{L}$. En particulier, tout champ de vecteurs invariant sur G se prolonge à $\bar{G}$; si U est un ouvert affine de $\bar{G}$, un tel champ définit une dérivation de l'algèbre affine de U.

1.4. Diviseurs et plongements projectifs de $\bar{G}$

Chacun des L_α^∞ définit une sous-variété $G_\alpha^\infty = G \times^L L_\alpha^\infty$ de $\bar{G}$. Si l'on pose $G^\infty = \bigcup_\alpha G_\alpha^\infty$, on a $G^\infty = \bar{G} - G$; c'est la sous-variété "à l'infini" de $\bar{G}$. Chacune des composantes irréductibles des G_α^∞ et de G^∞ est de codimension 1 ; cela permet d'identifier les G_α^∞ et G^∞ à des diviseurs positifs de $\bar{G}$.

Soit d'autre part D un diviseur de A, et soit $\tilde{D} = p^*(D)$ son image réciproque par $p : \bar{G} \to A$. Si a et b sont des entiers, notons $D_{a,b}$ le diviseur $a\tilde{D} + bG^{\infty}$.

PROPOSITION 1 - <u>Supposons</u> D <u>ample</u>. <u>Il existe alors des entiers</u> $a \geqq 1$ <u>et</u> $b \geqq 1$ <u>tels que le diviseur</u> $D_{a,b} = a\tilde{D} + bG^{\infty}$ <u>de</u> $\bar{G}$ <u>soit ample</u>.

Il est clair que L^{∞} est un diviseur ample (et même très ample) de $\bar{L}$. Comme $G^{\infty} = G \times^{L} L^{\infty}$, il en résulte que G^{∞} est <u>relativement ample</u> vis-à-vis de $p : \bar{G} \to A$, au sens de Grothendieck, EGA II.4.6. La prop.1 s'en déduit en appliquant EGA II.4.6.13.(ii).

COROLLAIRE - <u>Il existe des entiers</u> $a \geqq 1$ <u>et</u> $b \geqq 1$ <u>tels que</u> $D_{a,b}$ <u>soit très ample, et que le plongement projectif de</u> $\bar{G}$ <u>défini par la série linéaire complète</u> $|D_{a,b}|$ <u>transforme</u> $\bar{G}$ <u>en une variété projectivement normale</u>.

Si (a,b) est un couple d'entiers satisfaisant aux conditions de la prop.1, tout multiple assez grand de (a,b) a les propriétés énoncées dans le corollaire ; cela se voit en appliquant des résultats standard sur les diviseurs amples et très amples, cf. [H], chap.II, §§ 5,6,7 et exerc.5.14.

<u>Remarques</u>

1) On peut préciser la prop.1, et prouver que $D_{a,b}$ est ample (resp. très ample) pour <u>tout</u> couple (a,b) tel que $a \geqq 1$ (resp. $a \geqq 3$) et $b \geqq 1$.

2) Soit $E_{a,b}$ le fibré de rang 1 associé au diviseur $D_{a,b}$ et soit $S_{a,b} = H^{0}(\bar{G}, E_{a,b})$ l'espace des sections de ce fibré. (Un élément de $S_{a,b}$ peut être identifié à une fonction rationnelle f sur $\bar{G}$ telle que $(f) \geqq - D_{a,b}$.) Soit $\{X_0,\dots,X_N\}$ une base de $S_{a,b}$. Le cor. à la prop.1 revient à dire que l'on peut choisir $a \geqq 1$ et $b \geqq 1$ tels que :

(i) les sections $(X_0,\dots,X_N)$ ne s'annulent simultanément en aucun point de $\bar{G}$;

(ii) si $\mathbf{P}_N$ est l'espace projectif de dimension N, le morphisme $X : \bar{G} \to \mathbf{P}_N$ défini par $(X_0,\dots,X_N)$ est un plongement ;

(iii) pour qu'un diviseur positif Φ de $\bar{G}$ soit linéairement équivalent à $m D_{a,b}$ (avec $m \geqq 1$), il faut et il suffit qu'il existe un polynôme homogène $\varphi(X_0,\dots,X_N)$ de degré m, non identiquement nul sur $\bar{G}$, dont le diviseur des zéros soit Φ. (Autrement dit, pour tout $m \geqq 1$, les hypersurfaces de degré m de $\mathbf{P}_N$ découpent sur $\bar{G}$ la série linéaire <u>complète</u> $|m D_{a,b}|$.)

1.5. <u>Une propriété des endomorphismes</u> $[n]_G$

Soit n un entier $\neq 0$. Notons $[n]_G$ (resp. $[n]_A$, $[n]_L$) l'endomorphisme $x \mapsto nx$ de G (resp. A, L).

PROPOSITION 2 - Les morphismes $[n]_L : L \to L$ et $[n]_G : G \to G$ se prolongent en des morphismes

$$[n]_L : \bar{L} \to \bar{L} \quad \text{et} \quad [n]_G : \bar{G} \to \bar{G} .$$

L'assertion relative à L se vérifie aussitôt sur la décomposition $\bar{L} = \prod \bar{L}_\alpha$. Celle relative à G se ramène à la précédente grâce à la fibration de $\bar{G}$ sur A de fibre $\bar{L}$.

La proposition suivante indique quelle est l'image réciproque par $[n]_G : \bar{G} \to \bar{G}$ des diviseurs G^∞_α et $\tilde{D}$ définis au n° 1.4.

PROPOSITION 3 - (a) Si $L_\alpha = \mathbf{G}_a$, on a $[n]^*_G(G^\infty_\alpha) = G^\infty_\alpha$.

(b) Si $L_\alpha = \mathbf{G}_m$, on a $[n]^*_G(G^\infty_\alpha) = |n|\, G^\infty_\alpha$.

(c) Soit D un diviseur de A dont la classe d'équivalence soit symétrique (i.e. invariante par $x \mapsto -x$). On a les équivalences linéaires suivantes :

$$[n]^*_A(D) \sim n^2 D \quad \text{et} \quad [n]^*_G(\tilde{D}) \sim n^2 \tilde{D}.$$

Les assertions (a) et (b) se ramènent, grâce à la fibration de $\bar{G}$, aux assertions analogues pour $\bar{L}$, lesquelles se vérifient par calcul direct. En ce qui concerne (c), la formule relative à $[n]_A$ est bien connue ([Mu], p.59, cor.3), et celle relative à $[n]_G$ s'en déduit en appliquant p^* aux deux membres.

Soient a et b des entiers. Posons, comme au n° 1.4 :

$$D_{a,b} = a\tilde{D} + b\, G^\infty = a\tilde{D} + b \sum_\alpha G^\infty_\alpha .$$

COROLLAIRE 1 - On a

$$[n]^*_G(D_{a,b}) \sim n^2 D_{a,b} - b\, Z_n ,$$

où Z_n est un diviseur positif de $\bar{G}$ à support contenu dans G^∞.

D'après la prop.3, on a

$$[n]^*_G(D_{a,b}) \sim n^2 a\tilde{D} + b \sum_\alpha c_{\alpha,n}\, G^\infty_\alpha ,$$

où $c_{\alpha,n}$ est égal à 1 si $L_\alpha = \mathbf{G}_a$, et à $|n|$ si $L_\alpha = \mathbf{G}_m$. Le corollaire en résulte, en posant

$$Z_n = \sum_\alpha (n^2 - c_{\alpha,n})\, G^\infty_\alpha .$$

Supposons maintenant maintenant que D soit ample, que les entiers a et b soient ≥ 1, et que les propriétés (i), (ii), (iii) de la Remarque 2) du n°1.4 soient satisfaites. Identifions $\bar{G}$ à une sous-variété de P_N grâce à $X = (X_0, \ldots, X_N)$. Sous ces hypothèses, on a :

COROLLAIRE 2 - Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe $N+1$ polynômes

$$\varphi_o^{(n)}(X_o,\ldots,X_N) \;,\ldots,\; \varphi_N^{(n)}(X_o,\ldots,X_N) \;,$$

homogènes de degré n^2, à coefficients dans k, ne s'annulant simultanément en aucun point de G, et tels que, pour tout point $x=(x_o,\ldots,x_N)$ de G, on ait

$$(*) \qquad [n]_G(x) = (\varphi_o^{(n)}(x),\ldots,\varphi_N^{(n)}(x)) \;.$$

Cela se déduit sans difficulté du cor.1. Indiquons rapidement comment. Soit H_i le diviseur de $\bar{G}$ découpé par l'hyperplan $X_i = 0$ de $\mathbf{P}_N$, et soit $H_{i,n} = [n]_G^*(H_i)$ son image réciproque par $[n]_G$. D'après le cor.1, on a

$$H_{i,n} + b\,Z_n \sim n^2 D_{a,b} \;.$$

Vu la propriété (iii), il existe un polynôme homogène $\varphi_i^{(n)}(X)$ de degré n^2 dont le diviseur des zéros est $H_{i,n} + b\,Z_n$. Quitte à multiplier les $\varphi_i^{(n)}$ par des scalaires, on peut s'arranger pour que, pour tout couple (i,j), la fonction rationnelle $\varphi_i^{(n)} / \varphi_j^{(n)}$ soit l'image réciproque de la fonction X_i / X_j par $[n]_G$. On constate alors que les $\varphi_i^{(n)}$ répondent à la question.

Remarque. Lorsque $|n| \geq 2$, le support de Z_n est égal à G^∞, et les $\varphi_i^{(n)}(X)$ sont tous nuls sur G^∞. Cela montre que la formule $(*)$ ne s'étend pas aux points de G^∞.

§ 2. Hauteurs

Dans ce §, on suppose k algébrique sur $\mathbf{Q}$.

2.1. Rappels

Si $x \in \mathbf{P}_N(k)$ est un point rationnel de l'espace projectif $\mathbf{P}_N$, on note $h(x)$ la hauteur logarithmique normalisée de x (cf. par exemple Waldschmidt, I, 1.d) ; c'est un nombre réel ≥ 0, invariant par extension des scalaires. Si V est une k-variété, et si $\varphi : V \to \mathbf{P}_N$ est un morphisme de V dans $\mathbf{P}_N$, on note

$$h_\varphi : V(k) \to \mathbf{R}_+$$

la fonction définie par $h_\varphi(x) = h(\varphi(x))$.

Supposons V projective. Deux fonctions réelles f et f' sur $V(k)$ sont dites équivalentes (ce que l'on écrit $f \sim f'$) si $|f - f'|$ est bornée. A tout diviseur de Cartier Δ de V, on peut attacher une fonction $h_\Delta : V(k) \to \mathbf{R}$, définie à équivalence près (au sens ci-dessus), et caractérisée par les propriétés :

(i) h_Δ ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de Δ ;

(ii) $h_\Delta + h_{\Delta'} \sim h_{\Delta+\Delta'}$;

(iii) Si $\varphi : V \to \mathbf{P}_N$ est un morphisme, et si Δ est l'image réciproque par φ d'un hyperplan de $\mathbf{P}_N$, on a

$$h_\varphi \sim h_\Delta \ .$$

2.2. <u>Hauteur sur</u> $\bar{G}$ <u>relativement à</u> $D_{a,b}$

On revient aux notations du § 1 . En particulier, on choisit un diviseur ample D de $A = G/L$ dont la classe d'équivalence soit symétrique (cf. prop.3) et l'on choisit des entiers $a,b \geqq 1$ tels que le diviseur $D_{a,b} = a\tilde{D} + bG^\infty$ soit très ample. On note

$$\varphi : \bar{G} \to \mathbf{P}_N$$

un plongement projectif de $\bar{G}$ correspondant à la série linéaire $|D_{a,b}|$, cf. n°1.4. On s'intéresse à la <u>fonction hauteur</u> h_φ relative à φ . Puisque $D_{a,b} = a\tilde{D} + bG^\infty$, on a

$$h_\varphi \sim a h_{\tilde{D}} + b h_{G^\infty}$$

et l'on est ramené à étudier les deux fonctions $h_{\tilde{D}}$ et h_{G^∞} .

(1) <u>La fonction</u> $h_{\tilde{D}}$

On a $\tilde{D} = p^*(D)$, où p désigne la projection de $\bar{G}$ sur A. Il en résulte que $h_{\tilde{D}} \sim h_D \circ p$, où h_D est la fonction hauteur sur A relativement au diviseur D. D'après Néron [N 1] on peut choisir h_D dans sa classe d'équivalence de telle sorte que ce soit une <u>forme quadratique</u> sur le groupe $A(k)$, et ce choix est unique. On a $h_D(x) = 0$ si $x \in A(k)$ est d'ordre fini, et $h_D(x) > 0$ sinon. Quitte à remplacer $h_{\tilde{D}}$ par une fonction équivalente, on peut supposer que $h_{\tilde{D}} = h_D \circ p$, et l'on voit alors que $h_{\tilde{D}}$ est une <u>forme quadratique</u> sur $G(k)$, à valeurs $\geqq 0$, invariante par translation par $L(k)$.

(2) <u>La fonction</u> h_{G^∞}

Cette fonction est "presque" invariante par translation :

LEMME 1 - <u>Pour tout</u> $x_o \in G(k)$, <u>les fonctions</u>

$$x \mapsto h_{G^\infty}(x) \qquad \underline{\text{et}} \qquad x \mapsto h_{G^\infty}(x + x_o)$$

<u>sont équivalentes.</u>

Soit f l'automorphisme $x \mapsto x + x_o$ de la variété G. On a vu au n° 1.3 que f se prolonge en un automorphisme de $\bar{G}$, et l'on a $f^*(G^\infty) = G^\infty$. Il en résulte que

$$h_{G^\infty} \circ f \sim h_{G^\infty} ,$$

d'où le lemme.

LEMME 2 - Soient $x_1,\dots,x_m$ des éléments de $G(k)$. Il existe des nombres réels A et B tels que

$$|h_{G^\infty}(n_1x_1+\dots+n_mx_m)| \leq A+B\sum|n_i| \quad \text{pour tout} \quad (n_i)\in \mathbf{Z}^m.$$

Le lemme 1 montre qu'il existe $B_i \in \mathbf{R}$ tel que

$$|h_{G^\infty}(x+x_i)-h_{G^\infty}(x)| \leq B_i \qquad \text{pour tout} \quad x\in G(k)$$

On prend alors $A = h_{G^\infty}(0)$ et $B = \sup B_i$. L'inégalité cherchée se démontre immédiatement par récurrence sur $\sum|n_i|$.

Soit Γ un sous-groupe de type fini de $G(k)$. On peut exprimer le lemme 2 en disant que h_{G^∞} a une croissance au plus linéaire sur Γ. Comme $h_{\tilde{D}}$ est quadratique, on en déduit :

PROPOSITION 4 - Sur Γ, la fonction hauteur h_φ est somme de la forme quadratique $a\,h_{\tilde{D}}$ (déduite de la forme de Néron h_D sur $A(k)$) et d'une fonction à croissance au plus linéaire.

2.3. Hauteur sur G : cas général

PROPOSITION 5 - Soit $\psi : G \to \mathbf{P}_M$ un morphisme de G dans un espace projectif, et soient $x_1,\dots,x_m$ des éléments de $G(k)$. Il existe des nombres réels A et C tels que

$$h_\psi(n_1x_1+\dots+n_mx_m) \leq A + C\left(\sum|n_i|\right)^2 \qquad \text{pour tout} \qquad (n_i)\in\mathbf{Z}^m.$$

(En d'autres termes, la croissance de h_ψ sur le sous-groupe Γ engendré par les x_i est au plus quadratique.)

C'est vrai lorsque ψ est le plongement φ du n° 2.2, d'après la prop. 4. Le cas général résulte de là, et du lemme élémentaire suivant (dont la vérification est laissée au lecteur) :

LEMME 3 - Soit V une variété algébrique. Soient

$$\varphi : V \to \mathbf{P}_N \qquad \text{et} \qquad \psi : V \to \mathbf{P}_M$$

des morphismes de V dans des espaces projectifs. Supposons que φ soit un plongement (de sorte que V s'identifie à une sous-variété localement fermée de $\mathbf{P}_N$). Il existe alors $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$ tels que

$$h_\psi \leq \lambda + \mu\, h_\varphi \qquad \text{sur} \quad V(k).$$

Autrement dit, on a $h_\psi = \underline{O}(h_\varphi)$.

§ 3. Application exponentielle et uniformisation

Dans ce §, le corps de base est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

3.1. Exponentielle

Soit $t(G)$ l'algèbre de Lie de G, autrement dit l'espace tangent à G en l'élément neutre ; c'est un espace vectoriel complexe de dimension égale à $\dim G$. Nous noterons

$$\exp_G : t(G) \to G(\mathbf{C})$$

l'application exponentielle de G (Bourbaki, LIE III § 6) ; rappelons que l'on peut caractériser $\exp_G$ par les deux propriétés suivantes :

a) c'est un homomorphisme de groupes de Lie complexes ;

b) son application tangente à l'élément neutre est l'identité.

Puisque G est connexe pour la topologie de Zariski, $G(\mathbf{C})$ est connexe pour la topologie usuelle. Il en résulte que $\exp_G$ est surjective ; si l'on note Ω_G son noyau ("groupe des périodes" de G), on obtient un isomorphisme de groupes de Lie complexes

$$t(G)/\Omega_G \simeq G(\mathbf{C}).$$

Soit f une fonction rationnelle sur G. On peut identifier f à une fonction méromorphe sur $G(\mathbf{C})$ (et même sur $\bar{G}(\mathbf{C})$). La fonction $F = f \circ \exp_G$ est une fonction méromorphe sur $t(G)$ invariante par Ω_G ; nous verrons plus loin (n°3.5) que F est d'ordre strict ≤ 2.

3.2. Préliminaires : algèbre affine de L

Nous utiliserons pour L, L_α, A, ... des notations

$$t(L),\ t(L_\alpha),\ t(A), \ldots$$

$$\exp_L,\ \exp_{L_\alpha},\ \exp_A, \ldots$$

$$\Omega_L,\ \Omega_{L_\alpha},\ \Omega_A, \ldots$$

analogues à celles définies ci-dessus pour G. Comme L_α est, soit $\mathbf{G}_a$, soit $\mathbf{G}_m$, son algèbre de Lie $t(L_\alpha)$ s'identifie à $\mathbf{C}$; nous noterons e_α la base canonique de $t(L_\alpha)$; on a

$$\exp_{L_\alpha}(ze_\alpha) = \begin{cases} z \in \mathbf{G}_a(\mathbf{C}) = \mathbf{C} & \text{si} \quad L_\alpha = \mathbf{G}_a \\ e^z \in \mathbf{G}_m(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^* & \text{si} \quad L_\alpha = \mathbf{G}_m . \end{cases}$$

Le groupe des périodes de L_α est réduit à 0 si $L_\alpha = \mathbf{G}_a$, et c'est l'ensemble des multiples entiers de $(2\pi i)e_\alpha$ si $L_\alpha = \mathbf{G}_m$.

Comme L est produit des L_α, $t(L)$ est somme directe des $t(L_\alpha)$, donc a pour base la famille des e_α. Si $z \in t(L)$, on notera z_α ses coordonnées par rapport à cette base ; on a

$$z = \sum_{\alpha} z_\alpha e_\alpha .$$

Soit Λ_L l'algèbre affine de L. L'application $f \mapsto f \circ \exp_L$ identifie Λ_L à la sous-algèbre de l'algèbre des fonctions holomorphes sur $t(L)$ engendrée par les z_α (pour $L_\alpha = \mathbf{G}_a$) et les e^{z_α} et les e^{-z_α} (pour $L_\alpha = \mathbf{G}_m$).

Base de Λ_L

Soit N_L l'ensemble des familles $n = (n_\alpha)$, où n_α est un entier $\geqq 0$ si $L_\alpha = \mathbf{G}_a$ et un entier de signe quelconque si $L_\alpha = \mathbf{G}_m$. Si $n = (n_\alpha)$ appartient à N_L, posons

$$|n| = \operatorname{Sup} |n_\alpha|$$

et

$$e_n(z) = \prod_{L_\alpha = \mathbf{G}_a} z_\alpha^{n_\alpha} \prod_{L_\alpha = \mathbf{G}_m} e^{n_\alpha z_\alpha} .$$

Les fonctions $e_n(z)$, $n \in L$, forment une base de l'algèbre affine Λ_L.

Pôles

Soit $f \in \Lambda_L$. On peut considérer f comme une fonction rationnelle sur la variété projective L, n'ayant pas de pôle en dehors de L^∞, cf. n°1.2. Si b est un entier $\geqq 0$, on a

$$(f) \geqq - b L^\infty$$

si et seulement si f est combinaison linéaire des $e_n(z)$ avec $|n| \leqq b$.

3.3. Préliminaires : périodes

Puisque $A = G/L$, on a $t(A) = t(G)/t(L)$ et $\Omega_A = \Omega_G / \Omega_L$.

Choisissons un supplémentaire de $t(L)$ dans $t(G)$. Cela nous permet d'identifier $t(G)$ à $t(L) \oplus t(A)$, et d'écrire tout élément t de $t(G)$ comme un couple :

$$t = (z,u) \quad \text{avec} \quad z \in t(L) \quad \text{et} \quad u \in t(A).$$

L'image de Ω_G par la projection $t \mapsto u$ est Ω_A. Choisissons un sous-groupe $\widetilde{\Omega}_A$ de Ω_G qui se projette isomorphiquement sur Ω_A (c'est possible, puisque Ω_A est libre sur Z). On a

$$\Omega_G = \widetilde{\Omega}_A \oplus \Omega_L$$

et l'on sait (cf.n°3.2) que Ω_L admet pour base les $(2\pi i)e_\alpha$ pour $L_\alpha = \mathbf{G}_m$. Si $\omega \in \Omega_A$, nous noterons $\widetilde{\omega}$ son image réciproque dans $\widetilde{\Omega}_A$. On a

$$\widetilde{\omega} = (\eta_\omega, \omega) \quad \text{avec} \quad \eta_\omega \in t(L).$$

L'application $\omega \mapsto \eta_\omega$ est un $\mathbf{Z}$-homomorphisme de Ω_A dans $t(L)$. Une fonction $F = F(z,u)$ sur $t(G)$ est invariante par $\widetilde{\Omega}_A$ si et seulement si

$$F(z+\eta_\omega\,,\; u+\omega) = F(z,u) \qquad \text{pour tout} \quad \omega \in \Omega_A\,.$$

Pour qu'une telle fonction soit invariante par Ω_G il faut et il suffit qu'elle soit invariante par Ω_L, i.e. qu'elle soit invariante par $z \mapsto z_\alpha + 2\pi i$ (pour $L_\alpha = G_m$).

3.4. Croissance de certaines fonctions

Revenons à la situation du § 1, et choisissons un diviseur positif et ample D de A. On sait (cf. [We 2]) qu'il existe une fonction thêta sur $t(A)$ dont le diviseur est l'image réciproque de D par $\exp_A$. Soit $\theta = \theta(u)$ une telle fonction. On a

$$\theta(u+\omega) = \theta(u)e^{E(u,\omega)} \qquad (u \in t(A),\ \omega \in \Omega_A)\,.$$

Nous n'aurons pas besoin de la forme explicite de $E(u,\omega)$, mais seulement de sa croissance à l'infini :

$$|E(u,\omega)| = \underline{O}(1+|u|^2+|\omega|^2).$$

Soient a et b des entiers $\geqq 1$. Soit $D_{a,b} = a\widetilde{D} + b\,G^\infty$ le diviseur de $\bar{G}$ défini au n° 1.4. Notons $S_{a,b}$ l'espace vectoriel des fonctions rationnelles f sur $\bar{G}$ telles que $(f) \geqq -D_{a,b}$. Si $f \in S_{a,b}$, notons $F = F(z,u)$ la fonction $f \circ \exp_G$ sur $t(G) = t(L) \oplus t(A)$, et posons :

$$\widetilde{F}(z,u) = \theta(u)^a F(z,u)\,.$$

Il est clair que $\widetilde{F}$ est holomorphe. De plus :

PROPOSITION 7 - La fonction $\widetilde{F}$ est d'ordre strict $\leqq 2$.

Remarquons d'abord que, pour tout $u \in t(A)$, la fonction $z \mapsto \widetilde{F}(z,u)$ appartient à l'algèbre affine de L, et que son diviseur est $\geqq -b\,L^\infty$. D'après le n°3.2, on peut donc écrire cette fonction sous la forme

$$\widetilde{F}(z,u) = \sum_{|n|\leqq b} e_n(z)\,\psi_n(u)\,,$$

avec $\psi_n(u) \in \mathbf{C}$. Le fait que $\widetilde{F}(z,u)$ soit holomorphe en u entraîne, par un argument standard, qu'il en est de même des ψ_n ; en particulier, les ψ_n sont bornés sur tout compact. Ce fait, joint à la croissance au plus exponentielle des $e_n(z)$, entraîne que, pour tout compact K de $t(A)$, il existe une constante C_K telle que

$$|\widetilde{F}(z,u)| \leqq \exp\{C_K(1+|z|)\} \qquad \text{pour} \quad u \in K,$$

autrement dit

$$|\widetilde{F}(z,u)| \leqq \exp\{\underline{O}(1+|z|)\} \qquad \text{pour} \quad u \in K.$$

Choisissons K de telle sorte que $K + \Omega_A = t(A)$: c'est possible puisque $t(A)/\Omega_A \simeq A(\mathbf{C})$ est compact. Pour tout $u \in t(A)$ il existe $\omega \in \Omega_A$ tel que $u+\omega \in K$. On a

$$|\omega| = |u| + \underline{O}(1)\,.$$

Puisque F est invariante par Ω_G, on a

$$F(z+\eta_\omega, u+\omega) = F(z,u)$$

d'où

$$\tilde{F}(z+\eta_\omega, u+\omega) = \tilde{F}(z,u)\ \exp\{a\,E(u,\omega)\},$$

ou encore

$$\tilde{F}(z,u) = \tilde{F}(z+\eta_\omega, u+\omega)\ \exp\{-a\,E(u,\omega)\}.$$

On a vu que

$$|E(u,\omega)| = \underline{O}(1+|u|^2+|\omega|^2) = \underline{O}(1+|u|^2).$$

D'autre part, puisque $u+\omega$ appartient à K, et que $|\eta_\omega| = \underline{O}(|\omega|)$, on a

$$|\tilde{F}(z+\eta_\omega, u+\omega)| \leq \exp\{\underline{O}(1+|z|+|u|)\}.$$

En combinant ces deux majorations, on en déduit :

$$|\tilde{F}(z,u)| \leq \exp\{\underline{O}(1+|z|+|u|^2)\},$$

ce qui montre bien que $\tilde{F}$ est d'ordre ≤ 2 au sens strict.

Remarque

Ecrivons $\tilde{F}(z,u)$, comme ci-dessus, sous la forme

$$\tilde{F}(z,u) = \sum_{|n|\leq b} e_n(z)\,\psi_n(u).$$

La prop.7 équivaut à dire que les fonctions $\psi_n(u)$ sont d'ordre strict ≤ 2. Il devrait être possible (en suivant [Sev]) de préciser ce résultat, et de prouver que ces fonctions s'expriment algébriquement au moyen de dérivées itérées de fonctions thêta.

3.5. Application

Supposons les entiers a et b choisis de telle sorte que $D_{a,b}$ soit très ample, ce qui est possible d'après le cor. à la prop. 1. Soit $\{f_o,\dots,f_N\}$ une base de l'espace vectoriel $S_{a,b}$, et soit φ le plongement de $\bar{G}$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}_N$ défini par les f_i. Posons, comme ci-dessus :

$$F_i(z,u) = f_i \circ \exp_G$$

et

$$\tilde{F}_i(z,u) = \theta(u)^a F_i(z,u).$$

D'après la prop.7, les $\tilde{F}_i$ sont des fonctions holomorphes d'ordre strict ≤ 2. De plus :

PROPOSITION 8 - (i) Les fonctions $(\tilde{F}_o,\dots,\tilde{F}_N)$ ne s'annulent simultanément en aucun point de $t(G)$.

(ii) L'application $\Phi : t(G) \to \mathbf{P}_N$ définie par les $(\tilde{F}_i)$ est égale à $\varphi \circ \exp_G$.

Soit $t \in t(G)$, et soit $x = \exp_G(t) \in G(\mathbf{C})$. Puisque $D_{a,b}$ est très ample, il existe un indice i tel que le diviseur

$$(f_i) + D_{a,b} = (f_i) + a\widetilde{D} + b\,G^{\infty}$$

ne passe pas par x. Comme l'image réciproque de ce diviseur par $\exp_G$ est égale au diviseur de $\widetilde{F}_i$, ce dernier ne passe pas par t. On a donc $\widetilde{F}_i(t) \neq 0$, ce qui démontre (i). L'assertion (ii) résulte de ce que $\widetilde{F}_i / \widetilde{F}_j = F_i / F_j = f_i / f_j \circ \exp_G$.

COROLLAIRE 1 - L'application Φ définit par passage au quotient un isomorphisme de $G(\mathbf{C}) = t(G) / \Omega_G$ sur une sous-variété localement fermée de $\mathbf{P}_N$.

C'est clair.

COROLLAIRE 2 - Soit f une fonction rationnelle sur G. On peut écrire $f \circ \exp_G$ sous la forme

$$f \circ \exp_G = R(\widetilde{F}_o,\ldots,\widetilde{F}_N) / S(\widetilde{F}_o,\ldots,\widetilde{F}_N)$$

où R et S sont des polynômes homogènes de même degré tels que $S(\widetilde{F}_o,\ldots,\widetilde{F}_N)$ ne soit pas identiquement nul.

En effet, il suffit de choisir R et S tels que

$$f = R(f_o,\ldots,f_N) / S(f_o,\ldots,f_N) ,$$

ce qui est possible puisque φ est un plongement de $\bar{G}$ dans $\mathbf{P}_N$.

COROLLAIRE 3 - Si f est une fonction rationnelle sur G, la fonction $f \circ \exp_G$ est une fonction méromorphe d'ordre strict ≤ 2.

Cela résulte du cor.2 et du fait que les $\widetilde{F}_i$ sont d'ordre strict ≤ 2.

RÉFÉRENCES

[Ba 1] BARSOTTI, I. - Structure theorems for group varieties, Annali di Mat., 38 (1955), 77-119.

[H] HARTSHORNE, R. - Algebraic Geometry, GTM 52, Springer-Verlag, 1977.

[Mu] MUMFORD, D. - Abelian Varieties, Oxford Univ.Press, 1970.

[N 1] NÉRON, A. - Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes, Ann. of Math., 82 (1965), 249-331.

[Ros 1] ROSENLICHT, M. - Some basic theorems on algebraic groups, Amer.J.Math., 78 (1956), 401-443.

[Sev] SEVERI, F. - Funzioni Quasi Abeliane, Pont. Acad.Sc., Vatican, 1947.

[We 1] WEIL, A. - Variétés abéliennes, Colloque d'Algèbre et Théorie des Nombres, C.N.R.S. (1949), 125-128.

[We 2] WEIL, A. - Introduction à l'étude des variétés kählériennes, Hermann, 1958.