L. A. S. KIRBY

# La méthode des indicatrices et le théorème d'incomplètude

*Astérisque*, tome 73 (1980), p. 5-18
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__5_0>

EXPOSÉ 1

# LA MÉTHODE DES INDICATRICES ET LE THÉORÈME d'INCOMPLÈTUDE

L.A.S. Kirby

## I. PRÉLIMINAIRES

Le langage de l'arithmétique est celui du calcul des prédicats du premier ordre avec égalité ayant deux symboles de fonction binaire, $+$ et $.$ , pour l'addition et la multiplication, un symbole de fonction unaire, S, pour le successeur et un symbole de constante 0, pour le zéro. Dans toute la suite sauf indication au contraire, "terme" ou "formule" voudront dire terme ou formule de ce langage; "théorie" signifiera une théorie non-contradictoire ou consistante de ce langage. Pour toute formule $\Phi$ on conviendra que l'écriture $\Phi(v_1,\dots,v_k)$ signifie que les variables libres de $\Phi$ sont comprises parmi $v_1,\dots,v_k$ . Les axiomes de Péano du premier ordre sont composés des axiomes pour les fonctions primitives

$$\forall v(Sv \neq 0)$$
$$\forall u \quad \forall v(u \neq v \rightarrow Su \neq Sv)$$

$$\forall u(u+0 = u)$$
$$\forall u \quad \forall v(u+Sv) = S(u+v)$$

$$\forall u(u.0 = 0)$$
$$\forall u \quad \forall v(u.Sv = u.v+u)$$

et le schéma d'induction : pour toute formule $\Theta(x,v_1,\dots,v_n)$

$$\forall v_1 \dots \forall v_n [[\Theta(0,v_1,\dots,v_n) \wedge \forall x [\Theta(x,v_1,\dots,v_n) \rightarrow \Theta(Sx,v_1,\dots,v_n)]] \rightarrow \forall x \quad \Theta(x,v_1,\dots,v_n)]$$

Nous notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des conséquences de ces axiomes.

Par un modèle ou structure pour le langage de l'arithmétique nous comprenons la donnée d'un ensemble non-vide M, d'un élément distingué $0^M \in M$, de fonctions binaires $+^M$ et $.^M$ de $M^2$ dans M et une fonction unaire $S^M$ de M dans M.

Pour alléger les notations nous confondrons systématiquement l'ensemble de base $M$ avec le modèle dont il est le domaine et nous omettrons les indices $M$ des fonctions et du zéro. Si $M$ et $M'$ sont deux modèles nous disons que $M$ est un <u>sous-modèle</u> ou <u>sous-structure</u> de $M'$ ou que $M'$ est une <u>extension</u> de $M$ si (i) $M \subset M'$ en tant qu'ensembles, (ii) les deux modèles ont le même élément zéro, et (iii) les fonctions du modèle $M$ sont les restrictions de celles de $M'$. Quand $M$ est un sous-modèle de $M'$, nous écrirons $M \subset M'$. Si $\Phi(v_1,\ldots,v_n)$ est une formule et si $M$ est un modèle, nous écrirons $M \models \Phi(a_1,\ldots,a_n)$ pour signifier que la suite $a_1,\ldots,a_n$ d'éléments de $M$ satisfait la formule $\Phi(v_1,\ldots,v_n)$ dans $M$. Nous noterons souvent une suite finie $a_1,\ldots,a_n$ par $\bar{a}$ et une suite $v_1,\ldots,v_n$ de variables par $\bar{v}$; nous écrirons indifferemment $\Phi(a_1,\ldots,a_n)$ ou $\Phi(\bar{a})$ et $\Phi(v_1,\ldots,v_n)$ ou $\Phi(\bar{v})$; on écrira aussi à l'occasion $\bar{a} \in M$ au lieu de $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \in M^n$.

Une partie $X \subseteq M^k$ est <u>définissable</u> (dans $M$) s'il existe une formule $\Phi(v_1,\ldots,v_k,u_1,\ldots,u_n)$ et des éléments $a_1,\ldots,a_n$ de $M$ tels que, pour tous $b_1,\ldots,b_k \in M$, on a

$$\langle b_1,\ldots,b_k\rangle \in X \iff M \models \Phi(b_1,\ldots,b_k,a_1,\ldots,a_n) .$$

Si $M$ est un modèle de $\mathcal{P}$ il y a un ordre linéaire canonique définissable sur $M$ : on pose $a \le b$ ssi $M \models \exists v(a+v = b)$. Le schéma d'induction entraine alors le <u>principe de l'élément minimum</u> : si $M \models \mathcal{P}$ et si $X \subseteq M$ est une partie définissable non-vide, alors $X$ a un élément minimum pour l'ordre canonique sur $M$. Nous dirons qu'une fonction $F : M^k \to M$ est définissable si son graphe est une partie définissable de $M^{k+1}$. Notons que pour les modèles de $\mathcal{P}$, les fonctions définissables satisfont à "l'axiome de remplacement" : si $F : M \to M$ est définissable, alors pour tout $a \in M$, il existe $b \in M$ tel que $M \models \forall x(x < a \to F(x) < b)$, autrement dit, l'image par $F$ d'un sous-ensemble borné de $M$ est aussi bornée dans $M$.

Les entiers naturels $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ munis des opérations arthmétiques usuelles forment un modèle de $\mathcal{P}$ que nous appelons le <u>modèle standard</u>; tout modèle qui ne lui est pas isomorphe s'appelle <u>non-standard</u>. L'ensemble des formules closes satisfaites dans $\mathbb{N}$ est noté $\mathcal{T}$ et est appelé la <u>théorie de $\mathbb{N}$</u> ou <u>la vraie arithmétique</u>. Une partie $I$ d'un modèle $M$ de $\mathcal{P}$ est un <u>segment initial</u> de $M$ si pour tous $a,b \in M$,

$$b \in I \text{ et } a \le b \Rightarrow a \in I.$$

Dans ce cas, nous disons que $M$ est une extension <u>finale</u> de $I$ et nous écrivons, si $I \neq M$, $I \subset_f M$ ou $I < M$. Si $a \in M-I$, on écrira parfois $I < a$. Clairement, tout modèle non-standard $M$ de $\mathcal{P}$ possède un segment initial propre isomorphe à $\mathbb{N}$ que nous identifierons toujours avec $\mathbb{N}$. Donc $\mathbb{N} < M$ ou $\mathbb{N} \subset_f M$. Si $\mathbb{N} < M$ et si $\mathbb{N} < a \in M$, on dit que $a$ est un entier <u>infini</u> ou <u>non-standard</u> de $M$.

Le <u>principe de débordement</u> se formule de la façon suivante : soit $M \models \mathcal{P}$ et soit $I < M$ sans élément maximum (c'est-à-dire, fermé pour l'opération de successeur); alors $I$ n'est pas définissable dans $M$. Ce principe est une conséquence facile du principe de l'élément minimum appliqué à $M - I$. Plus généralement, on voit que toute partie de $M$ sans élément maximum qui est bornée dans $M$ ne peut être définissable.

Remarquons que, pour tout modèle non-standard dénombrable $M$ de $\mathcal{P}$, le type d'ordre de la partie non-standard $M - \mathbb{N}$ est $(\omega^* + \omega)\eta$, où $\omega^* + \omega$ est le type d'ordre des entiers $\mathbb{Z}$ et $\eta$ est celui des rationnels. En effet, pour $a,b \in M-\mathbb{N}$ posons

$$a \sim b \iff a = b \pm n \text{ pour un entier standard } n \in \mathbb{N}.$$

Alors chaque classe d'équivalence a le type d'ordre de $\mathbb{Z}$. Voyons qu'il y a une collection dense de ces classes d'équivalence : soit $a,b \in M-\mathbb{N}$ tel que $a < b$ et $b - a > \mathbb{N}$, c'est-à-dire, $a$ et $b$ sont inéquivalents; alors il existe un entier $c$ de $M$ tel que $a < c < b$ et $b - c$ et $c - a$ sont tous deux non standards - il suffit de choisir $c$ tel que $M \models b + a = 2c \vee b + a = 2c + 1$.

Démontrons maintenant un résultat classique du sujet, le théorème de Mac Dowell-Specker, [M,S] qui sera souvent utile dans la suite.

Si $M'$ est une extension élémentaire de $M$ - $M \subset M'$ et $M \models \Phi(\bar{a}) \iff M' \models \Phi(\bar{a})$ pour tout $\bar{a} \in M$ et toute formule $\Phi$ - nous écrirons $M \prec M'$. Si $M \prec M'$ et $M \subset_f M'$, nous écrirons $M \prec_f M'$.

I.1. <u>Théorème</u> (Mac Dovell-Specker) Tout modèle dénombrable de $\mathcal{P}$ a une extension élémentaire finale propre.

<u>Démonstration</u> Soit $M$ un modèle dénombrable de $\mathcal{P}$. Nous construisons un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur les ensembles définissables de $M$ tel que

(i) $X \in \mathcal{U} \Rightarrow X$ est non-borné dans $M$

(ii) si $F : M \to M$ est une fonction définissable dans $M$ qui a pour image une partie bornée de $M$, alors il existe $x \in M$ tel que $F^{-1}\{x\} \in \mathcal{U}$ . Afin de construire $\mathcal{U}$ , prenons une liste $F_i$, $i \in \mathbb{N}$, de toutes les fonctions ayant la propriété évoquée dans (ii). Définissons une suite $X_i$, $i \in \mathbb{N}$, de parties définissables et non-bornées de $M$ ainsi : $X_o = M$, $X_{i+1} = X_i \cap F_i^{-1}\{x\}$ pour un $x$ tel que $X_i \cap F_i^{-1}\{x\}$ est non-borné. Soit $\mathcal{U}$ le filtre engendré par les $X_i$. Il est alors clair que si $X$ est une partie définissable de $M$, alors soit $X \in \mathcal{U}$ soit $M - X \in \mathcal{U}$ - la fonction caractéristique de $X$ sera $F_i$ pour un $i \in \mathbb{N}$ et donc la construction assurera que $X \supseteq X_{i+1}$ ou $M - X \supseteq X_{i+1}$ . Soit $M'$ l'ultrapuissance de $M$ formée à partir de $\mathcal{U}$ en n'utilisant que les fonctions définissables de $M$ dans $M$. Le principe de l'élément minimum permet de définir des fonctions de Skolem dans $M$; donc on vérifie comme pour les ultrapuissances ordinaires que $M \prec M'$ . Pour vérifier que $M'$ est une extension finale de $M$, supposons que $\bar{F} \in M'$ où $F$ est la classe d'équivalence de la fonction définissable $F : M \to M$ et que $M' \models \bar{F} < a$ pour un certain $a \in M$. Nous avons donc

$$\{x \in M : M \models F(x) < a\} \in \mathcal{U}$$

Soit $G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } F(x) < a \\ a & \text{sinon} \end{cases}$ ; alors $G$ est définissable dans $M$ et $M' \models \bar{F} = \bar{G}$. Mais, par (ii), il existe $b \in M$ tel que

$$\{y : G(y) = b\} \in \mathcal{U} \ ; \quad \text{c'est-à-dire,} \quad M' \models \bar{G} = b.$$

Si $b$ était égal à $a$ on aurait

$$\{y \in M : M \models F(y) \geq a\} \in \mathcal{U},$$

ce qui est impossible puisque $\mathcal{U}$ est un filtre. Donc nous avons $b < a$ et $M' \models \bar{F} = b$, ce qui démontre que $M \subset_f M'$ C.Q.F.D.

II. LES CODAGES.

On écrit $\forall x < y\ \Phi$ pour abréger $\forall x(x < y \rightarrow \Phi)$ et $\exists x < y\ \Phi$ pour abréger $\exists x(x < y \wedge \Phi)$; les quantificateurs qui apparaissent dans ce contexte sont appellées des <u>quantificateurs bornés</u>. Une formule est dite $\Sigma^o_o$ ou $\Pi^o_o$ ou $\Delta^o_o$ ou à <u>quantification bornée</u> si elle contient que des quantificateurs bornés; en continuant par récurrence, on dit qu'une formule est $\Sigma^o_{n+1}$ (resp. $\Pi^o_{n+1}$) si elle est de la forme $\exists x_1 \dots \exists x_k\ \Psi$ (resp. $\forall x_1 \dots \forall x_k\ \Psi$) où $\Psi$ est $\Pi^o_n$ (resp. $\Sigma^o_n$). Soit $\mathfrak{A}$ une extension de $\mathcal{P}$, $\mathfrak{A} \supseteq \mathcal{P}$. Nous dirons qu'une formule $\Phi(v_1,\dots,v_k)$ est $\Sigma^o_n$ (resp. $\Pi^o_n$) dans $\mathfrak{A}$ s'il existe une formule $\Sigma^o_n$ (resp. $\Pi^o_n$) $\Psi(v_1,\dots,v_k)$ telle que $\mathfrak{A} \vdash \forall v_1,\dots,\forall v_k(\Phi(v_1,\dots,v_k) \longleftrightarrow \Psi(v_1,\dots,v_k)$; nous dirons que $\Phi(v_1,\dots,v_k)$ est $\Delta^o_n$ dans $\mathfrak{A}$ si $\Phi$ est à la fois $\Sigma^o_n$ et $\Pi^o_n$ dans $\mathfrak{A}$. Donc une formule $\Psi(v_1,\dots,v_k)$ est $\Delta^o_1$ dans $\mathfrak{T}$ - la théorie du modèle standard N - si et seulement si $\Psi$ définit dans $\mathbb{N}$ une relation récursive. Si $\Psi(v_1,\dots,v_k)$ est $\Delta^o_1$, dans $\mathfrak{A}$, alors $\Psi$ est <u>absolue</u> dans le sens suivant : soient $M \subset_f M'$ deux modèles de $\mathfrak{A}$ ; alors pour $a_1,\dots,a_k \in M$, $M \models \Psi(a_1,\dots,a_k) \Leftrightarrow M' \models \Psi(a_1,\dots,a_k)$. (La réciproque est aussi exacte : si $\Psi = \Psi(v_1,\dots,v_k)$ est absolue pour $\mathfrak{A}$, alors $\Psi$ est $\Delta^o_1$ dans $\mathfrak{A}$. Pour une démonstration rapide de ce fait, on peut utiliser les résultats de Gaifman dans [G] : il y est démontré, comme conséquence des travaux de Robinson-Matijasevich, que si $M \subset M'$ sont des modèles de $\mathcal{P}$, alors on a $M \prec M'' \subset_f M'$ où $M'' = \{x \in M' :$ il existe $a \in M,\ x < a\}$ ; Donc quant aux modèles de $\mathfrak{A}$ où $\mathfrak{A} \supseteq \mathcal{P}$, si une formule $\Phi(v_1,\dots,v_k)$ est persistante par rapport aux extensions finales, $\Phi$ est persistante par rapport à toute extension et, par des résultats bien connus, une telle $\Phi$ doit donc être équivalente dans $\mathfrak{A}$ à une formule existentielle, alors $\Sigma^o_1$.)

Soit $F(v_1,\dots,v_k,x)$ une formule et soit $\mathfrak{A}$ une extension de $\mathcal{P}$ ; on dira par abus de langage que F est une <u>fonction</u> dans $\mathfrak{A}$ si l'on a

$\mathfrak{A} \vdash \forall v_1,\dots,\forall v_k\ \exists! u\ F(v_1,\dots,v_k,u)$; dans ce cas, on parlera de la fonction $F(v_1,\dots,v_k)$ et on écrira $F(v_1,\dots,v_k) = u$ plutôt que $F(v_1,\dots,v_k,u)$. Si $F(v_1,\dots,v_k)$ est une fonction dans $\mathfrak{A}$ et si $F(v_1,\dots,v_k) = u$ est $\Sigma^o_1$ dans $\mathfrak{A}$, alors il est aisé de voir que $F(v_1,\dots,v_k) = u$ est en fait $\Delta^o_1$ dans $\mathfrak{A}$ et donc absolue. Les fonctions usuelles de l'arithmétique $x + y$, $x.y$, $Sx$, $2^x$, $x^y$,... sont toutes $\Delta^o_1$ dans $\mathcal{P}$.

Si $F(v_1,\dots,v_k) = u$ est une fonction $\Delta^o_1$ dans $\mathfrak{A}$ où $\mathfrak{A} \supseteq \mathcal{P}$ et si $M \subset_f M'$ sont des modèles de $\mathfrak{A}$, alors quels que soient $a_1,\dots,a_k,b \in M$, $M \models F(a_1,\dots,a_k) = b \Leftrightarrow M' \models F(a_1,\dots,a_k) = b$. Dans ce contexte on peut donc parler sans ambiguité de la valeur $F(a_1,\dots,a_k)$ pour $a_1,\dots,a_k \in M$.

Soit $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ une fonction récursive; s'il existe une fonction $\Delta_1^o$ dans $\mathcal{P}$, disons $F(x_1,\dots,x_k) = y$, qui satisfait

$$\mathbb{N} \models F(n_1,\dots,n_k) = m \Leftrightarrow f(n_1,\dots,n_k) = m$$

alors on dit que $f$ est une fonction récursive prouvable. Les fonctions récursives prouvables constituent une classe très riche qui contient les fonctions primitives récursives; cependant elle n'épuise pas la classe des fonctions récursives et dans le §2 de l'exposé suivant on donnera un exemple d'une fonction récursive définie par une propriété de type Ramsey qui "croît plus vite" que toutes les fonctions récursives prouvables.

D'après les travaux de Gödel on sait définir dans $\mathcal{P}$ de façon $\Delta_1^o$ les fonctions primitives récursives et en particulier la fonction $i \to p_i$, le $i^{\text{ème}}$ nombre premier. On définit alors une "relation d'appartenance" :

$$E(m,n) \Longleftrightarrow p_m \text{ divise } n$$

et l'on a le schéma de compréhension suivant :

II.1. $\quad \mathcal{P} \vdash \forall x_1 \dots \forall x_k \;\; \forall v \;\; \exists y \;\; \forall x(E(x,y) \leftrightarrow x \leq v \wedge \Phi\, x,x_1,\dots,x_k)$

Quant aux modèles $M$ de $\mathcal{P}$, si $X \subseteq M$ est une partie définissable de $M$ et si $a \in M$, alors $\{x \in M : x \in X \wedge x \leq a\}$ est codé dans $M$ en tant qu'ensemble fini au sens de $M$. Notons ici aussi le fait évident que tout sous-ensemble fini (dans le sens usuel) $X \subseteq M$ est définissable dans $M$ et est codé dans $M$ en tant qu'ensemble fini.

Au moyen des fonctions et des relations primitives récursives on peut formuler les diverses notions élémentaires de la Logique - formule, variable,.., de la théorie des ensembles (héréditairement) finis, de la combinatoire finie et de la théorie des jeux finis. A titre d'exemple, on peut formuler et démontrer dans $\mathcal{P}$ le théorème suivant :

II.2. THÉORÈME Soit $J$ un jeu fini à information parfaite à deux joueurs sans partie nulle. Alors un des joueurs a une stratégie gagnante.

## III. LES INDICATRICES

L'idée d'une indicatrice est due surtout à J.B. Paris et a été développée par celui-ci et l'auteur dans [K,P], [K] et [P]. Une anticipation certaine de cette technique se trouve chez H. Friedman dans [ ]. Si l'on se donne une classe de segments initiaux d'un modèle M non-standard de l'arithmétique, une "indicatrice" est une fonction qui, tout en étant définie dans M, nous donne de l'information sur la répartition dans M des segments initiaux de la classe. J. Paris a exploité cette méthode pour donner une nouvelle démonstration sans "autoréférence" du théorème d'Incomplétude de Gödel ce que nous verrons dans la suite.

### III.1. DÉFINITION

Soit S une fonction qui associe à tout modèle M de $\mathcal{P}$ une classe $S^M$ de segments initiaux de M, soit Y une fonction à deux arguments qui est $\Delta_1^0$ dans $\mathcal{P}$. On dit que Y est une indicatrice pour S si, quel que soit le modèle dénombrable $M \models \mathcal{P}$, on a pour tous $a, b \in M$

$$Y(a,b) > \mathbb{N} \iff \text{il existe } I \in S^M \text{ tel que } a < I < b$$

Bien des classes naturelles de segments initiaux possèdent des indicatrices; par exemple, la fonction

$$Y(x,y) = \text{le plus petit } z \text{ tel que } y < (x+2)^z$$

est une indicatrice pour la classe des segments initiaux d'un modèle qui sont fermés par rapport à la multiplication.

Soit $\mathfrak{A}$ une théorie, la classe des segments initiaux d'un modèle M qui sont (en tant que sous-structures de M) des modèles de $\mathfrak{A}$, sera notée $S_{\mathfrak{A}} = S_{\mathfrak{A}}^M$ et elle jouera un rôle important dans la suite. Nous démontrerons qu'il existe pour toute théorie récursivement axiomatisable $\mathfrak{A}$ une indicatrice $Y_{\mathfrak{A}}$. Comme nous verrons dans les exposés 2, 3 et 4 certaines théories, notamment $\mathcal{P}$, possèdent des indicatrices "combinatoires" et celles-ci y seront étudiées en détail; pour les exposés suivants, donc, à l'exception du §III du troisième exposé, on n'aura pas besoin d'un théorème général pour l'existence des indicatrices $Y_{\mathfrak{A}}$, ce théorème sera tout de même nécessaire pour établir le théorème d'incomplétude en toute généralité dans le paragraphe suivant.

### III.2. THÉORÈME

Toute théorie récursivement axiomatisable possède une indicatrice.

#### DÉMONSTRATION

On fixe tout d'abord une énumération primitive récursive $<\theta_n>$ des formules du langage de l'arithmétique telle que la $n^{\text{ième}}$ formule a au plus n-variables libres et aussi une énumération primitive récursive $<A_n>$ d'un système d'axiomes pour $\mathfrak{A}$; un tel système existe toujours par un résultat bien connu de Craig. Ces énumérations s'étendent donc canoniquement à la partie infinie de tout modèle non standard de $\mathcal{P}$. Plaçons nous maintenant à l'intérieur d'un modèle non-standard M de $\mathcal{P}$. Soient a,b,c des entiers, avec $a < b$. Définissons un jeu $J_c(a,b)$ à deux joueurs que l'on nomme 1 et 2. L'idée du jeu est la suivante : 2 prétend qu'il existe un segment initial $I \models \mathfrak{A}$ tel que $a < I < b$; 1 pose des questions à 2 en espérant l'amener à contredire son affirmation. Le jeu dure pendant c coups : au $n^{\text{ième}}$ coup 1 pose les questions « Est-ce que $\bar{e} \in I$ » où $\bar{e}$ est une suite de longueur au plus n d'éléments $\leq b$; si la réponse de 2 est «oui», 1 pose la question «Est-ce que $I \models \Theta(e)$» où $\Theta = \Theta(v_1,\ldots,v_n)$ est une des n premières formules de l'énumération ; 2 doit répondre soit «$I \models \Theta(\bar{e})$» soit «$I \models \neg\Theta(e)$»; si la réponse de 2 est que «$I \models \Theta(\bar{e})$», alors si $\Theta$ est de la forme $\exists u\ \Theta'(u,v_1,\ldots,v_n)$, 2 doit fournir un entier $d \leq b$ et la réponse «$\Theta(d,e)$» et si $\Theta$ est de la forme $\Theta' \vee \Theta''$ 2 doit affirmer soit «$I \models \Theta'$» soit «$I \models \Theta$». Après c coups le joueur 1 a gagné si, parmi la liste des réponses de 2 lors de ces c coups se trouve

soit (i) une réponse «$I \models \Theta$» où $\Theta$ est parmi les c-premiers axiomes $A_1,\ldots,A_c$ de $\mathfrak{A}$.

soit (ii) des réponses qui contredisent l'affirmation de 2 que $a < I < b$ et que I est une sous-structure de M close pour les fonctions primitives; à savoir une combinaison de réponses d'un des types suivants

ou «$a \notin I$»
ou «$b \in I$»
ou «$d \in I$» et «$e \notin I$», bien que $e \leq d$
ou «$d \in I$», «$e \in I$» mais «$d.e$» $\notin I$
ou «$d+e \notin I$»
ou «$d+c = f$», bien que $d+e \neq f$
ou «$d.e = f$», bien que $d.e \neq f$
ou «$d+e \neq f$», bien que $d+e = f$
ou «$d.e \neq f$», bien que $d.e = f$

(iii) une combinaison qui contredit la définition Tarskienne de la vérité dans I; c'est-à-dire,

ou bien «$I \models \neg\Theta$» et «$I \models \Theta$»
ou bien «$I \models \neg\exists v\ \theta(v,\bar{e})$» et «$I \models \Theta(d,e)$»
ou bien «$I \models \neg(\Theta' \vee \Theta'')$» et «$I \models \Theta'$» ou «$I \models \Theta''$»

Autrement 2 gagne la partie. Dans M - où nous raisonnons - $J_c(a,b)$ est un jeu fini à information complète sans partie nulle. Or, c'est un théorème de $\mathcal{P}$ que dans un tel jeu, l'un des joueurs a une stratégie gagnante. Définissons alors pour $a < b$

$Y_{\mathfrak{a}}(a.b) =$ le plus petit $c$ tel que 1 a une stratégie gagnante pour $J_c(a.b)$

Vérifions que $Y_{\mathfrak{a}}$ est bien définie : un tel $c$ existe toujours parce que 1 a la stratégie gagnante suivante pour $J_{b-a+1}(a,b)$:
Au $x^{\text{ième}}$ coup, 1 pose la question «$a+x-1$ est-il dans I»; après $b-a+1$ coups l'ensemble des $x$ tels que 2 a dit «$x \notin I$» est définissable et donc cet ensemble a un élément minimum, disons $x_o$, s'il est non-vide. Le joueur 2 a donc produit une contradiction de type (ii) : «$x_o - 1 \in I$», «$x_o \notin I$».

Maintenant supposons qu'il existe $I_o < M$ tel que $a \in I_o < b$ et $I_o \models \mathfrak{a}$. Nous voulons en déduire que $Y_{\mathfrak{a}}(a,b) > \mathbb{N}$. Mais supposons que 1 ait une stratégie gagnante pour un jeu $J_n(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$. Imaginons une partie du jeu ou 1 joue selon cette stratégie et 2 répond avec la vérité dans $I_o$, c'est-à-dire, 2 dit «$\bar{e} \in I$» si et seulement si $\bar{e} \in I_o$ et «$I \models \Theta$» si et seulement si $I_o \models \Theta$. La suite des réponses de 2 est vraiment finie, donc définie dans M; ce qui signifie que l'on peut jouer cette partie dans M. Mais 2 n'a pu produire aucune combinaison contradictoire de type (i), (ii) ou (iii), donc 2 a gagné ce qui contredit notre supposition que la stratégie de 1 était gagnante.

Alors, parce que le jeu $J_n(a,b)$ est déterminé dans M pour tout $n \in \mathbb{N}$, le joueur 2 doit avoir une stratégie gagnante. Par le principe de débordement, 2 doit avoir une stratégie gagnante pour un jeu $J_c(a,b)$ avec $c > \mathbb{N}$; donc $Y_{\mathfrak{a}}(a,b) > \mathbb{N}$.

Réciproquement, supposons que $Y_{\mathfrak{a}}(a,b) > \mathbb{N}$, nous allons construire un $I_o \models \mathfrak{a}$ entre a et b. Prenons $c > \mathbb{N}$ et une stratégie gagnante $\sigma \in M$ pour 2 dans le jeu $J_c(a,b)$. En utilisant le fait que M est dénombrable, construisons une liste $< \bar{e}_i, \Theta_i >$, $i \in \mathbb{N}$, de tous les couples correspondant aux questions possibles de 1, où la longueur de $\bar{e}_i$ est au plus $i$ et où $\Theta_i$ est une des $i$ premières formules de l'énumération fixée au départ. On supposera aussi qu $< \bar{e}_{2n}, \Theta_{2n} > = < \phi, A_n >$ Bien sûr cette liste n'est pas définie dans M !

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la partie de $J_n(a,b)$ jouée par 2 selon sa stratégie $\sigma$ pour $J_c(a,b)$, et par 1 jouant $<\bar{e}_1, \Theta_1>, \ldots, <\bar{e}_n, \Theta_n>$. Cette partie est vraiment finie et elle est donc définie dans M; nous pouvons la prolonger en une partie semblable de $J_{n+1}(a,b)$ et plus généralement de $J_m(a,b)$ pour tout $m \in N$, $m \geq n$, ces parties étant toujours codées dans M. Soit R la réunion des réponses de 2 dans toutes ces parties des jeux $J_m(a,b)$ pour $m \in \mathbb{N}$; dans R ne se trouve aucune combinaison contradictoire de type (i), (ii) ou (iii). En effet, s'il en existait une, elle aurait dû paraître avant le $m^{\text{ième}}$ coup pour un $m \in \mathbb{N}$ et alors 2 aurait perdu $J_m(a,b)$, ce qui est impossible parce que $\sigma$ est gagnante pour $J_c(a,b)$ et donc pour $J_m(a,b)$.

Soit $I_o = \{e : «e \in I» \in R\}$ . Vérifions que $I_o$ est le segment initial cherché. Puisqu'il n'y a pas de contradiction de type (ii), $a < I_o < b$ et $I_o$ est un segment initial de $M$ qui est clos pour successeur , addition et multiplication; puisqu'il n'y a pas de contradiction de type (iii), on peut démontrer par récurrence sur la complexité des formules que

$$I_o \models \Theta(\bar{e}) \Longleftrightarrow «I \models \Theta(\bar{e})» \in R$$

Quelle que soit la formule $\theta$. Traitons, par exemple, de la clause d'induction pour la quantification existentielle : d'une part, si $I_o \models \exists x\ \Theta(x,\bar{e})$, on a $I_o \models \Theta(d,\bar{e})$ pour un $d \in I_o$ et par l'hypothèse de récurrence, $«I \models \Theta(d,\bar{e})» \in R$; donc par le choix des questions de 1, et (iii), on a forcément $«I \models \exists x\ \Theta(x,\bar{e})» \in R$; réciproquement, si $«I \models \exists x\ \Theta(x,\bar{e})» \in R$, les règles du jeu requièrent $«I \models \Theta(d,\bar{e})» \in R$ pour un $d < b$, et par l'ypothèse de récurrence, $I_o \models \Theta(d,\bar{e})$ et $I_o \models \exists x\ \Theta(x,\bar{e})$. Les autres clauses d'induction se traitent exactement de la même façon. Pour avoir $I_o \models \mathcal{A}$ , il suffit de remarquer que le $n^{\text{ième}}$ axiome $A_n$ de $\mathcal{A}$ doit paraître dans notre liste comme $\Theta_m$ pour $m = 2n$ et que $«I \models A_n» \in R$ parce que 2 doit gagner dans le jeu $J_{2n}(a,b)$.

Pour finir, il suffit de noter que notre construction fournit une fonction $Y_{\mathcal{A}}(x,y) = z$ qui est $\Delta_1^o$ dans $\mathcal{P}$; en effet les énumérations, les fonctions et les relations qui servent à définir les jeux $J_z(x,y)$ les parties de ces jeux et les stratégies gagnantes sont absolues, et nous venons de voir que $Y_{\mathcal{A}}(x,y) = z$ définit une fonction totale dans un modèle non-standard arbitraire $M$ de $\mathcal{A}$; autrement dit, $\mathcal{P} \vdash \forall x,y\ \exists! z\ Y(x,y) = z$ et $Y_{\mathcal{A}}(x,y) = z$ est bien une fonction $\Delta_1^o$ dans $\mathcal{P}$. C.Q.F.D.

## IV. LE THÉORÈME d'INCOMPLÈTUDE

Dans ce paragraphe, soient $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ une théorie récursivement axiomatisable, $Y = Y_{\mathcal{A}}$ une indicatrice pour $\mathcal{A}$ qui est $\Delta_1^0$ dans $\mathcal{A}$, $M$ un modèle dénombrable non-standard de $\mathcal{A}$, et $S = S_{\mathcal{A}}^M$ la classe des segments initiaux de $M$ qui satisfont $\mathcal{A}$. Nous supposerons, sans perte de généralité, que

$$M \models \forall x \forall y \quad Y(x,y) \le y$$

Ceci est vrai pour les indicatrices ci-dessus et une modification triviale de $Y$ l'assure pour toute indicatrice $Y$.

IV.1. PROPOSITION Soient $a,b \in M$ tels qu'il existe $I \in S$ avec $a < I < b$. Alors il existe une infinité de $I \in S$ tel que $a < I < b$.

DÉMONSTRATION Il suffira de produire $c$ tel que $a < c < b$ et $Y(a,c) > \mathbb{N}$, $Y(c,b) > \mathbb{N}$. La proposition suivra par itération de ce processus. Considérons l'ensemble

$$X = \{x : a \le x \le b \ \text{ et } \ Y(x,b) < Y(a,x)\} \cdot$$

Cet ensemble est non-vide (puisque $b \in X$) et il est défini dans $M$. Soit $c$ le plus petit élément de $X$. Alors $Y(a,c) > Y(c,b)$. Si $Y(c,b) > \mathbb{N}$, alors $Y(a,c) > \mathbb{N}$ ce qui nous suffit. Donc supposons que $Y(c,b) \in \mathbb{N}$ : c'est-à-dire, qu'il n'existe pas de $I \in S$ entre $c$ et $b$. Mais il existe un tel segment entre $a$ et $b$, et alors celui-ci se trouve entre $a$ et $c$; ce segment étant fermé pour successeur, il se trouve entre $a$ et $c-1$; donc $Y(a,c-1) > \mathbb{N}$. Par le même raisonnement, il n'y aucun élément de $S$ entre $c-1$ et $b$, donc $Y(c-1,b) < \mathbb{N}$, ce qui implique que $c-1 \in X$. C'est une contradiction parce que $c$ est l'élément minimum de $X$.

IV.2. COROLLAIRE Soit $\mathbb{N} < b \in M$ et supposons que $\mathbb{N} \models \mathcal{A}$. Il existe alors $I \in S$ tel que $\mathbb{N} < I < b$.

DÉMONSTRATION En effet, d'après la proposition il existe une infinité d'éléments de $S$ entre $0$ et $b$ parce que $\mathbb{N} \in S$.

IV.3. PROPOSITION Soit $a \in M$; alors il existe $I \in S$ tel que $a < I < M$.

DÉMONSTRATION Prenons $M' \prec_f M$, ce qui existe par le théorème de Mac Dowell-Specker. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $c \in M' - M$, on a $M' \models Y(a,c) > n$ puisque $M \in S_{\mathcal{A}}^{M'}$. Soit $c_o$ le plus petit élément de l'ensemble suivant qui est défini dans $M - \{x \in M' : M' \models Y(a,x) > n\}$. Alors $c_o \in M$ (par débordement) et $M \models Y(a,c_o) > n$, par l'absoluité de $Y$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M \models Y(a,y) > n$. Par débordement, il existe $e > \mathbb{N}$ tel que $M \models \exists y \ Y(a,y) > e$, ce qui suffit pour la proposition.

Après ces exemples de résultats sur la structure des classes qui ont des indicatrices, nous nous mettons en chemin vers le Théorème d'Incomplétude. D'abord notons que, $M$ étant arbitraire dans la démonstration de la proposition , on peut déduire :

IV.4. <u>COROLLAIRE</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\qquad \mathfrak{A} \vdash \forall x \ \exists y \ Y(x,y) > n$.

Le lemme décisif ressemble à la proposition IV.1.

IV.5. <u>LEMME</u> Soient $a,b \in M$ tels que $Y(a,b) > \mathbb{N}$. Alors pour tout $c > \mathbb{N}$ il existe $d \in M$ tel que $a < d \leq b$ et $\mathbb{N} < Y(a,d) < c$.

<u>DÉMONSTRATION</u> Par l'absurde. Supposons que $c > N$ et que pour tout $d \leq b$

$$Y(a,d) > \mathbb{N} \Rightarrow Y(a,d) \geq c$$

Prenons le plus petit élément $e$ de $M$ tel que $M = Y(a,e) \geq c$. Alors il existe $I \in S$ avec $a < I < e$. Le segment initial $I$ étant fermé pour successeur, on a $I < e < 1$ et $Y(a,e-1) > \mathbb{N}$. Donc $Y(a,e-1) \geq c$ ce qui contredit la minimalité de $e$.

IV.6. <u>DÉFINITION</u> <u>L'index</u> de $I$ est défini par

$$i(I) = \{ x \in M : Y(a,b) > x \text{ quels que soient } a \in I, \ b \in M-I \}$$

L'ensemble $i(I)$ est un segment initial de $M$ qui n'est pas forcément fermé pour successeur. Nous avons toujours $i(I) \subseteq I$ parce que $Y(a,b) \leq b$ pour tout $b$; et aussi $I \in S$ entraine $i(I) \geq \mathbb{N}$. Si $\mathbb{N} \models \mathfrak{A}$, alors $i(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

IV.7. <u>COROLLAIRE</u> Soient $a,b \in M$. S'il existe $I \in S$ satisfaisant $a < I < b$, alors il existe $I \in S$ satisfaisant $a < I < b$ et $i(I) < I$.

<u>DÉMONSTRATION</u> Dans le lemme nous pouvons prendre $c = a-1$, en supposant que $a$ est non-standard.

IV.8. <u>LEMME</u> Il existe une formule close $\Pi_2^0$, disons $\Psi$, telle que

$$i(I) = I \Leftrightarrow I \models \Psi$$

quel que soit $I \in S$.

<u>DÉMONSTRATION</u> En se rappelant que $Y$ est absolue, il est facile de voir que l'on peut prendre pour $\Psi$ la formule

$$\forall x \ \forall z \ \exists y \ Y(x,y) \geq z$$

IV.9. <u>THÉORÈME</u> (Le Théorème d'Incomplètude de Paris). Soit $\mathfrak{A}$ une extension récursivement axiomatisable de $\mathcal{P}$ et soit $Y$ une indicatrice absolue pour $\mathfrak{A}$. Supposons $\mathfrak{A} \cup \mathcal{T}_1$ est consistante, où $\mathcal{T}_1$ dénote l'ensemble des formules $\Pi_1^0$ satisfaites dans $\mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

(i) $\mathfrak{A} \vdash \forall x \ \exists y \ Y(x,y) > n$ et (ii) $\mathbb{N} \models \forall x \ \exists y \ Y(x,y) > n$
Or, l'énoncé $\forall z \ \forall x \ \exists y \ Y(x,y) \geq z$ n'est pas dénombrable dans $\mathfrak{A} \cup \mathscr{C}_1$.

DÉMONSTRATION La partie (i) est le corollaire IV.4.; pour $m \in \mathbb{N}$, nous avons $\mathfrak{A} \vdash \exists y \ Y(m,y) > n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. L'énoncé $\exists y \ Y(m,y) > n$ est $\Sigma_1^0$ et, parce que $\mathfrak{A} \cup \mathscr{C}_1$ est consistante, cette formule est satisfaite dans $\mathbb{N}$. Pour finir, soit $M$ un modèle dénombrable de $\mathfrak{A} \cup \mathscr{C}_1$; par IV.3., IV.6., et IV.7., il existe $I < M$, $I \models \mathfrak{A}$, $I \models \exists x \ \forall y \ Y(x,y) \leq x$. Du fait que $I < M$, on a aussi $I \models \mathscr{C}_1$.

IV.10. REMARQUE La condition que $\mathfrak{A} \cup \mathscr{C}_1$ soit consistante est analogue à la condition de $\omega$-consistance que l'on trouve dans le théorème d'incomplètude comme formulé par Gödel [Gö]. Pour un théorème d'incomplètude analogue à celui de Rosser pour les théories axiomatisables en général, voir §III du troisième exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[Gö] K. Gödel, Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematika und verwandter System I, Monatshefte für Mathematik und Physik, 38 (1931).

[K] L.A.S. Kirby, Thèse, Manchester, 1977.

[K.P] L.A.S. Kirby and J. Paris, Initial segments of models of Peano's axioms, Springer Lecture Notes, 619.

[M.S] R. Mac Dowell and E. Specker, Modelle der Arithmetik, Infinitistic Methods Pergamon, Oxford, PWN Warsaw, 1961.

[P] J. Paris, Some independence results for Peano arithmetic, JSL, 1978