

Astérisque

LÉONARD GALLARDO

VINCENT RIES

**Marches aléatoires sur les espaces homogènes du
groupe des déplacements de \mathbb{R}^n**

Astérisque, tome 74 (1980), p. 123-138

http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__123_0

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MARCHES ALÉATOIRES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES
DU GROUPE DES DÉPLACEMENTS DE \mathbb{R}^n

Léonard GALLARDO et Vincent RIES

INTRODUCTION

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, μ une probabilité adaptée sur G , H un sous-groupe fermé de G et $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans G et de même loi μ . Pour tout x de l'espace homogène droit $H \backslash G$, on appelle marche aléatoire (droite) de loi μ partant de x la chaîne de Markov $Y_0^x = x, \dots, Y_n^x = xX_1X_2 \dots X_n, \dots$ et l'élément x est dit :

- μ -récurrent (ou, plus simplement, récurrent) si, pour tout voisinage V de x ,
$$h_V(x) = P(\sum_n \mathbf{1}_V(Y_n^x) = +\infty) = 1$$
,
- μ -transitoire s'il existe un voisinage V de x tel que $h_V(x) = 0$.

Dans le cas où G est à croissance polynomiale et où μ est étalée, les éléments de $H \backslash G$ sont soit tous μ -récurrents, soit tous μ -transitoires ([7]).

On peut alors classer les espaces homogènes de G en :

- espaces homogènes récurrents (ceux dont les éléments sont tous μ -récurrents pour au moins une probabilité μ étalée et adaptée).
- espaces homogènes transitoires (les autres).

Une condition nécessaire et suffisante pour que $H \backslash G$ soit transitoire est que toute probabilité μ adaptée et étalée sur G satisfasse à l'une des deux conditions équivalentes :

$$(A) \quad (\exists x \in H \backslash G) (\exists K, \text{ compact de } H \backslash G) (U_\mu(x, K) = \sum_n \varepsilon_x * \mu^{*n}(K) < +\infty)$$

$$(A') \quad (\forall x \in H \backslash G) (\forall K, \text{ compact de } H \backslash G) (U_\mu(x, K) < +\infty)$$

(cf [7] où il est montré en outre que, dans cette situation, la fonction $U_\mu(\cdot, K)$ est en fait bornée).

La question est bien sûr de trouver un critère portant sur H qui permette de classer l'espace homogène $H \backslash G$.

On obtient ici le résultat suivant :

THEOREME : Soit $G = SO(n) \times_{\mathbb{C}} \mathbb{R}^n$ le groupe des déplacements de \mathbb{R}^n , H un sous-groupe fermé connexe de G , π_2 la projection de G sur \mathbb{R}^n et d la dimension de l'espace vectoriel engendré par les directions asymptotiques de $\pi_2(H)$. Alors $H \backslash G$ est transitoire si et seulement si $n-d \geq 3$.

Nous reprendrons ici le plan en quatre étapes de la démonstration qui figure dans ([4]).

1ère étape : Réduction au cas où H est résoluble.

Soit $H = S.R$ la décomposition de Levi-Malcev où R est le radical résoluble de H et où S est un sous-groupe semi-simple de H .

PROPOSITION 1 : $H \backslash G$ est transitoire si et seulement si $R \backslash G$ est transitoire.

Démonstration :

a) G étant à croissance polynomiale, H l'est également ([5]) donc est moyennable. H est donc extension compacte de son radical résoluble ce qui implique que S est compact.

Une conséquence en est que les espaces vectoriels engendrés par les directions asymptotiques de $\pi_2(H)$ et $\pi_2(R)$ ont même dimension d .

b) L'application Γ de $R \backslash G$ dans $H \backslash G$ qui à la classe $x = Rg$ associe la classe $y = Hg$ est équivariante et définit une fibration $(R \backslash G, H \backslash G, \Gamma)$ dont les fibres sont difféomorphes à $R \backslash H$ donc à S ([2]). Par la propriété de trivialité locale, il existe, pour tout y de $H \backslash G$, un voisinage compact V de y tel que

$$\Gamma^{-1}(V) = V \times S$$

et $\Gamma^{-1}(V)$ est compact puisque S l'est.

Tout compact K de $H \backslash G$ peut ainsi être recouvert par un nombre fini de tels compacts V_i et on a alors :

$$\Gamma^{-1}(K) \subset \Gamma^{-1}\left(\bigcup_i V_i\right) = \bigcup_i \Gamma^{-1}(V_i) \quad .$$

Γ étant continue, $\Gamma^{-1}(K)$ est fermé dans le compact $\bigcup_i \Gamma^{-1}(V_i)$ donc est compact.

c) Soit $y \in \mathbb{H} \backslash G$, $x \in \Gamma^{-1}(\{y\})$ et W_n^y (resp. Y_n^x) la marche aléatoire de loi μ sur $\mathbb{H} \backslash G$ (resp. $\mathbb{R} \backslash G$) partant de y (resp. x). Γ étant équivariante, on a :

$$\Gamma(Y_n^x) = W_n^y,$$

donc, pour tout compact K de $\mathbb{H} \backslash G$:

$$W_n^y \in K \Leftrightarrow Y_n^x \in \Gamma^{-1}(K) \quad (\text{qui est compact}).$$

Ces deux marches passant simultanément dans des compacts, les espaces homogènes $\mathbb{H} \backslash G$ et $\mathbb{R} \backslash G$ sont donc soit tous deux récurrents soit tous deux transitoires.

Conclusion : Dans la suite \mathbb{H} sera supposé résoluble.

2ème étape : Une autre condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{H} \backslash G$ soit transitoire.

Notations :

I est l'élément neutre de $SO(n)$, e celui de G et π_1 est la projection de G sur $SO(n)$. Les éléments de G sont notés $g = (r, \alpha)$ avec $r = \pi_1(g)$ et $\alpha = \pi_2(g)$, l'opération dans G étant alors définie par :

$$(r, \alpha).(r', \alpha') = (rr', \alpha + r\alpha').$$

Le sous-groupe vectoriel $T = \{(I, \alpha) ; \alpha \in \mathbb{R}^n\}$ des translations de G est identifié à \mathbb{R}^n et ses sous-groupes vectoriels connexes aux sous-espaces vectoriels correspondants de \mathbb{R}^n .

On note $V_0 = T \cap H$; W_0 est l'espace vectoriel engendré par V_0 et W est l'orthogonal de W_0 dans \mathbb{R}^n .

I.- Structure des sous-groupes connexes fermés résolubles de G .

LEMME 1 : $\pi_1(H)$ est abélien.

Démonstration :

Si on note \mathfrak{g} , $\mathfrak{so}(n)$, et \mathfrak{h} les algèbres de Lie de G , $SO(n)$ et H et si π_1' est la projection de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{so}(n)$, $\pi_1'(\mathfrak{h})$ est une sous-algèbre de

l'algèbre de Lie compacte $so(n)$. Etant donc une sous-algèbre compacte de $so(n)$ elle est somme directe de son centre et d'un idéal semi-simple ([8]) qui est réduit à $\{0\}$ puisque $\pi_1(\mathcal{H})$ est résoluble. $\pi_1(\mathcal{H})$ est donc abélienne et par conséquent $\pi_1(H)$ est un groupe abélien.

LEMME 2 : Il existe une application λ de $\pi_1(H)$ dans W telle que tout élément de H s'écrive de façon unique $(r, \lambda_0 + \lambda(r))$ où $r \in \pi_1(H)$ et $\lambda_0 \in W_0$.

Démonstration :

Fixons (r, α) dans H .

a) V étant distingué dans H , il existe, pour tout $(I, \alpha_0) \in V_0$, un $(I, \alpha_1) \in V_0$ tel que :

$$(r, \alpha)(I, \alpha_0) = (I, \alpha_1)(r, \alpha)$$

c'est-à-dire : $(r, \alpha + r \alpha_0) = (r, \alpha_1 + \alpha)$

d'où : $r \alpha_0 = \alpha_1 \in V_0$.

b) L'application de V_0 dans V_0 qui à α_0 associe $r \alpha_0$ est surjective donc :

$$(r, \alpha).V_0 = \{(r, \alpha + v) ; v \in V_0\} \quad \text{qu'on note } (r, \alpha + V_0).$$

c) Pour tout $(r, \alpha') \in H$ on a :

$$\begin{aligned} (r, \alpha').(r, \alpha)^{-1} &= (r, \alpha').(r^{-1}, -r^{-1}\alpha) \\ &= (I, \alpha' - \alpha) \in V_0 \end{aligned}$$

Donc $(r, \alpha') \in (r, \alpha).V_0 = (r, \alpha + V_0)$

ou $\pi_1^{-1}(\{r\}) = (r, \alpha + V_0)$.

α' et α ont donc même projection sur W . Celle-ci ne dépend donc que de r . On la note $\lambda(r)$.

LEMME 3 : $\lambda(rr') = \lambda(r) + r\lambda(r')$.

Démonstration :

Grâce au lemme 2, le produit de deux éléments de H peut s'écrire de deux façons :

$$(r, \lambda_0 + \lambda(r)).(r', \lambda'_0 + \lambda(r')) = (rr', \lambda''_0 + \lambda(rr'))$$

ou
$$= (rr', \lambda_0 + r\lambda'_0 + \lambda(r) + r\lambda(r')) .$$

Mais (point a du lemme précédent) tout $r \in \pi_1(H)$ stabilise V_0 donc aussi W_0 et W . Il en résulte que $r\lambda'_0 \in W_0$ et $r\lambda'(r) \in W$. La formule annoncée en découle par identification.

LEMME 4 : $L = \{(r, \lambda(r)) ; r \in \pi_1(H)\}$ est un sous-groupe abélien fermé de G inclus dans le produit direct d'un groupe compact et d'un sous-groupe de T .

Démonstration :

a) Il est clair, grâce au lemme 3, que L est un groupe isomorphe à $\pi_1(H)$ donc est abélien.

Soit maintenant une suite $(r_n, \lambda(r_n))$ d'éléments de L convergeant vers un élément (r, α) de G et a_1, a_2, \dots, a_p des vecteurs linéairement indépendants du groupe vectoriel V_0 tels que :

$$V_0 = \mathbb{R}a_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}a_q \oplus \mathbb{Z}a_{q+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}a_p .$$

On peut alors trouver, pour tout n , un $c_n \in C = [0, 1[a_{q+1} \oplus \dots \oplus [0, 1[a_p$ tel que $(r_n, c_n + \lambda(r_n)) \in H$. Puisque C est d'adhérence \bar{C} compacte il existe une sous-suite de la suite c_n , qu'on notera encore c_n , qui converge vers un $c \in \bar{C} \subset W_0$. Enfin, H étant fermé, la suite $(r_n, c_n + \lambda(r_n))$ converge et a pour limite $(r, c + \alpha) \in H$ avec $c \in W_0$ et $\alpha \in W$. Mais comme tout élément de H s'écrit de façon unique $(r, \lambda_0 + \lambda(r))$ avec $\lambda_0 \in W_0$ et $\lambda(r) \in W$ on a par identification :

$$\lim_n \lambda(r_n) = \lambda(r) .$$

L étant fermé dans G , c'est donc un sous-groupe de Lie de G .

b) $\pi_1(H)$ étant abélien, il est contenu dans un tore maximal de $SO(n)$.

Les tores maximaux d'un groupe compact étant conjugués les uns des autres par automorphismes intérieurs ([8]) on supposera dans la suite que tout r de $\pi_1(H)$ peut s'écrire matriciellement :

$$r = \left(\begin{array}{c|c} r_1 & 0 \\ \hline & \\ \hline r_2 & \\ \hline & \\ \hline & \dots \\ \hline & r_m \\ \hline & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{où } r_1, r_2, \dots, r_m \in \text{SO}(2) \\ \text{et où le } 1 \text{ n'existe pas si } n \\ \text{est pair.} \end{array}$$

L est alors un sous-groupe du groupe M constitué des éléments de G dont la projection sur SO(n) a la forme ci-dessus.

Soit $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{H}$ et \mathcal{G}_2 les algèbres de Lie de L, M, H et G_2 (= groupe des déplacements de \mathbb{R}^2). \mathcal{L} est une sous-algèbre abélienne de \mathcal{M} et \mathcal{M} est somme directe de m algèbres de Lie isomorphes à \mathcal{G}_2 (et de \mathbb{R} si n est impair) :

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{G}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_2 (\oplus \mathbb{R}) .$$

Soit γ_i la projection de \mathcal{M} sur le $i^{\text{ème}}$ terme de cette somme directe.

Alors :

$$\mathcal{L} \subset \bigoplus_i \gamma_i(\mathcal{L})$$

où les $\gamma_i(\mathcal{L})$ sont des sous-algèbres abéliennes de \mathcal{G}_2 .

c) Si on identifie G_2 au groupe de matrices : $\left\{ \left(\begin{array}{c|c} r & \alpha \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) . r \in \text{SO}(2) ; \alpha \in \mathbb{R}^2 \right\}$, \mathcal{G}_2 s'identifie à l'ensemble de matrices : $\left\{ \left(\begin{array}{c|c} \sigma & \alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) ; \sigma = \text{matrice } 2 \times 2 \text{ antisymétriques ; } \alpha \in \mathbb{R}^2 \right\}$ qui admet pour base :

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} ,$$

le crochet étant défini par : $[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = e_2$ et $[e_2, e_3] = -e_1$.

\mathcal{G}_2 étant mis sous cette forme, on peut montrer facilement que ses seules sous-algèbres non triviales sont le plan \mathcal{V} engendré par $\{e_1, e_2\}$ et les droites de \mathcal{G}_2 . On a ainsi :

$$\mathcal{L} \subset \bigoplus_i \mathcal{D}_i \oplus \bigoplus_j \mathcal{D}'_j \oplus \bigoplus_k \mathcal{V}_k ,$$

les \mathcal{D}_i étant des droites d'un \mathcal{G}_2 non incluses dans le plan \mathcal{V} de ce \mathcal{G}_2 ,

les $\mathcal{D}_j^!$ étant des droites incluses dans un plan \mathcal{P} , les \mathcal{P}_k étant des plans \mathcal{P} .

Les \mathcal{D}_i sont de la forme $\mathbb{R}.A_i$ où $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_i \\ -1 & 0 & b_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a, pour

$j \geq 1$:

$$A_i^{2j+1} = (-1)^j A_i \quad \text{et} \quad A_i^{2j} = (-1)^{j+1} A_i^2.$$

A toute droite \mathcal{D}_i de \mathcal{G}_2 correspond ainsi dans G_2 un sous-groupe à un paramètre :

$$t \rightsquigarrow \exp(t A_i) = I + (1 - \cos t) A_i^2 + \sin t A_i$$

dont les éléments s'écrivent matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & a_i \sin t + b_i(1 - \cos t) \\ -\sin t & \cos t & a_i(\cos t - 1) + b_i \sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou, sous la forme habituelle, $(r_t, (r_t - I)\alpha_i)$

avec
$$r_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} -b_i \\ a_i \end{pmatrix}.$$

Ce sous-groupe est compact et à $\mathcal{C} = \bigoplus_i \mathcal{D}_i \subset \mathcal{G}$ correspond donc un sous-groupe compact E de G .

Quant à $\mathcal{F}_1 = \bigoplus_j \mathcal{D}_j^! \oplus \bigoplus_k \mathcal{P}_k$, il lui correspond un sous-groupe connexe

F_1 de T qui est donc un sous-espace vectoriel de W .

De plus $E \cap F_1 = \{e\}$ puisque, si $(I, \alpha) \in E \cap F_1$, on a $(I, \alpha)^n = (I, n\alpha) \in E$ qui est compact, ce qui impose $\alpha = 0$. D'autre part, de même que \mathcal{C} et \mathcal{F}_1 , E et F_1 commutent. On a donc :

$$L \subset E \times F_1$$

où le produit est direct.

PROPOSITION 2 : Il existe une décomposition de \mathbb{R}^n en somme directe orthogonale : $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ et un compact $K_2 \subset W_2$ tels que tout élément de H s'écrive de manière unique $(r, \lambda_0 + \lambda_1(r) + \lambda_2(r))$ avec $\lambda_0 \in W_0$, $\lambda_1(r) \in W_1$ et $\lambda_2(r) \in K_2$.

De plus, tout élément de $\pi_1(H)$ laisse invariant tout élément de W_1 . Enfin, l'application λ_1 est un homomorphisme surjectif du groupe $\pi_1(H)$ sur le groupe vectoriel W_1 et $W_0 \oplus W_1$ est engendré par les directions asymptotiques de $\pi_2(H)$.

Démonstration :

a) On constate d'abord que, puisque E et F_1 commutent, on a, pour $(r, \alpha) \in E$ et $(I, \beta) \in F_1$,

$$(r, \alpha + r\beta) = (r, \alpha) \cdot (I, \beta) = (I, \beta)(r, \alpha) = (r, \beta + \alpha)$$

donc

$$r\beta = \beta.$$

Tout $r \in \pi_1(H) (= \pi_1(L) \subset \pi_1(E))$ laisse donc fixe tout $\beta \in F_1$ et, par voie de conséquence, laisse invariant globalement l'orthogonal F_2 de F_1 dans W .

b) Tout élément de L s'écrit de manière unique :

$$(r, \lambda(r)) = (r, \lambda'(r)) \cdot (I, \lambda''(r))$$

avec $(r, \lambda'(r)) \in E$ et $(I, \lambda''(r)) \in F_1$,

c'est à dire :

$$\begin{aligned} (r, \lambda(r)) &= (r, \lambda'(r) + r\lambda''(r)) \\ &= (r, \lambda'(r) + \lambda''(r)) \quad \text{d'après le point a.} \end{aligned}$$

Mais $\lambda'(r)$ se décompose lui-même de manière unique en :

$$\lambda'(r) = \lambda'_1(r) + \lambda_2(r)$$

avec $\lambda'_1(r) \in F_1$ et $\lambda_2(r) \in F_2$.

On a ainsi, en posant $\lambda_1(r) = \lambda'_1(r) + \lambda''(r)$, une décomposition unique de tout élément de L :

$$(r, \lambda(r)) = (r, \lambda_1(r) + \lambda_2(r))$$

avec $\lambda_1(r) \in F_1$ et $\lambda_2(r) \in F_2$.

c) $(r, \lambda'(r))$ restant dans un compact fixe E de G quand r décrit $\pi_1(H)$, $\lambda'(r)$ reste, lui, dans un compact fixe de \mathbb{R}^n et il en est de même de sa composante sur F_2 . $\lambda_2(r)$ reste donc dans un compact fixe K_2 de F_2 quand r décrit $\pi_1(H)$.

d) Suivant le lemme 3, on a, pour r et $r' \in \pi_1(H)$:

$$\lambda_1(rr') + \lambda_2(rr') = (\lambda_1(r) + \lambda_2(r)) + r(\lambda_1 r') + \lambda_2(r')$$

qui vaut, d'après le point a :

$$= (\lambda_1(r) + \lambda_1(r')) + (\lambda_2(r) + r\lambda_2(r')) .$$

Comme, toujours par le point a , $r\lambda_2(r')$ reste dans F_2 , on obtient par identification :

$$\lambda_1(rr') = \lambda_1(r) + \lambda_1(r')$$

L'ensemble $W_1 = \{\lambda_1(r) ; r \in \pi_1(H)\}$ est donc un sous-groupe vectoriel de F_1 et il est clair que $W_0 \oplus W_1$ est engendré par les directions asymptotiques de $\pi_2(H)$.

e) Soit p la projection orthogonale de \mathbb{R}^n sur W . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\pi_1} & \pi_1(H) \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \pi_2(H) & \xrightarrow{P} & \lambda(\pi_1(H)) \end{array}$$

$\lambda(\pi_1(H))$, image par l'application continue $p \circ \pi_2$ du connexe H , est donc connexe ainsi que sa projection orthogonale W_1 sur F_1 . W_1 est donc un sous-espace vectoriel de W . On note W_2 son orthogonal dans W et la proposition est démontrée.

II.- Un critère de transience de $H \backslash G$.

Notations :

Pour tout compact B de W_2 on note \tilde{B} la partie de G définie par $\tilde{B} = SO(n) \times (W_0 \oplus W_1 \oplus B)$ et π représente la projection canonique de G dans $H \backslash G$.

PROPOSITION 3 :

1) Pour tout compact K de $H \backslash G$, il existe un compact B de W_2 tel que

$$\pi^{-1}(K) \subset \tilde{B} .$$

2) Pour tout compact B de W_2 , il existe un compact K de $H \backslash G$ tel que

$$\pi(\tilde{B}) \subset K .$$

Démonstration :

a) Pour tout compact K de $H \backslash G$, il existe un compact K' de G tel que $\pi(K') = K$, donc tel que

$$\pi^{-1}(K) = H.K' = \bigcup_{g \in H} g.K' .$$

Or tout élément g de H s'écrit , avec les notations de la proposition 2

$$g = (r, \lambda_0 + \lambda_1(r) + \lambda_2(r))$$

avec $\lambda_0 \in W_0$, $\lambda_1(r) \in W_1$, $\lambda_2(r) \in K_2$, d'où

$$g.K' = \{(rs, \lambda_0 + \lambda_1(r) + \lambda_2(r) + r\alpha) ; (s, \alpha) \in K'\} .$$

Si p_2 est la projection orthogonal de \mathbb{R}^n sur W_2 , on a donc :

$$p_2 \circ \pi_2(g.K') = \{\lambda_2(r) + p_2(r\alpha) ; (s, \alpha) \in K'\}$$

et donc

$$p_2 \circ \pi_2(g.K') \subset K_2 + r p_2 \circ \pi_2(K')$$

qui reste dans un compact fixe B de W_2 quand r décrit $\pi_1(H)$.

On a ainsi :

$$\pi^{-1}(K) = \bigcup_{g \in H} g.K' \subset \tilde{B} .$$

b) Soit B un compact de W_2 et $(s, \alpha) \in \tilde{B}$.

Pour tout $(s', \alpha') \in G$ tel que $\pi(s', \alpha') = \pi(s, \alpha)$, il existe $g \in H$ tel que

$$\begin{aligned} (s', \alpha') &= g.(s, \alpha) \\ &= (r, \lambda_0 + \lambda_1(r) + \lambda_2(r)).(s, \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) \\ &= (rs, \lambda_0 + \lambda_1(r) + \lambda_2(r) + r\alpha_0 + r\alpha_1 + r\alpha_2) \end{aligned}$$

où $r \in \pi_1(H)$; $\lambda_0, \alpha_0 \in W_0$; $\lambda_1(r), \alpha_1 \in W_1$; $\lambda_2(r) \in K_2$; $\alpha_2 \in B$.

Mais on sait (lemmes 2 et 4) que λ_0 et α_0 se décomposent eux-mêmes de façon unique en $\lambda_0 = v + c$ et $\alpha_0 = v' + c'$ avec $u, v' \in V$ et $c, c' \in C$. L'égalité des projections $\pi(s', \alpha') = \pi(s, \alpha)$ n'est possible que si :

$$\alpha' = (v + rv') + (c + rc') + (\lambda_1(r) + \alpha_1) + (\lambda_2(r) + r\alpha_2)$$

Mais λ_1 étant par définition surjective sur W_1 on peut choisir $r \in \pi_1(H)$ tel que $\lambda_1(r) = -\alpha_1$. Il suffit alors de prendre $v = -rv'$ pour que :

$$\alpha' \in C + rC + K_2 + rB.$$

C étant relativement compact, il existe un compact fixe K' de \mathbb{R}^n qui contienne $C + K_2 + r(C + B)$ pour tout $r \in \pi_1(H)$.

Alors :

$$\pi(\tilde{B}) \subset \{\pi(s', \alpha') ; s' \in SO(n) ; \alpha' \in K'\} = \pi(SO(n) \times K')$$

qui est un compact de $H \backslash G$.

Corollaire 1 : Une condition nécessaire et suffisante pour que $H \backslash G$ soit transitoire est que toute probabilité μ adaptée et étalée sur G satisfasse à la condition :

$$(A'') \quad (\exists g \in G) (\exists B, \text{ compact de } W_2) (\tilde{U}_\mu(g, B) = \sum_n \varepsilon_g * \mu^{*n}(B) < +\infty)$$

$$\text{ou } (A''') \quad (\forall g \in G) (\forall B, \text{ compact de } W_2) (\tilde{U}_\mu(g, B) < +\infty)$$

Démonstration :

Soit $g \in G$, $x = \pi(g)$, Z_n^g la marche de loi μ sur G partant de g et $Y_n^x = \pi(Z_n^g)$.

Lorsque Y_n^x passe dans un compact de $H \backslash G$, Z_n^g passe dans un \tilde{B} et

inversement, $\tilde{U}_\mu(g, B)$ est le potentiel de \tilde{B} pour la marche Z_n^g d'où le résultat.

Corollaire 2 : La condition $n-d \geq 3$ du théorème est nécessaire.

Démonstration :

Si $\dim W_2 = n-d \leq 2$, on peut construire explicitement sur $H \backslash G$ une marche aléatoire de loi μ telle que tout élément de $H \backslash G$ soit μ -récurrent ; il suffit pour cela, d'après le corollaire 1, que le potentiel \tilde{U} en e d'un compact B de W_2 soit infini. C'est le cas si $\mu = \sigma \otimes \nu_1 \otimes \nu_2$ où σ est la mesure de Haar de $SO(n)$ et $\nu_1 \otimes \nu_2$ la mesure gaussienne centrée et réduite sur \mathbb{R}^n avec ν_1 portée par $W_0 \oplus W_1$ et ν_2 portée par W_2 . En effet on a alors :

$$\tilde{U}(e, B) = \sum_n \nu_2^{*n}(B)$$

qui est infini d'après un résultat classique sur la récurrence de \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ([9]).

3ème étape :

On conserve les notations précédentes.

PROPOSITION 4 : Si $n-d \geq 3$, la condition (A) est satisfaite dès que μ admet un moment d'ordre 3 (en fait $2 + \delta$, $\delta > 0$ suffit).

Démonstration :

C'est une conséquence évidente du corollaire 1 et du lemme suivant :

LEMME 5 : Si μ , probabilité adaptée et étalée sur G , possède un moment d'ordre 3 (c'est-à-dire si $\int_G |\pi_2(g)|^3 d\mu(g) < +\infty$) et si $n-d \geq 3$, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, à tout compact B de W_2 on puisse associer un compact B' de W_2 et une constante $k > 0$ tels que, si $g \notin \tilde{B}'$, on ait :

$$\tilde{U}_\mu(g, B) \leq \frac{k}{|p_2 \circ \pi_2(g)|^{2\alpha}} .$$

Démonstration :

Il suffit d'adapter [6] (pages 80-88) où on établit le même résultat pour

les compacts de G . On y remplace les compacts K de G par des \tilde{B} où B est un compact de W_2 et on choisit comme fonction barrière la fonction f_α définie par :

$$f_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - \frac{1}{(x_1^2 + \dots + x_{n-d}^2)^\alpha} .$$

On peut trouver le détail de cette démonstration dans ([3]).

4ème étape : Fin de la démonstration du théorème.

PROPOSITION 5 : Si $n-d \geq 3$, toute probabilité μ adaptée et étalée sur G satisfait à (A).

Notations :

- 1) $\overset{v}{\mu}$ est la probabilité sur G définie par $d\overset{v}{\mu}(g) = d\mu(g^{-1})$
- 2) $c = \int_G e^{-|\pi_2(g)|} d\mu(g)$ (on a : $0 < c < 1$ car μ est adaptée sur G)
- 3) ν est la probabilité symétrique sur G définie par

$$d\nu(g) = \frac{1}{c} e^{-|\pi_2(g)|} d\left(\frac{\mu + \overset{v}{\mu}}{2}\right)(g) .$$

- 4) Pour toute probabilité ρ sur G on définit sur $H \setminus G$ le noyau de transition P_ρ et le noyau potentiel U_ρ par :

$$\forall x \in H \setminus G, \quad \forall f \text{ borélienne et bornée sur } H \setminus G, \quad P_\rho f(x) = \int_G f(xg) d\rho(g)$$

$$\forall x \in H \setminus G, \quad \forall K \subset H \setminus G, \quad U_\rho(x, K) = \sum_{n \geq 1} P_{\rho^{*n}} \mathbb{1}_K(x) .$$

- 5) Soit m une mesure invariante sur $H \setminus G$ (il en existe puisque G est de type R) ; On note $L^2(H \setminus G)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable par rapport à m et par $\langle f, f' \rangle$ le produit scalaire correspondant. Tout noyau de transition P_ρ se prolonge alors en un opérateur sur $L^2(H \setminus G)$ qu'on notera encore P_ρ .

LEMME 6 : $\forall \alpha \in]0, 1[$, la forme bilinéaire $\langle (I - \alpha P_\nu) \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique et positive.

Démonstration : Pour f et $f' \in L^2(\mathbb{H} \setminus G)$ on a :

$$\langle (I - \alpha P_\nu) f, f' \rangle = \langle f, f' \rangle - \alpha \int_M \int_G f(xg) f'(x) d\nu(g) dm(x)$$

En posant $h = g^{-1}$ et $x = yh$ on a , ν étant symétrique et m invariante,

$$\begin{aligned} \langle (I - \alpha P_\nu) f, f' \rangle &= \langle f', f \rangle - \alpha \int_M \int_G f'(yh) f(y) d\nu(h) dm(y) = \\ &= \langle (I - \alpha P_\nu) f', f \rangle \end{aligned}$$

La forme est positive car, l'opérateur P_ν étant de norme 1 , l'opérateur $(I - \alpha P_\nu)$ est positif.

LEMME 7 :

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \forall f \in L^2(\mathbb{H} \setminus G) , c \langle (I - \alpha P_\nu) f, f \rangle \leq \langle (I - \alpha P_\mu) f, f \rangle$$

Démonstration :

La mesure ρ sur G définie par :

$$d\rho(g) = \frac{1 - e^{-|\alpha_2(g)|}}{1 - c} d\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)(g)$$

est une probabilité. Par conséquent l'opérateur $I - \alpha P_\rho$ est positif pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

On a d'autre part, pour toute $f \in L^2(\mathbb{H} \setminus G)$,

$$\begin{aligned} \langle P_\mu^\nu f, f \rangle &= \int_M \int_G f(x) f(xg) d\mu(g^{-1}) dm(x) \\ &= \int_M \int_G f(yh) f(y) d\mu(h) dm(y) \\ &= \langle P_\mu f, f \rangle . \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\langle P_{\frac{\mu + \nu}{2}}^\nu f, f \rangle = \langle P_\mu f, f \rangle .$$

On a donc pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et tout $f \in L^2(\mathbb{H} \setminus G)$,

$$\begin{aligned} \langle (I - \alpha P_\mu) f, f \rangle - c \langle (I - \alpha P_\nu) f, f \rangle &= \langle (I - \alpha P_{\frac{\mu + \nu}{2}}) - c I + \alpha c P_\nu \rangle f, f \rangle \\ &= (1 - c) \langle (I - \alpha P_\rho) f, f \rangle \geq 0 . \end{aligned}$$

LEMME 8 :

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \forall f \in L^2(\mathbb{H} \backslash G) , c^{-1} \langle (I - \alpha P_\nu)^{-1} f, f \rangle \geq \langle (I - \alpha P_\mu) f, f \rangle$$

Démonstration :

Pour toutes $\varphi, \varphi' \in L^2(\mathbb{H} \backslash G)$ on a, grâce au lemme 6, l'inégalité de Schwarz :

$$\langle \varphi, (I - \alpha P_\nu) \varphi' \rangle^2 \leq \langle \varphi, (I - \alpha P_\nu) \varphi \rangle \cdot \langle \varphi', (I - \alpha P_\nu) \varphi' \rangle .$$

L'opérateur $I - \alpha P_\nu$ étant positif, on a donc, grâce au lemme 7 :

$$\langle \varphi, (I - \alpha P_\nu) \varphi' \rangle^2 \leq c^{-1} \langle \varphi, (I - \alpha P_\mu) \varphi \rangle \cdot \langle \varphi', (I - \alpha P_\nu) \varphi' \rangle .$$

Les opérateurs $I - \alpha P_\mu$ et $I - \alpha P_\nu$ étant inversibles, on a en particulier, en posant $\varphi = (I - \alpha P_\mu)^{-1} f$ et $\varphi' = (I - \alpha P_\nu)^{-1} f$:

$$\langle (I - \alpha P_\mu)^{-1} f, f \rangle^2 \leq c^{-1} \langle (I - \alpha P_\mu)^{-1} f, f \rangle \cdot \langle (I - \alpha P_\nu)^{-1} f, f \rangle$$

Le résultat en découle puisque $(I - \alpha P_\mu)^{-1}$ est aussi un opérateur positif.

LEMME 9 :

$$\forall K, \text{ compact de } \mathbb{H} \backslash G, \langle U_\mu(\cdot, K), \mathbb{1}_K \rangle \leq c^{-1} \langle U_\nu(\cdot, K), \mathbb{1}_K \rangle .$$

Démonstration :

Pour toute $f \in L^2(\mathbb{H} \backslash G)$ et tout $\alpha \in]0, 1[$ on a, grâce au lemme 8,

$$\sum_n \alpha^n \langle P_\mu * n f, f \rangle \leq c^{-1} \sum_n \alpha^n \langle P_\nu * n f, f \rangle$$

d'où

$$\langle \sum_n P_\mu * n f, f \rangle \leq c^{-1} \langle \sum_n P_\nu * n f, f \rangle .$$

Le résultat en découle en posant $f = \mathbb{1}_K$.

Démonstration de la proposition 5 :

ν possède évidemment un moment d'ordre 3 et satisfait donc à (A) d'après le résultat de la 3ème étape. Soit K un compact de $\mathbb{H} \backslash G$. $U_\nu(\cdot, K)$ étant bornée, $\langle U_\nu(\cdot, K), \mathbb{1}_K \rangle$ reste fini ainsi que $\langle U_\mu(\cdot, K), \mathbb{1}_K \rangle$ d'après le lemme 9, d'où le résultat puisque $U_\mu(\cdot, K)$ ne peut être qu'infini ou borné.

Remarque : On vient en fait d'établir un nouveau critère de transience dont l'idée provient de [1] :

PROPOSITION 6 : H étant un sous-groupe fermé d'un groupe G tel que $\mathbb{H} \backslash G$ possède une mesure invariante, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{H} \backslash G$ soit transitoire est que toute marche symétrique sur $\mathbb{H} \backslash G$ ayant des moments de tous ordres soit transitoire.

