ALAIN HUARD

Une caractérisation des marches aléatoires récurrentes des espaces homogènes du groupe des déplacements de R^d

Astérisque, tome 74 (1980), p. 139-147
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__139_0>

UNE CARACTÉRISATION DES MARCHES ALÉATOIRES RÉCURRENTES DES ESPACES HOMOGÈNES DU GROUPE DES DÉPLACEMENTS DE R^d

Alain HUARD

Soit G_d le groupe des déplacements de R^d, H un sous groupe fermé connexe de G_d, M l'espace homogène droit $_H\backslash G_d$ et π la projection canonique de G_d sur M.

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilités, $X_i = (U_i,Y_i)$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi μ sur G_d ; P (respectivement Q) désigne le noyau de transition, U (respectivement N) le noyau potentiel, de la marche aléatoire droite de loi μ sur G_d (respectivement de la marche aléatoire de loi μ sur M).

π_1 désigne la projection de G_d sur (I_d,R^d), V le supplémentaire orthogonal dans $\pi_1(G_d)$ de l'espace vectoriel engendré par les directions asymptotiques de $\pi_1(H)$.

Nous savons que si $\dim V \leq 2$, M est récurrent, et qu'il est transitoire sinon. Nous allons nous attacher à essayer de caractériser les marches aléatoires récurrentes dans le cas où $\dim V \leq 2$, et ceci à l'aide de deux méthodes differentes, l'une utilisant le théorème central limite sur G_d, l'autre la méthode des fonctions barrières.

I - UTILISATION DU THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Théorème.- Soit μ une probabilité adaptée étalée sur G_d.
Si : 1) *$\dim V = 2$*
2) *μ admet un moment d'ordre 2 (ie : si $\int_{G_d} |\lambda(g)|^2 d\mu(g) < +\infty$, où λ désigne la composante de translation) la marche aléatoire de loi μ sur M est récurrente.*

Démonstration : Nous allons montrer que le potentiel d'un compact K_o de M est infini. L'espace vectoriel V s'identifie à R^2. On appelle cylindre de G_d un sous ensemble de la forme $\mathcal{C} = SO(n)\times(B \oplus V^{\perp})$, où B est un compact de V.

B s'appelle la base du cylindre $\mathcal{C}$ et l'on notera $\mathcal{C}_{\tau,M}$ (respectivement $\mathcal{C}_M$) le cylindre de base le disque fermé de centre τ (respectivement 0) dans V, et de rayon M. D'après la décomposition de Lévi-Malcev, nous pouvons supposer H résoluble, et dans ce cas, l'image par π de tout cylindre de G_d est contenue dans un compact K de M (cf [2]).

Soient K_τ l'image par π de $\mathcal{C}_{\tau,1}$ et K_M celle de $\mathcal{C}_M$. Pour M assez grand ($M \geqslant 10$), $\mathcal{C}_M$ peut être recouvert par $4M^2$ cylindres $\mathcal{C}_\tau$. Soit I l'ensemble des centres τ (que l'on identifie aux éléments $(I_d,(\tau,0))$ de G_d où $(\tau,0)$ désigne l'élément de R^d dont les composantes sont 0 sur $V^\perp$ et qui coïncide avec τ sur V. Il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=o}^{n} \mu^k(\mathcal{C}_M) &\leqslant \sum_{\tau\in I} \sum_{k=o}^{n} \mu^k(\mathcal{C}_{\tau,1}) \\ &\leqslant \sum_{\tau\in I} \sum_{k=o}^{n} P^k(\mathcal{C}_{\tau,1}) \\ &\leqslant \sum_{\tau\in I} \sum_{k=o}^{n} Q^k(\pi(\mathcal{C}_{\tau,1})) \\ &\leqslant \sum_{\tau\in I} \sum_{k=o}^{n} Q^k(x,K_1)\end{aligned}$$

où x désigne un point de M tel que $\pi(-\tau) = x$, et K_1 l'image par π de $\mathcal{C}_1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=o}^{n} \mu^k(\mathcal{C}_M) &\leqslant \sum_{\tau\in I} N(x,K_1) \\ &\leqslant 4M^2 \sup_{\tau\in I} N(x,K_1) \\ &\leqslant 4M^2 \sup_{x\in M} N(x,K_1) \\ &\leqslant 4M^2 \sup_{x\in K_1} N(x,K_1)\end{aligned}$$

d'après le principe du maximum.

Soit K_o un compact de M tel que $x.K_1$ reste dans K_o pour tout x de K_1

$$\sum_{k=o}^{n} \mu^k(\mathcal{C}_M) \leqslant 4M^2\, N(K_o).$$

Choisissons maintenant à ε fixé, $M = 2\varepsilon\sqrt{n}$. Alors

$$N(K_o) \geqslant \frac{1}{16n\varepsilon^2} \sum_{k=o}^{n} \mu^k(\mathcal{C}_{2\varepsilon\sqrt{n}}).$$

Considérons maintenant une famille $X_i = (U_i, Y_i)$ de variables aléatoires indépendantes sur G_d, de même loi μ. Notons μ_1 la loi des Y_i, $\mu^k_{1,n}$ la loi des variables aléatoires

$$\frac{T^g_k}{\sqrt{n}} = \frac{\lambda + vY_1 + U_1Y_2 + \ldots + U_1 \ldots U_{k-1}Y_k}{\sqrt{n}}$$

et $\bar{\mu}^k_n$ la loi marginale sur V.

Alors, $\sum_{k=o}^{n} \mu^k(\mathscr{C}_{2\varepsilon\sqrt{n}}) = \sum_{k=o}^{n} \bar{\mu}^k_n(B_{2\varepsilon})$ (où $B_{2\varepsilon}$ est la base du cylindre $\mathscr{C}_{2\varepsilon}$).

Soit f_ε définie sur R^2, à valeurs dans R^+, continue telle que

$$1_{B_\varepsilon} \leqslant f_\varepsilon \leqslant 1_{B_{2\varepsilon}} .$$

Il vient $N(K_o) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{16n\varepsilon^2} \sum_{k=o}^{n} \bar{\mu}^k_n(f_\varepsilon) = \alpha(\varepsilon)$.

Il suffit à présent de montrer que $\alpha(\varepsilon) \to +\infty$ si $\varepsilon \to 0$.

Cette démonstration repose sur le théorème central limite sur le groupe G_d (cf [3]) :

Soit Z^g_n la marche aléatoire droite de loi μ sur G_d, associée aux variables aléatoires $X_i = (U_i, Y_i)$, partant de g à l'instant 0, et T^g_n sa composante de translation.

Alors, si $d \geqslant 2$

si la loi des U_i est adaptée dans $SO(d)$

si μ admet un moment d'ordre 2

la variable aléatoire $\frac{T^g_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi, quand n tend vers l'infini vers $\gamma = \mathcal{N}(0, \theta I_d)$ la loi normale sur R^d centrée, de covariance θI_d (avec $\theta > 0$ si de plus μ est adaptée).

Ce théorème s'applique à la situation présente. Par suite, la loi marginale sur V, $\bar{\mu}^k_k$, converge également, lorsque k tend vers l'infini, vers $\bar{\gamma} = \mathcal{N}(0, \theta I_2)$, la loi normale sur R^2, centrée et de covariance θI_2. Notons $\bar{\gamma}^k_n$ la loi normale sur R^2, centrée et de covariance $\frac{k}{n}\theta I_2$. Le lemme suivant, démontré dans (1) nous permettra de remplacer $\bar{\mu}^k_n$ par $\bar{\gamma}^k_k$ dans $\alpha(\varepsilon)$.

Lemme : Soit f continue, positive, à support compact sur R^2.

Alors : $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\bar{\mu}^k_n(f) - \bar{\gamma}^k_n(f)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Par suite,

$$\alpha(\varepsilon) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{16n\varepsilon^2} \sum_{k=o}^{n} \bar{\gamma}_n^{k}(f_\varepsilon)$$

$$\alpha(\varepsilon) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{16n\varepsilon^2} \sum_{k=o}^{n} \bar{\gamma}_n^{k}(B_\varepsilon)$$

Mais $\gamma_n^k(B_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi\theta} \frac{n}{k} \iint_{R^2} 1_{B_\varepsilon}(x,y) e^{-\frac{1}{2}\frac{n}{k}\frac{x^2+y^2}{\theta}} dx\, dy$

Un calcul simple nous montre alors que

$$\alpha(\varepsilon) \geqslant \frac{\theta}{8} \int_0^{\frac{2\theta}{\varepsilon^2}} (1-e^{-\frac{1}{u}})du$$

et tend donc vers l'infini lorsque ε tend vers 0.

Le potentiel du compact K_o est infini. La marche aléatoire de loi μ sur M est donc récurrente.

II - LA MÉTHODE DES FONCTIONS BARRIÈRES

Théorème 2.- Soit μ une probabilité adaptée étalée sur G_d si 1) dim $V = 1$.
2) il existe $\delta > 0$ tel que μ admette un moment d'ordre $2+\delta$, alors la marche aléatoire de loi μ sur M est récurrente.

1) Deux lemmes préliminaires :

Lemme 1.- Soit μ une mesure de probabilité sur R et P le noyau de transition de la marche aléatoire droite associée. S'il existe une fonction f de R dans R^+, telle que $Pf(x) \leqslant f(x)$ pour x en dehors d'un compact et tel que $f(x)$ tende vers l'infini avec $|x|$, alors la marche aléatoire droite de loi μ est récurrente.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons la marche transitoire.

Soit K le compact en dehors duquel $Pf(x) \leqslant f(x)$.

On a donc, pour $x \notin K$, et X de loi μ

$$E\{f(x+X)\} \leqslant f(x).$$

Soit X_n la marche de loi μ et T_K le temps d'entrée dans K.

En considérant la marche arrêtée au temps T_K, on aura

$$E_x\{f(X_{n\wedge T_K})\} \leqslant f(x)$$

Mais $$E_x\{f(X_{n\wedge T_K})\} = E_x\{f(X_{T_K}) \; ; \; n > T_K\} + E_x\{f(X_n) \; ; \; n \leqslant T_K\}$$

La marche étant transitoire, il existe $x \notin K$ et $a > 0$ tels que $P_x\{T_K = +\infty\} = a$. Par suite, pour tout $M > 0$ il existe N tel que si $n > N$, alors

$$E_x\{f(X_n), n < T_K\} \geqslant \frac{Ma}{2}$$

M peut être choisi assez grand pour que $\frac{Ma}{2} > f(x)$, ce qui contredit l'hypothèse.

Lemme 2.- Soit X une variable aléatoire réelle centrée, admettant un moment d'ordre $2+\delta$, et soit $f : R \to R^+$

$$x \to |x|^{1/2}$$

Alors $E\{f(x+X)\} \leqslant f(x)$ pour x assez grand.

Démonstration :

* Considérons le développement en série de Mac Laurin suivant :

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{u^2}{2} + \ldots$$

Il converge pour $|u| < 1$ et il existe C tel que, si $|u| < C$

$$(1+u)^{1/2} < 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{16}$$

* $$E\{f(x+X)\} = E\{f(x+X) \; ; \; |X| < C|x|\} + E\{f(x+X) \; ; \; |X| > C|x|\}$$

Regardons le premier terme du membre de droite :

$$E\{f(x+X) \; ; \; |X| \leqslant C|x|\} = |x|^{1/2}E\{(1+\frac{X}{x})^{1/2} \; ; \; |X| \leqslant C|x|\}$$

$$\leqslant |x|^{1/2}\Big[P\{|X| \leqslant C|x|\} +$$

$$+ \frac{1}{2|x|} E\{X \; ; \; |X| \leqslant C|x|\} - \frac{1}{16x^2} E\{X^2 \; ; \; |X| \leqslant C|x|\}\Big]$$

X étant centrée, on peut remplacer $E\{X;|X|<C|x|\}$ par $E\{X;|X|>C|x|\}$.

De plus $E\{X ; |X| > C|x|\} \leqslant E(X^2)^{1/2}P\{|X| > C|x|\}^{1/2}$

$$\leqslant \frac{E(X^2)^{1/2}E\{|X|^{2+\delta}\}^{1/2}}{C^{1+\frac{\delta}{2}}|x|^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

donc $\frac{1}{2|x|} E\{X ; |X| \leqslant C|x|\} \leqslant C_1 \frac{1}{|x|^{2+\frac{\delta}{2}}}$

Il existe alors K_1 tel que pour $|x| > K_1$,

$$\frac{C_1}{|x|^{2+\frac{\delta}{2}}} < \frac{E\{X^2 ; |X| \leqslant C|x|\}}{16x^2}$$

et donc $E\{f(x+X) ; |X| \leqslant C|x|\} \leqslant |x|^{1/2}\left[1-P\{|X|>C|x|\} - \frac{E\{X^2;|X|\leqslant C|x|\}}{32x^2}\right]$

* Regardons à présent le second terme

$$E\{f(x+X) ; |X| > C|x|\} \leqslant |x|^{1/2}E\{|1 + \frac{X}{x}|^{1/2} ; |X| > C|x|\}$$

$$\leqslant |x|^{1/2}\left[P\{|X| > C|x|\} + E\{|\frac{X}{x}|^{1/2} ; |X| > C|x|\}\right]$$

Rassemblons les deux termes ; il vient, pour $|x| > K_1$

$$E\{f(x+X)\} \leqslant |x|^{1/2}\left[1 + \frac{E\{|X|^{1/2};|X| > C|x|\}}{|x|^{1/2}} - \frac{E\{|X|^2;|X| \leqslant C|x|\}}{32x^2}\right]$$

Par l'inégalité de Hölder appliquée à L_4 et $L_{4/3}$, il vient :

$$\frac{E\{|X|^{1/2} ; |X| > C|x|\}}{|x|^{1/2}} \leqslant \frac{E(X^2)^{1/4}P\{|X| > C|x|\}^{3/4}}{|x|^{1/2}}$$

$$\leqslant \frac{E(X^2)^{1/4}E(|X|^{2+\delta})^{3/4}}{C^{(2+\delta)3/4}|x|^{(2+\delta)3/4}|x|^{1/2}}$$

$$\leqslant \frac{C_2}{|x|^{2+3\delta/4}}$$

Il existe donc K_2, tel que pour $|x| > K_2$, on ait

$$\frac{E\{|X|^{1/2}\ ;\ |X| > C|x|\}}{|x|^{1/2}} \leqslant \frac{E\{X^2\ ;\ |X| \leqslant C|x|\}}{32x^2}$$

et pour $|x| > \sup(K_1,K_2)$, il vient $E\{f(x+X)\} \leqslant f(x)$.

2) Récurrence des marches aléatoires sur M

Considérons la marche aléatoire droite $Z_n^g = gX_1\dots X_n$ de loi μ sur G_d satisfaisant aux hypothèses énoncées. Par invariance à gauche des marches droites, nous pouvons supposer que la composante des rotations de g est l'identité.

Remarquons que l'on peut remplacer la marche de pas (U_i,Y_i) par la marche de pas $\sigma(U_i,Y_i)$ où σ est un automorphisme intérieur du groupe G_d par un élément de la forme (I_d,λ) sans rien changer au résultat annoncé : cet automorphisme ne change pas le comportement à l'infini de la norme de la projection sur V de la composante de translation.

Considérons alors $(\tilde{U}_i,\tilde{Y}_i) = (I_d,\lambda)(U_i,Y_i)(I_d,\lambda)^{-1}$

Il vient $\tilde{Y}_i = \lambda+Y_i-U_i\lambda$

$$E(\tilde{Y}_i) = \lambda+E(Y_i)-\lambda E(U_i).$$

Cherchons λ tel que $E(\tilde{Y}_i) = 0$, c'est-à-dire

$$(I_d-E(U_i))\lambda = -E(Y_i).$$

Un tel λ existe, puisque sinon $\det[I_d-E(U_i)] = 0$, et donc 1 et valeur propre de la matrice $E(U_i)$. Il existe alors $\gamma \in R^d$, de norme 1 tel que

$$E(U_i).\gamma = E(U_i.\gamma) = \gamma$$

$U_i.\gamma$ appartient à la sphère unité de R^d qui est strictement convexe. Il en résulte que $U_i.\gamma = \gamma$ presque sûrement, et donc que la mesure image de μ sur $SO(d)$ ne charge que le sous groupe d'isotropie de γ, ce qui est absurde puisqu'on l'a supposée adaptée.

Nous pourrons donc supposer $E(Y_i) = 0$.

Pour achever la démonstration, nous allons montrer que le potentiel d'un cylindre $\mathscr{C} = SO(d)\ (B \oplus V^{\perp})$ de G_d est infini (où la base B du cylindre est un compactde l'espace vectoriel V identifié à R).

Ce potentiel s'écrit $U(g,\mathcal{B}) = \sum_{n=o}^{\infty} \varepsilon_g * \mu^n(\mathcal{B})$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \varepsilon_{p_1(\lambda(g))} * \bar{\mu}^n(B) = \bar{N}(g,B)$$

en intégrant selon les composantes de $V^{\perp}$ (p_1 désigne la projection sur V), $\bar{N}(g,B)$ est le potentiel de B pour la marche aléatoire projection sur V de la marche aléatoire droite de loi μ sur G_d. Il suffit donc de montrer que cette marche est récurrente.

D'après le lemme 2 :

$$E\{(\pi_1 \circ f)((I_d,\lambda)(U_1,Y_1))\} = E\{|p_1(\lambda+Y_1)|^{1/2}\} \leqslant |p_1(\lambda)|^{1/2}$$

Il faut vérifier que cette conclusion est valide à tous les pas de la marche, et pour cela il suffit de vérifier qu'elle l'est au deuxième pas, c'est-à-dire que

$$E\{|p_1(\lambda+Y_1+U_1Y_2)|^{1/2}\} \leqslant E\{|p_1(\lambda+Y_1)|^{1/2}\}$$

Y_2 étant indépendante de (U_1,Y_1), on peut supposer (U_1,Y_1) et (U_2,Y_2) définies sur un espace de probabilité produit $\Omega_1 \times \Omega_2$. Y_2 étant centrée et admettant un moment d'ordre $2+\delta$ sur Ω_2, $U_1(\omega_1)Y_2(\omega_2)$ le sera également pour tout ω_1.

Nous pouvons donc appliquer le lemme 1 : La marche aléatoire projection sur V de la marche de pas (u_i,Y_i) sur G_d est récurrente. Par suite, la marche de loi μ sur M l'est également.

Résumé en anglais

We give a caracterisation of recurrent random walks on homogeneous spaces of motion group of eucludian space R^d by using two different ways : the central limit theorem and the technic of cleavage functions. We prove that when the space M is recurrent and the measure that defines the random walk has a second order moment, the walk is recurrent.

BIBLIOGRAPHIE

(1) CREPEL P. - Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de R^2, dans lecture Notes Vol. 532 - Théorie Ergodique - Springer Verlag.

(2) GALLARDO L. - Sur deux classes de marches aléatoires - Thèse de 3ème cycle - Nancy 1977.

(3) GUIVARC'H Y., KEANE M., ROYNETTE B. - Marches aléatoires sur les groupes de Lie - Lecture Notes Vol. 624 - Springer Verlag.

(4) HUARD A. - Sur quelques aspects des marches aléatoires du groupe des déplacements de R^d et de ses espaces homogènes - Thèse de 3ème cycle Nancy 1978.

Alain HUARD

UER Sciences Mathématiques
UNIVERSITE DE NANCY I
Case officielle 140
54037 - NANCY CEDEX