

# Astérisque

YVES GUIVARC'H

**Théorèmes quotients pour les marches aléatoires**

*Astérisque*, tome 74 (1980), p. 15-28

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1980\\_\\_74\\_\\_15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__15_0)

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES QUOTIENTS POUR  
LES MARCHES ALÉATOIRES

Y. GUIVARC'H

Soit  $p$  une mesure de probabilité sur un groupe localement compact séparable  $G$ . On se propose d'étudier le comportement, au sens vague, de la suite de mesures de Radon  $\frac{p^n}{p^n(\phi)}$  où  $\phi$  est une fonction positive à support compact fixée. On peut montrer la convergence vers une mesure limite dans les cas où la représentation intégrale des fonctions propres de l'opérateur de convolution par  $p$  est connue. On traite en particulier le cas des groupes semi-simples [6] et le cas de certains groupes de type rigide ([4], [13]).

Dans le cas où  $G = \mathbb{R}^d$ , ce type de résultat s'appelle classiquement théorème quotient [15] et est une forme affaiblie des théorèmes locaux donnant un équivalent simple de  $p^n(\phi)$ .

Dans le cas  $G$  compact, ce type de résultat est très proche du théorème d'équirépartition de H. Weyl et peut s'obtenir par les mêmes méthodes [8].

Dans le cas non commutatif des problèmes de ce type apparaissent en [1] en relation avec les propriétés ergodiques des solutions d'équations différentielles à "temps" complexe. Divers cas particuliers ont été examinés par différents auteurs ([2], [3], [7], [19], [11], [12], [14]), souvent dans le but d'obtenir un équivalent de  $p^n(\phi)$ . La méthode suivie ici est celle de [12]; elle s'applique partiellement aux chaînes de Markov et les premiers résultats seront formulés dans ce cadre.

Soit  $E$  un espace métrique localement compact qui est réunion dénombrable de compacts sur lequel on désignera par  $C_K^+(E)$  l'ensemble des fonctions continues à support compact positives. Soit  $P$  une probabilité de transition sur  $E$  telle que, pour toute  $\phi$  de  $C_K^+(E)$ ,  $P(x, \phi)$  appartienne aussi à  $C_K^+(E)$ . On se propose d'étudier la suite  $P^n(x, \phi)$  [ $\phi \in C_K^+(E)$ ] et on sera amené à imposer à  $P$  diverses hypothèses d'irréductibilité qui seront vérifiées naturellement si  $E$  est discret ou si  $P$  définit une marche aléatoire sur un groupe  $G$ .

I.) Pour tous  $\psi$  et  $\phi$  de  $C_K^+(E)$ , il existe des réels  $\alpha_k$  en nombre fini tels que

$$\psi \leq \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_k P^k \phi .$$

I) Pour tout compact  $C$  de  $E$  et toute  $\phi$  de  $C_K^+(E)$ , il existe des réels  $\alpha_k$ , en nombre fini tels que l'on ait, pour tout  $n$  et tous  $x, y$  de  $C$

$$P^n \phi(x) \leq \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_k P^{n+k} \phi(y) .$$

I') L'énoncé est celui de I à la différence près que  $r = 1$  .

On peut remarquer que la condition I implique la condition  $I_0$  et lui est équivalente si  $E$  est discret.

II) Il existe un réel  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) et une probabilité de transition  $Q$  tels que  $P^2 = \alpha P + (1 - \alpha)Q$  .

Cette condition, de nature différente de  $I_0$  , I, I' implique, jointe à I , la condition I' car  $P$  étant dominé par  $P^2$  , les  $P^{n+k}$  ( $1 \leq k \leq r$ ) de I sont dominés par  $P^{n+r+1}$  ce qui fournit I' .

Le théorème très simple suivant comporte diverses conditions que l'on vérifiera ensuite et donne le plan de l'étude ultérieure.

Théorème 1.- Supposons que le noyau  $P$  vérifie  $I_0$  et que  $\frac{P^{n+1}(x,\phi)}{P^n(x,\phi)}$  converge, pour  $x \in E$  et  $\phi \in C_K^+(E)$  , vers un nombre  $c_0$  indépendant de  $x$  et  $\phi$  . Si l'équation  $P_\mu = c_0 \mu$  où  $\mu$  est une mesure de Radon positive a une solution unique, à un coefficient près, notée  $\mu_0$  , on a, pour tous  $x$  de  $E$  ,  $\phi$  et  $\psi$  de  $C_K^+(E)$  :

$$\lim_n \frac{P^n(x,\phi)}{P^n(x,\psi)} = \frac{\mu_0(\phi)}{\mu_0(\psi)} .$$

Preuve : Montrons la relative compacité de la suite de mesures de Radon

$\mu_n = \frac{P^n(x, \cdot)}{P^n(x, \psi)}$  où  $x$  et  $\psi$  sont fixés : d'après  $I_0$  , il existe des  $\alpha_k$  avec

$$\phi \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k P^k \psi$$

et donc  $P^n \phi \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k P^{n+k} \psi$  .

La condition de convergence de  $\frac{P^{n+1}(x,\psi)}{P^n(x,\psi)}$  implique que pour  $n$  assez grand  $P^{n+k} \psi(x) \leq 2 c_0 P^n \psi(x)$  ( $1 \leq k \leq r$ ) et donc

$$P^n(x,\phi) \leq 2 c_0 \left( \sum_{k=1}^r \alpha_k \right) P^n(x,\psi) .$$

On a de plus :

## THÉORÈMES QUOTIENTS

$\forall \phi \in C_K^+(E) \quad P\mu_n(\phi) = c_n \mu_n(\phi) \quad \text{où} \quad c_n = \frac{P^{n+1}(x, \phi)}{P^n(x, \phi)}$  et donc si  $\mu$  est une valeur d'adhérence de la suite  $\mu_n$  :

$$P\mu(\phi) = c \mu(\phi) \quad , \quad P\mu = c\mu \quad .$$

Comme de plus  $\mu_n(\psi) = 1$  , on a aussi  $\mu(\psi) = 1$  , ce qui, grâce à l'hypothèse d'unicité de  $\mu$  fournit  $\mu = \frac{\mu_0}{\mu_0(\psi)}$  .

La suite  $\mu_n$  ayant pour unique valeur d'adhérence  $\frac{\mu_0}{\mu_0(\psi)}$  converge vers cette mesure.

Remarque : Si la mesure  $\sum_0^\infty P^n(x, \cdot)$  est de Radon, on peut s'intéresser également à la convergence vague de la suite de mesures.

$$\pi_n = \frac{\sum_0^\infty P^k(x, \cdot)}{\sum_n^\infty P^k(x, \phi)}$$

où  $\phi$  est un élément fixé de  $C_K^+(E)$  .

Le raisonnement précédent montre que pour les hypothèses du théorème 1 ou de son corollaire on a la convergence de  $\pi_n$  vers  $\frac{1}{\mu_0(\phi)} \mu_0$  .

Pour une mesure de Radon  $\alpha$  à support compact et un élément  $\phi$  de  $C_K^+(E)$  on pose  $\rho_\alpha(\phi) = \overline{\lim}_n [\alpha(P^n\phi)]^{1/n}$  .

On définit une relation de préordre  $\prec$  sur les mesures de Radon par  $\alpha \prec \beta \iff$  pour toute  $\phi$  de  $C_K^+(E)$  , il existe des réels positifs  $c_k$  ( $1 \leq k \leq r$ ) tels que, pour tout entier  $n$  on ait

$$\alpha(P^n\phi) \leq \left( \sum_{k=1}^{k=r} c_k P^k\beta \right) (P^n\phi)$$

on a alors les propositions :

Proposition 1.— Supposons vérifiée la condition  $I_0$  et notons  $H_c$  le cône des mesures de Radon positives  $\mu$  vérifiant  $P\mu \leq c\mu$  . Alors  $H_c$  est à base compacte, le nombre  $\rho_\alpha(\phi)$  est indépendant de  $\phi$  et  $c_0 = \inf_\alpha \rho_\alpha = \text{Inf} \{c ; H_c \neq \{0\}\}$  . De plus, il existe une mesure de Radon positive  $\mu_0$  vérifiant  $P\mu_0 = c_0 \mu_0$  . Enfin si  $\alpha < \beta$  on a  $\rho_\alpha \leq \rho_\beta$  .

Preuve : Soit  $\psi \in C_K^+(E)$  ( $\psi \neq 0$ ) et montrons que  $\mu(\psi) > 0$  si  $\mu \in H_c$  ( $\mu \neq 0$ ) .

La condition I<sub>0</sub> fournit pour  $\phi \in C_K^+(E)$   $\phi \leq \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_k P^k \psi$

$$\mu(\phi) \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k P^k \mu(\psi) \leq \left( \sum_{k=1}^r \alpha_k c^k \right) \mu(\psi) .$$

La condition  $\mu(\psi) = 0$  entraîne donc  $\mu(\phi) = 0$  pour tout  $\phi$  de  $C_K^+(E)$  .  
Si  $\mu \neq 0$  , elle n'est donc pas vérifiée. Le même calcul montre la compacité au sens vague de l'ensemble des  $\mu$  de  $H_c$  vérifiant  $\mu(\psi) = 1$  . On a aussi

$$P^n \phi \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k P^{k+n} \psi$$

$$\alpha(P^n \phi) \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k \alpha(P^{k+n} \psi)$$

et  $\overline{\lim}_n [\alpha(P^n \phi)]^{1/n} \leq \overline{\lim}_n [\alpha(P^n \psi)]^{1/n}$  ce qui fournit  $\rho_\alpha(\phi) \leq \rho_\alpha(\psi)$  .

Soit  $c > c_0 = \inf_\alpha \rho_\alpha(\phi)$  et considérons  $\alpha$  avec  $c_0 \leq \rho_\alpha(\phi) < c$  .  
Considérons la mesure  $\mu$  définie par  $\mu = \sum_0^\infty \frac{1}{c^n} P^n \alpha$  . Elle vérifie la relation

$$P\mu = c\mu \quad \text{et donc} \quad P\mu \leq c\mu .$$

On a donc, pour  $c > c_0$   $H_c \neq \{0\}$  . Inversement, soit  $c$  un réel tel que  $H_c \neq \{0\}$  et  $\mu \neq 0$  , telle que  $P\mu \leq c\mu$  . On a alors pour  $\phi \in C_K^+(E)$   
 $\mu(P^n \phi) \leq c^n \mu(\phi)$  et si  $\alpha$  est une mesure de Radon positive à support compact dominée par  $\mu$  :

$$\alpha(P^n \phi) \leq c^n \mu(\phi) , \quad \rho_\alpha(\phi) \leq c .$$

Ceci prouve que  $c_0 = \text{Inf} \{c ; H_c \neq \{0\}\}$  .

L'intersection des cônes  $H_c$  ( $c > c_0$ ) n'est pas réduite à  $\{0\}$  car leurs bases sont compactes et totalement ordonnées par inclusion. On a donc  
 $\bigcap_{c > c_0} H_c = H_{c_0} \neq \{0\}$  .

L'action de  $P$  sur  $H_{c_0}$  est un opérateur continu et le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff fournit une mesure  $\mu_0$  vérifiant  $P\mu_0 = \lambda \mu_0$   $\mu_0 \in H_{c_0}$  .

Donc  $c_0 \leq \lambda < c_0$  et  $P\mu_0 = c_0 \mu_0$  .

Enfin, la relation  $\alpha < \beta$  s'écrit

$$\alpha(P^n \phi) \leq \sum_{k=1}^{k=r} \beta(P^{n+k} \phi)$$

pour  $\phi \in C_K^+(E)$  fixée  $\rho_\alpha = \rho_\alpha(\phi) \leq \rho_\beta(\phi) = \rho_\beta$  .

Proposition 2.- Sous la condition I, le nombre  $\rho_\alpha$  est indépendant de  $\alpha$  .  
Sous la condition I', la suite  $[P^n \phi(x)]^{1/n}$  a une limite pour tous  $\phi$  de  $C_K^+(E)$  et  $x$  dans  $E$  .

Preuve : On écrit, pour  $x$  et  $y$  dans un compact  $C$

$$P^n \phi(x) \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k P^{n+k} \phi(y) \text{ et si } \alpha, \beta \text{ sont à supports dans } C :$$

$$\alpha(P^n \phi) \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k \beta(P^{n+k} \phi) \qquad \rho_\alpha(\phi) \leq \rho_\beta(\phi)$$

d'où la première partie de l'énoncé.

Montrons que la suite  $u_n = P^n \phi(x)$  vérifie une relation de la forme  $u_{m+n+r} \geq \varepsilon u_m u_n$  pour certaines constantes  $r$  et  $\varepsilon$  , ce qui fournira de manière classique l'existence de la limite  $u_n^{1/n}$  .

La condition I' fournit  $\varepsilon'$  et  $r$  avec

$$P^{n+r}(y, \phi) \geq \varepsilon P^n(x, \phi)$$

pour tout  $n$  entier et  $y$  dans le support  $C$  de  $\phi$  .

D'autre part on a

$$P^{m+n+r}(x, \phi) = \int P^m(x, d_y) P^{n+r}(y, \phi)$$

$$P^{m+n+r}(x, \phi) \geq \varepsilon P^m(x, C) P^n(x, \phi) .$$

Mais puisque  $l_C \geq \varepsilon'' \phi$  on a bien

$$P^{m+n+r}(x, \phi) \geq \varepsilon' \varepsilon'' P^m(x, \phi) P^n(x, \phi) \text{ d'où l'assertion voulue}$$

avec  $\varepsilon = \varepsilon' \varepsilon''$  .

Proposition 3.- Soit  $P$  une probabilité de transition sur  $E$  vérifiant la condition II et  $\phi \in C_K^+(E)$  tel que, uniformément sur les compacts, on ait

$$\lim_n [P^n(x, \phi)]^{1/n} = c > 0 \quad . \quad \text{Alors on a aussi :}$$

$$\lim_n \frac{P^{n+1}(x, \phi)}{P^n(x, \phi)} = c \quad .$$

Cette proposition découlera du lemme

Lemme. - Pour tout  $\alpha$  réel ( $0 < \alpha < 1$ ) , il existe une fonction  $\delta_\alpha(\varepsilon) > 0$  telle que si  $P$  et  $Q$  sont des noyaux positifs vérifiant  $P^2 = \alpha P + (1 - \alpha)Q$  on ait, pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $n$  assez grand

$$P^{n+1} \leq (1 + \varepsilon) P^n + e^{-n\delta_\alpha(\varepsilon)} (I + P) \sum_0^n Q^k$$

$$P^n \leq (1 + \varepsilon) P^{n+1} + e^{-n\delta_\alpha(\varepsilon)} (I + P) \sum_0^n Q^k \quad .$$

Preuve : La vérification de ces inégalités est purement combinatoire. On exprime d'abord  $P^{n+1}$  sous la forme  $P^{n+1} = p_n(Q) + q_n(Q)$  où  $p_n$  et  $q_n$  sont des polynômes à coefficients positifs.

Ces polynômes se déterminent par la méthode des fonctions génératrices. On a les relations de récurrence :

$$p_{n+1}(x) = \alpha p_n(x) + q_n(x)$$

$$q_{n+1}(x) = (1 - \alpha)x p_n(x)$$

$$p_0(x) = 1 \quad p_1(x) = \alpha \quad .$$

Il suffit d'obtenir  $p_n(x)$  qui satisfait  $p_{n+1}(x) = \alpha p_n(x) + (1 - \alpha)x p_{n-1}(x)$  .

Posant  $S(Y) = \sum_{n \geq 0} Y^n p_n(x)$  on obtient :

$$[1 - \alpha Y - (1 - \alpha)x Y^2] S(Y) = 1$$

et  $S(Y) = \sum_{n \geq 0} Y^n [\alpha + (1 - \alpha)x Y]^n$  ce qui conduit à

$$P_n(x) = \sum_{2r \leq n} C_{n-r}^r \alpha^{n-2r} (1 - \alpha)^r X^r \quad .$$

La relation de récurrence vérifiée par  $p_n$  montre que son degré est  $\leq n$  et que ses coefficients sont majorés par 1 . Le rapport des coefficients successifs de  $p_n$  est  $\frac{1-\alpha}{\alpha^2} \frac{n-2r}{n-r} \frac{n-2r+1}{r+1}$  et si l'on pose  $r/n = x$  , il est donné par la

la fonction  $f_n(x)$  où

$$f_n(x) = \frac{1-2x}{1-x} \frac{1 + \frac{1}{n} - 2x}{\frac{1}{n} + x} \frac{1-\alpha}{\alpha^2} .$$

L'étude détaillée de  $f_n$  montre que  $f_n$  décroît lorsque  $x$  varie de 0 à  $1/2$  en partant de la valeur  $f_n(0) = (n-1) \frac{1-\alpha}{\alpha^2}$  qui est supérieure à 1 pour  $n$  assez grand. Cette fonction prend la valeur 1 pour  $x_n$  solution de

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2} (1-2x_n) (1-x_n + \frac{1}{n}) = (1 + \frac{1}{n}) (1 - x_n) \text{ ce qui donne :}$$

$$\rho = \lim_n x_n = \frac{1-\alpha}{2-\alpha} < 1/2 .$$

De plus, pour  $x < \rho - \varepsilon/2$  on a  $f_n(x) < (1 - \varepsilon')^{-1}$  et pour  $x > \rho + \varepsilon/2$  on a  $f_n(x) < 1 - \varepsilon'$  avec  $\varepsilon' > 0$ . Ceci fournit pour les coefficients de  $p_n(x)$  dont l'indice est extérieur à l'intervalle  $[(\rho-\varepsilon)n, (\rho+\varepsilon)n]$  la majoration exponentielle  $e^{-\delta n}$  ( $\delta > 0$ ) puisque le plus grand coefficient de  $p_n(x)$  est borné par un.

Pour  $r$  entier dans l'intervalle  $[(\rho-\varepsilon)^n, (\rho+\varepsilon)^n]$  le rapport des coefficients correspondants de  $p_{n+1}$  et  $p_n$ , qui vaut

$$\alpha \frac{C_{n+1-r}^r}{C_{n-r}^r} = \alpha \frac{n-r+1}{n-2r+1}$$

est compris entre  $1-\varepsilon'$  et  $1+\varepsilon'$  avec  $\varepsilon' > 0$ . Ces polynômes vérifient donc, au sens des coefficients, les inégalités

$$p_{n+1}(x) \leq (1+\varepsilon') p_n(x) + e^{-\delta n} \sum_{k=0}^{n+1} x^k$$

$$p_n(x) \leq (1+2\varepsilon') p_{n+1}(x) + e^{-\delta n} \sum_{k=0}^{k=n} x^k \text{ où } \delta(\varepsilon') > 0 .$$

D'où les inégalités concernant les opérateurs  $P^n$  et  $P^{n+1}$ .

Preuve de la proposition : Soit  $\lambda$  réel avec  $1 \leq \lambda \leq c$  et  $h_\lambda$  la fonction définie par  $h_\lambda(x) = \sum_0^\infty 1/\lambda^n P^n(x, \phi)$ , fonction qui est positive et bornée sur les compacts en raison de l'uniforme convergence de  $[P^n(x, \phi)]^{1/n}$ .

Posons alors  $P_\lambda(x, dy) = \frac{1}{\lambda} P(x, dy) \frac{h_\lambda(y)}{h_\lambda(x)}$  et observons que, par définition de  $h_\lambda$  on a :  $P_\lambda 1 \leq 1$ .



On a de plus,  $P_\lambda^2 = \frac{1}{\lambda^2} P^2(x, dy) \frac{h_\lambda(y)}{h_\lambda(x)}$

$$P_\lambda^2 = \frac{\alpha}{\lambda} P_\lambda + \frac{1-\alpha}{\lambda} Q_\lambda \quad \text{et puisque } Q_\lambda \text{ est positif et } \lambda \geq 1 :$$

$$P_\lambda^2 = \alpha P_\lambda + (1-\alpha) R_\lambda \quad \text{avec } R_\lambda \text{ positif et}$$

$$R_\lambda 1 = \frac{1}{1-\alpha} [P_\lambda^2 1 - \alpha P_\lambda 1] \leq 1 .$$

Observons maintenant que si l'on définit la fonction  $\psi$  par

$$\phi(y) = \frac{\psi(y) h_\lambda(y)}{h_\lambda(x)} \quad \text{on a}$$

$$P_\lambda^n(x, \psi) = \frac{1}{\lambda^n} P^n(x, \phi) \quad \text{et} \quad \lim_n [P_\lambda^n(x, \psi)]^{1/n} = \frac{c}{\lambda} .$$

Soit alors  $\varepsilon > 0$  et  $\lambda$  assez voisin de  $c$  pour que  $c > \lambda e^{-\delta_\alpha(\varepsilon)}$  .

D'après le lemme, on a, puisque  $R_\lambda^n 1 \leq 1$  :

$$\frac{P_\lambda^{n+1}(x, \psi)}{P_\lambda^n(x, \psi)} \leq (1+\varepsilon) + 2(n+1) \|\psi\|_\infty \frac{e^{-n\delta_\alpha(\varepsilon)}}{P_\lambda^n(x, \psi)}$$

soit  $\overline{\lim}_n \frac{P_\lambda^{n+1}(x, \psi)}{P_\lambda^n(x, \psi)} \leq 1+\varepsilon$  et  $\overline{\lim}_n \frac{P_\lambda^{n+1}(x, \phi)}{P_\lambda^n(x, \phi)} \leq \lambda(1+\varepsilon)$  .

Comme  $\lambda(1+\varepsilon)$  est arbitrairement proche de  $c$  , on a  $\overline{\lim}_n \frac{P_\lambda^{n+1}(x, \phi)}{P_\lambda^n(x, \phi)} \leq c$  .

Avec l'autre inégalité du lemme, on a finalement

$$\lim_n \frac{P_\lambda^{n+1}(x, \phi)}{P_\lambda^n(x, \phi)} = c .$$

On peut remarquer que si  $c = 1$  , cette conclusion est immédiate à partir du lemme.

En résumé, on peut énoncer la

Proposition 4.- Sous la conditions I', la suite  $[P^n(x, \phi)]^{1/n}$  [ $x \in E, \phi \in C_K^+(E)$ ] a une limite indépendante de  $x$  et  $\phi$  . Cette limite est la plus petite valeur propre de l'opérateur sur les mesures positives associé au noyau  $P$  .

Considérons maintenant une mesure de probabilité  $p$  à support compact sur le groupe  $G$  et l'opérateur de convolution défini par  $P(x, \cdot) = p * \delta_x$  . Des conditions diverses assurent la validité de  $I_0, I, I', II$  . Par exemple,  $I_0$  ou  $I$  est équivalente à l'égalité de  $G$  et du semi-groupe fermé  $S$  engendré par le support de  $p$  .

Si l'identité appartient au support de  $p$  et si  $S = G$ , la condition I' est vérifiée. Si de plus  $p$  est atomique ou bien admet une densité bornée, la condition II est vérifiée. On supposera ici vérifiée la condition notée (H) :

$S = G$  et la limite de la suite  $\frac{p^{n+1}(\phi)}{p^n(\phi)}$  existe pour tout  $\phi$  de  $C_K^+(E)$ .

Le théorème 1 s'adapte alors ici sous la forme suivante :

Théorème 2.- Supposons la condition (H) vérifiée. Si les mesures de Radon positives  $\mu$  solutions de  $p * \mu = \mu * p = c_0 \mu$  où  $c_0 = \lim [p^n(\phi)]^{1/n}$  sont les multiples de l'une d'elles  $\mu_0$  on a

$$\forall \phi \quad \psi \in C_K^+(G) \quad \lim \frac{p^n(\psi)}{p^n(\phi)} = \frac{\mu_0(\psi)}{\mu_0(\phi)} .$$

Preuve : Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 1 : les valeurs

d'adhérence possibles de la suite de mesure  $\mu_n = \frac{p^n}{p^n(\phi)}$  vérifient  $p * \mu = c_0 \mu$ .

Puisque  $p * \mu_n = \mu_n * p$  et que  $p$  est à support compact on a aussi

$p * \mu = \mu * p = c_0 \mu$ . La condition d'unicité de tels  $\mu$  permet alors de conclure.

Observons que l'existence de  $\mu_0$  vérifiant  $p * \mu_0 = \mu_0 * p = c_0 \mu_0$  est assurée si  $p$  possède un support compact engendrant  $G$  en tant que semi-groupe. En effet

les mesures  $\mu = \sum_0^{\infty} \lambda^n p^n$  sont de Radon pour  $\lambda < 1/c_0$  et vérifient

$$p * \mu = \mu * p \leq \frac{1}{\lambda} \mu .$$

Le cône des mesures de Radon positives  $\mu$  vérifiant

$$p * \mu = \mu * p < c_0 \mu$$

est l'intersection des cônes précédents qui sont non vides et à base compacte : ce cône est aussi non vide. Comme il est stable par la convolution par  $p$ , il contient une droite fixe, d'après le théorème de Schander-Tychonoff, ce qui fournit  $\mu_0$  vérifiant

$$p * \mu_0 = c_0 \mu_0 = \mu_0 * p .$$

Le même raisonnement montre l'existence de  $\mu$  dans le cône des mesures vérifiant  $p * \mu = a \mu$  qui satisfait la relation

$$\mu * p = a' \mu$$

pour un certain  $a' > 0$ .

Etudions maintenant les mesures de Radon positives  $\mu$  vérifiant les équations  $p * \mu = a\mu$ ,  $\mu * p = a'\mu$ . Rappelons d'abord une construction de fonctions  $f$  vérifiant

$$p * f(h) = \int f(gh) dp(g) = af(h) \quad (1)$$

ce qui permet d'obtenir  $\mu = f \cdot dg$  vérifiant  $p * \mu = a\mu$ . Si  $dg$  est la mesure de Haar sur  $G$  invariante à gauche. Si  $B$  est un  $G$  espace localement compact sur lequel  $G$  opère continûment et si  $\sigma(g,b)$  est un cocycle continu vérifiant l'identité  $\sigma(gg',b) = \sigma(g,g'b) \sigma(g',b)$  on peut considérer la représentation de  $G$  associée et en particulier le noyau positif sur  $B$  défini par

$$\rho_{\sigma}[p](\Phi) = \int \Phi(gb) \sigma(g,b) dp(g) .$$

Alors dire que la fonction  $q_{\sigma}$  sur  $B$  vérifie  $\rho_{\sigma}[p](q_{\sigma}) = aq_{\sigma}$  signifie que  $\bar{\sigma}(g,b) = \sigma(g,b) \frac{q_{\sigma}(gb)}{q_{\sigma}(b)}$  vérifie l'équation (1) ; ces conditions se ramènent en effet à

$$\forall b \in B \quad \int \bar{\sigma}(g,b) dp(g) = a .$$

Supposons que  $q_{\sigma}$  soit positive unique à un coefficient près et que la fonction  $\bar{\sigma}(g,b)$  de  $g$  obtenue soit, pour tout  $b \in B$ , extrémale dans le cône  $H_a$  des solutions de (1). Considérons alors la fonction  $f$  barycentre des fonctions  $\bar{\sigma}(g,b)$  définie par

$$f(g) = \int \bar{\sigma}(g,b) d\alpha(b)$$

où  $\alpha$  est une mesure de probabilité sur  $B$  et écrivons que la mesure  $\mu_{\sigma} = f \cdot dg$  vérifie l'équation  $\mu_{\sigma} * p = a'\mu_{\sigma}$ .

Si  $\delta$  est la fonction modulaire de  $G$ , cette équation s'écrit :

$$\iint_{G \times B} \bar{\sigma}(gh,b) \delta(h) dp(h) d\alpha(b) = a' \int \bar{\sigma}(g,b) d\alpha(b) .$$

Si alors on considère le noyau positif défini par

$\rho'_{\sigma}(p)[\phi] = \int \sigma(h,b) \delta(h) \phi(hb) dp(h)$  la mesure  $\alpha$  doit vérifier, puisque  $\bar{\sigma}(g,b)$  est extrémale :

$$q_{\sigma} \cdot \rho'_{\sigma}(p) \left[ \frac{\alpha}{q_{\sigma}} \right] = a'\alpha .$$

## THÉORÈMES QUOTIENTS

Soit  $\alpha = q_\sigma \cdot \nu$  où  $\nu$  est une mesure de Radon vérifiant  $\rho'_\sigma(p)[\nu] = a'\nu$ .

Si l'on suppose que cette équation a une solution unique à un scalaire près, on aura ainsi construit à partir de  $\sigma$  une unique mesure  $\mu$ , à un scalaire près, vérifiant

$$p * \mu = a\mu \quad \mu * p = a'\mu \quad .$$

La densité de cette mesure par rapport à la mesure de Haar gauche de  $G$  est donnée par

$$f_0(g) = \int \sigma(g,b) q_\sigma(gb) d\nu(b) \quad .$$

On peut observer que si  $G$  est unimodulaire, la condition

$$\int \bar{\sigma}(g,b) dp(g) = a \quad \text{implique} \quad a' = a \quad .$$

Sous la condition que  $p$  admette une densité bornée à support compact engendrant  $G$  en tant que semi-groupe, l'étude des extrémales des équations

$$p * \mu = a\mu \quad p * f = af$$

a été faite en particulier lorsque  $G$  est semi-simple à centre fini [6] ou extension compacte d'un sous-groupe nilpotent distingué  $N$ , [4]; elles peuvent toutes être construites comme précédemment et les espaces  $B$  correspondants sont homogènes et compacts. Les remarques précédentes relatives à l'unicité de  $q$  et  $\alpha$  sont donc valables dans ce cas, à cause de la régularité de  $p$ . Elles sont également valables si  $G$  est nilpotent et  $p$  atomique à support fini engendrant  $G$  car les extrémales se réduisent alors à des exponentielles, comme en [4].

Considérons maintenant la valeur minimum  $c_0$  de  $a$  pour laquelle  $Ha \neq \phi$  et observons que les extrémales correspondantes sont associées à un cocycle  $\sigma_0$  et à un espace  $B_0$  bien définis [10]. Ceci nous fournit l'existence et l'unicité à un scalaire près de  $\mu_0$  vérifiant

$$p * \mu_0 = \mu_0 * p = c_0 \mu_0$$

dans les 3 cas envisagés :

I -  $G$  semi-simple à centre fini et  $p$  admet une densité bornée à support compact

II -  $G$  est extension compacte d'un sous-groupe nilpotent distingué  $N$  et  $p$  vérifie la même condition que en I .

III -  $G$  est nilpotent et  $p$  est atomique à support fini engendrant  $G$  .

Précisons maintenant la nature de  $\mu_0$  dans les cas précédents. Dans le cas II l'espace  $B_0$  est réduit à un point et  $\sigma_0(g)$  est l'unique exponentielle  $\lambda_0(g)$  où  $\hat{p}(\lambda) = \int \lambda(g^{-1}) dp(g)$  atteint son minimum. On a alors  $\mu_0 = \lambda_0 dg$  .

Dans le cas III la situation est identique.

On peut noter que dans le cas II des conditions d'irréductibilité de l'action de  $G$  sur  $N$  assurent que  $\lambda_0(g) = 1$  [10] et donc  $\mu_0$  est, indépendamment de  $p$  , une mesure de Haar.

Dans le cas I, désignons par  $G = KAN$  une décomposition d'Iwasawa de  $G$  , et par  $m$  le centralisateur de  $A$  dans  $K$  . L'espace  $B_0$  est alors la frontière de Furstenberg de  $G$  :  $B_0 = G/MAN$  .

Si on désigne la mesure  $K$ -invariante canonique sur  $B_0$  par  $m$  , on a alors  $\sigma_0(g, b) = (\frac{dg^{-1}}{dm})^{1/2} (b)$  , de sorte que  $\rho\sigma_0$  est la représentation quasi-régulière de  $G$  . Afin d'exprimer  $\mu_0$  , désignons par  $\delta$  la fonction modulaire de  $AN$  de sorte que  $\delta dt$  est la mesure de Haar droite de  $AN$  si  $dt$  est la mesure de Haar gauche de  $AN$  et notons  $\lambda_0$  la mesure symétrique  $\delta^{1/2} dt$  . Soient  $\nu$  et  $\nu'$  les probabilités sur  $B_0$  définies par  $\rho\sigma_0(p)[\nu] = c_0 \nu$  ,  $\rho\sigma_0(p)[\nu'] = c_0 \nu'$  .

Alors on a en désignant encore par  $\nu$  et  $\nu'$  les probabilités sur  $K$  de projection  $\nu$  et  $\nu'$  sur  $B_0$  et qui sont  $M$ -invariantes

$$p * \nu * \lambda_0 = c_0 \nu * \lambda_0$$

$$\lambda_0 * \nu' * p = c_0 \lambda_0 * \nu$$

$$p * (\nu * \lambda_0 * \nu') = c_0 (\nu * \lambda_0 * \nu') = (\nu * \lambda_0 * \nu') * p$$

de sorte que, par l'unicité justifiée plus haut :  $\mu_0 = \nu * \lambda_0 * \nu'$  .

Théorème 2 (résumé).- Supposons  $(G, p)$  de l'un des types I, II, III. Alors il existe une mesure de Radon  $\mu_0$  , de forme précisée plus haut, relativement invariante dans les cas II et III telle que

$$\forall \phi, \psi \in C_K^+(G) \quad \lim \frac{p^n(\psi)}{p^n(\phi)} = \frac{\mu_0(\psi)}{\mu_0(\phi)}$$

comme application du théorème 1, on a, par exemple

Théorème 3.— Supposons  $(G, p)$  du type II et soit  $E$  un espace homogène de  $G$ . Supposons de plus que, pour toute exponentielle  $\lambda$  sur  $G$  on ait

$\int \lambda(g) dp(g) \geq 1$ . Alors, si  $m$  est la mesure de Haar de  $E$  on a pour tous  $\phi$  et  $\psi$  de  $C_K^+(E)$  et pour tout  $x$  de  $E$

$$\lim_n \frac{p^n * \psi(x)}{p^n * \phi(x)} = \frac{m(\psi)}{m(\phi)} .$$

Remarques : Si l'on dispose d'une estimation de  $p^n(\phi)$  par une suite  $a_n$  telle que  $\frac{p^n(\phi)}{a_n}$  soit bornée inférieurement et supérieurement on obtient alors

$$\lim_n \frac{p^n(\psi)}{a_n} = \frac{\mu_0(\psi)}{\mu_0(\phi)}$$

ce qui généralise le théorème local classique lorsque  $G = \mathbb{R}^d$ .

De telles estimations peuvent s'obtenir, dans des cas particuliers, par l'étude des représentations unitaires de  $G$  ([3], [7], [9], [11], [14]).

On peut observer également que le cas  $G$  discret et  $p$  symétrique conduit à des méthodes et résultats plus simples ([2], [7]). En particulier les mesures limites  $\mu_0$  possibles doivent vérifier

$$p * \mu_0 = c_0 \mu_0 , \quad \mu_0(g) \leq \mu_0(e)$$

ce qui simplifie l'étude de l'unicité. Par exemple, si les fonctions  $p$ -harmoniques bornées sont constantes, on a  $c_0 = 1$  et  $\mu_0(g) = \mu_0(e)$ , ce qui justifie l'unicité voulue [2].

Si enfin  $G$  est le groupe "ax + b" et si  $p$  est suffisamment régulière, les réguliers de [5] permettent de conclure, comme dans le cas semi-simple, à l'unicité de  $\mu_0$  qui, ici, ne peut être relativement invariante à cause de la non unimodularité de  $G$ . Le théorème s'étend donc à ce cas.

Bibliographie.—

- [1] V.I. ARNOLD et A.L. KRYLOV : Uniform distribution of points on a sphere - Sov. Math. Dokl 4 n° 1 (1963) p. 1-5 .
- [2] A. AVEZ : Limites de quotients pour les marches aléatoires sur des groupes - C.R.Acad. Sc. Paris, Série I. 276, 317-320 (1973).

- [3] P. BALDI, P. BOUGEROL et P. CREPEL : Théorème central limite local sur les extensions compactes de  $\mathbb{R}^d$ . Ann. Inst. Vol. XIV N° 1, (1978).
- [4] J.P. CONZE et Y. GUIVARC'H : Propriété de droite fixe et fonctions propres des opérateurs de convolution. Séminaire de probabilités de Rennes, (1976). & Lecture Notes n° 404 "Théorie du potentiel et Analyse Harmonique". Springer Verlag (1974). p. 126-133.
- [5] L. ELIE : Fonctions harmoniques sur le groupe affine. A paraître.
- [6] H. FURSTENBERG : Translation-invariant cones of functions on semi-simple groups. Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965) 271-326.
- [7] P. GERL : Wahrscheinlichkeitsmasse auf diskreten Gruppen. A paraître.
- [8] U. GRENANDER : Probabilities on algebraic structures. John Wiley - New-York (1963).
- [9] Y. GUIVARC'H : Equirépartition dans les espaces homogènes - Journées ergodiques, Rennes (1973) . & Lecture Notes Springer Verlag n° 532 (1976).
- [10] Y. GUIVARC'H : Une loi des grands nombres pour les groupes de Lie - Séminaires de Probabilités I - Université de Rennes (1976).
- [11] D.A. KAZDAN : Uniform distribution in the plane - Trudi. Mosk. Mat. Ob. (1965), t. 4.
- [12] LE PAGE E. : Théorèmes quotients pour certaines marches aléatoires. C.R.Acad. Sc., t. 279, série A, n° 2, 1974.
- [13] G.A. MARGULIS : Positive harmonic functions on nilpotent groups - Doklady, (1966), Tom. 166, n° 5.
- [14] S. SAWYER : Isotropic Random walks in a tree - Zeitschrift für Wahr - Springer Verlag (1978) n° 42.
- [15] C. STONE : Ratio limit theorems for random walks on groups - Trans. Amer. Math. Soc. 125, (1966) 88-100.