

# Astérisque

I. D. LANDAU

M. ESPANA

## **Identification de modèles bilinéaires pour les colonnes à distiller**

*Astérisque*, tome 75-76 (1980), p. 177-185

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1980\\_\\_75-76\\_\\_177\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__75-76__177_0)>

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

IDENTIFICATION DE MODÈLES BILINÉAIRES  
POUR LES COLONNES A DISTILLER

par

I. D. LANDAU - M. ESPANA

-:-:-

RÉSUMÉ.

On présente une synthèse de plusieurs travaux des auteurs concernant la modélisation bilinéaire des colonnes à distiller et l'identification de tels modèles [1] [2] [3]. L'impact pratique de cette approche ainsi que les problèmes théoriques qui restent ouverts sont discutés.

I. - INTRODUCTION.

La commande des processus est encore basée essentiellement à l'heure actuelle sur la théorie de la commande des systèmes linéaires. Cette théorie très puissante permet de résoudre un grand nombre de problèmes à condition que le processus à commander admette une description par un modèle " linéarisé " . Mais pour la plus part des processus industriels cette " linéarisation " ne s'avère valable que dans une région de fonctionnement restreinte . D'où l'intérêt porté au développement d'autres types de modélisation et d'une théorie de la commande pour le type de modèle considéré . La classe de modèles appelée " bilinéaire " permet de reproduire le comportement de certains processus dans une plage de fonctionnement beaucoup plus large que les modèles linéaires . En particulier ce type de modélisation semble être très approprié pour la description des processus où des phénomènes de transport de matière ont lieu et où les entrées externes apparaissent naturellement d'une façon multiplicative et ceci est le cas pour les processus de distillation.

En effet dans le cas des processus de distillation, les entrées interviennent d'une façon linéaire dans la dérivée par rapport au temps des variables d'état

et elles ont un rôle de régulateur paramétrique de la dynamique locale.

II. - DESCRIPTION DE PROCESSUS.

Le processus considéré est une colonne de distillation à plateaux représentée schématiquement dans la Fig. 1.

Elle est donc constituée d'une série de plateaux superposés dans lesquels ont lieu des échanges de matière et d'énergie entraînés par deux sortes de débits :

- a) Un débit vapeur qui monte d'un bouilleur et, qui cède une partie de son énergie à chaque plateau, en favorisant l'évaporation des composantes les plus volatiles du mélange .
- b) Un débit liquide qui descend d'un condenseur (débit de reflux) situé à la tête de la colonne et , qui a pour conséquence l'enrichissement - par rapport

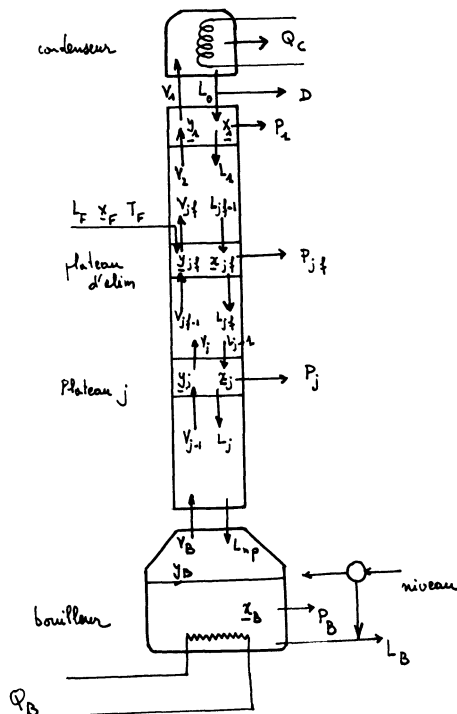


Schéma d'une colonne à distiller.

aux composantes plus volatiles - de la phase liquide des plateaux au-dessous .

De cette façon, on arrive à avoir une séparation des produits lourds et légers contenus dans le mélange original d'alimentation . L'alimentation se fait normalement par un des plateaux appelé " plateau d'alimentation " et, que nous noterons par l'indice  $j_F$  .

Pour décrire la dynamique des colonnes à distiller les hypothèses suivantes sont communément considérées .

- HC. 1. équilibre instantané liquide-vapeur.
- HC. 2. processus hydrodynamiques négligeables .
- HC. 3. capacité molaire vapeur nulle
- HC. 4. condensation totale
- HC. 5. capacité molaire et enthalpies constantes
- HC. 6. pertes thermiques négligeables .
- HC. 7. débit d'entrée sortie sous forme liquide .

Pour un plateau  $j$  on écrit trois équations à savoir :

- l'équation d'accumulation de la composante  $i$  pour le plateau  $j$
- le bilan global d'énergie.
- le bilan global matière .

Après quelques manipulations et tenant compte des hypothèses HC. 1 - HC. 7 la dynamique d'une colonne à distiller à  $n$  plateaux peut être décrite par l'équation d'état suivante [1] :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{X}}^i = & \left[ \sum_{k=1}^3 B_k^1 u_k \right] \underline{X}^i + \left[ \sum_{k=1}^3 B_k^2 u_k \right] \underline{Y}^i(X) + \\ & + \frac{1}{C_{j_F}} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} L_F X_F^i ; \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n_c \\ 1 \leq j \leq n+2 \\ \underline{X}^i \in \mathbb{R}^{n+2} \end{array} \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\underline{X}^i$  est le vecteur "profil" de la composante  $i$  du mélange liquide formé par les concentrations de cette composante à chaque plateau,  $\underline{Y}^i$  représente le "profil" des concentrations vapeur de la composante  $i$  (c'est une fonction de  $\underline{X}^i$ ) et les coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_\beta$  sont tous nuls sauf le  $\alpha_j$  qui correspond au plateau d'alimentation pour lequel  $\alpha_j = \alpha_{j_F} = 1$ .  $L_F$  est le débit d'alimentation,  $X_{j_F}^i$  la concentration de la composante  $i$  dans le mélange d'alimentation,  $C_{j_F}$  est la capacité molaire liquide au plateau d'alimentation et  $u_k$  sont les composantes du vecteur des entrées :

$$\underline{u}^T = [u_1, u_2, u_3]^T = [L_0, L_F, O_B] \quad (2)$$

ou  $L_0$  est le débit de reflux  $O_B$  la puissance de chauffe et  $L_F$  le débit d'alimentation .

### III. - PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MODÈLE.

L'équation (1) peut se réécrire sous la forme :

$$\dot{\underline{X}}^i = N(\underline{X}, X_{j_F}^i) \underline{U} \quad ; \quad N(\underline{X}, X_{j_F}^i) \in \mathbb{R}^{(n+2) \times 3} \quad (3)$$

L'homogénéité de l'équation (3) par rapport à  $\underline{U}$  permet d'énoncer les trois propriétés suivantes qui sont évidentes du point de vue mathématique mais qui n'apparaissent absolument pas si on considère une approximation linéaire (c'est ce dernier type de modélisation qui est utilisé dans la pratique courante) .

PROPRIÉTÉ 1. - Les états d'équilibre des colonnes à distiller sont associés à des directions dans l'espace des entrées .

PROPRIÉTÉ 2. - Le long d'une direction de l'espace des entrées, la norme euclidienne du vecteur entrée  $\|u\|$  détermine l'échelle du temps pour la dynamique locale .

PROPRIÉTÉ 3. - Le long d'une direction de l'espace des entrées, le gain de la dynamique locale est universellement proportionnel à  $\|u\|$  .

Les détails concernant ces trois propriétés ainsi que leur vérification expérimentale sur la colonne de distillation pilote du Laboratoire d'Automatique de Grenoble se trouvent dans [3]. Nous discuterons quelques conséquences d'ordre pratique de ces propriétés .

Tout d'abord il s'agit d'un "choc" conceptionnel pour les praticiens car à la différence d'un système linéaire qui est commandé par l'amplitude et la direction du vecteur d'entrée, ici l'effet de la commande sur l'état est associé à une direction seulement .

Deuxièmement ce type de description permet la mise en évidence de l'effet de l'entrée sur la dynamique des modèles linéaires qui sont valides au tour d'un point de fonctionnement. Il n'est donc plus nécessaire d'identifier une multitude de modèles linéaires associés chacun à un point de fonctionnement ; il suffit de connaître un seul, les autres pouvant être déterminés avec une bonne précision à partir des propriétés 2 et 3 .

Ces deux observations permettent aussi de donner une méthode de compensation des perturbations sur le débit d'entrée et une méthode d'adaptation des lois de commande linéaire en fonction de la norme du vecteur des entrées . Pour les détails voir [3] .

#### IV. - MODÉLISATION BILINÉAIRE.

Le modèle considéré plus haut est néanmoins encore assez complexe et il est intéressant de l'approcher par un modèle plus simple mais qui conserve les propriétés essentielles du modèle initial . Ceci peut se faire en utilisant une modélisation bilinéaire . Ce nouveau modèle s'obtient en considérant les hypothèses suivantes [1] [2].

HBL. 1. : capacité molaire vapeur nulle.

HBL. 2. : condensation totale .

HBL. 3. : entrées et sorties en état liquide.

HBL. 4. : capacités molaires et enthalpies constantes .

HBL. 5. : pour chaque composante  $i$ , au niveau du plateau  $j$ , l'approximation suivante est considérée pour exprimer la relation entre les concentrations molaires liquides et vapeurs :

$$Y_j^i = Y_j^{oi} + f_j^i X_j^i$$

HBL. 6. : pertes thermiques négligeables. ( A noter que HBL. 6. peut se remplacer par : HBL. 6' : pertes thermiques constantes ).

En utilisant HBL. 5. l'équation (1) peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{X}^i = \left( \sum_{k=1}^3 B_{i,k} u_k \right) X^i + C_i u \quad (5)$$

ou

$$B_{i,k} = B_k^1 + B_k^2 F^i \quad (6)$$

ou  $B_k^1$ ,  $B_k^2$  sont des matrices qui prennent en compte les produits entre  $u_k$  et les composantes de  $X^i$  et  $Y^i$  et  $F^i$  est la matrice dont les éléments sont les  $f_j^i$  apparaissant dans l'hypothèse HBL. 5. (On a supposé aussi que la concentration de la composante  $X_F^i$  du mélange d'alimentation est constante).

L'équation (5) est un modèle bilinéaire et il a été montré [1] que la validité de ce modèle dans l'espace des entrées est délimitée par un cône tronqué ayant son vertex à l'origine de l'espace des entrées. Une étude comparative des réponses du modèle bilinéaire par rapport aux réponses du modèle non linéaire complet et par rapport à un modèle linéarisé se trouve dans [1]. Cette étude montre la supériorité nette de la modélisation bilinéaire par rapport à la modélisation linéaire pour le cas des colonnes à distiller.

A noter aussi que des modèles bilinéaires indépendants s'obtiennent pour chaque composante du mélange.

## V. - MODÈLE BILINÉAIRE RÉDUIT.

Le modèle bilinéaire présenté dans le paragraphe 4 permet de reproduire l'évolution de la composante  $i$  au niveau de chaque plateau de la colonne.

En contre-partie la dimension du modèle (du vecteur d'état) va être égale aux nombres des plateaux (dans le cas de la colonne étudiée il s'agissait de 11 plateaux mais ce nombre peut aller jusqu'à 50 ou 60) . D'autre part comme on s'intéresse à l'évolution de la concentration à un nombre limité de niveaux il est souhaitable de réduire la dimension du modèle considéré .

La méthode retenue pour la réduction de la dimension du modèle n'a pas un caractère général, elle tient essentiellement compte de la spécificité du processus étudié . L'idée fondamentale est de considérer un ensemble de plateaux comme jouant le rôle d'un seul plateau mais qui à une efficacité accrue . Pour le cas considéré effectivement (colonne à 11 plateaux : 9 plateaux + bouilleur + condenseur) un modèle bilinéaire à 3 états est suffisant . (Réduction de dimension de 11 à 3) . La colonne est considérée comme étant formée de trois compartiments :

- 1) Le condensateur
- 2) La zone de rectification
- 3) La zone d'épuisement

Le modèle bilinéaire réduit permettant de décrire le comportement entrée sortie de la colonne autour d'un point d'équilibre a été obtenu dans [2] :

$$\dot{\delta X} = A\delta + \left( \sum_{i=1}^3 N_k \delta u_k \right) \delta X + B \delta u \quad (7)$$

$$Y = [1,0,0] \delta X = C^T \delta X \quad (8)$$

où  $X$  est le vecteur d'état,  $Y$  est la sortie (en l'occurrence la concentration de la composante  $i$  dans le produit fini) et :

$$\delta u_k = u_k - u_k^o \quad (9)$$

$$\delta X_j = x_j - x_j^o \quad (10)$$

$$u^T \Delta = [L_F, L_O, V] \quad (11)$$



la puissance de chauffe  $Q_B$  étant remplacée par  $V$  (débit vapeur au niveau bouilleur qui est proportionnel à  $Q_B$  (pour les détails voir [2] ). Les structures des matrices  $A$ ,  $N_K$ ,  $B$  sont données dans [2] et il résulte que ce modèle est entièrement caractérisé par 8 paramètres .

#### Minimalité du modèle.

En utilisant le théorème d'Allessandro, Isidori et Ruberti [4] il a été démontré que le modèle proposé est minimal.

#### VI. - IDENTIFICATION DU MODÈLE BILINÉAIRE RÉDUIT.

L'identification a été faite par la méthode du modèle en minimisant un critère d'écart entre la sortie du modèle nonlinéaire complet et le modèle bilinéaire réduit estimé. Une attention particulière a été apportée aux choix des entrées (superposition de signaux de grande amplitude et de basse fréquence avec des signaux de faible amplitude et de haute fréquence) afin de pouvoir obtenir une identification correcte . Le modèle bilinéaire réduit identifié a été validé pour divers types de signaux et les résultats ont été très satisfaisants .

#### VII. - PROBLÈMES OUVERTS.

Notre travail a montré qu'il est possible d'utiliser et d'identifier des modèles bilinéaires pour les colonnes à distiller . Du point de vue de l'analyse de systèmes l'approche proposée représente un progrès important car à l'aide d'un modèle légèrement plus compliqué qu'un modèle linéaire on arrive à appréhender globalement le comportement d'une colonne à distiller dans un domaine de fonctionnement étendu .

Néanmoins le travail effectué soulève du point de vue des systèmes bilinéaires plus de problèmes qu'il n'en résout et nous essayerons ci-après d'en mentionner quelques uns .

##### a) Identification des modèles bilinéaires :

- Introduction des formes canoniques bilinéaires permettant de donner une représentation en variables d'état ayant un nombre minimum de paramètres .

- Elaboration d'une théorie des entrées " sensibilisantes " ou respectivement des conditions sur les entrées assurant une détermination univoque des paramètres du modèle (condition d'identifiabilité) .

b) Commande des systèmes bilinéaires .

Si les modèles bilinéaires apportent une contribution à la meilleure connaissance des processus à commander, en dehors de quelques solutions ad-hoc et de quelques résultats très particuliers il n'existe pas une stratégie de commande tirant réellement profit de la structure propre du modèle . Ceci provoque un frein considérable à la pénétration dans la pratique de ce type de modélisation et fait peser un doute sur l'utilité pratique de cette approche . Comme référence pour l'évaluation des performances des stratégies de commande à élaborer pour ce types de modèle, on peut considérer les diverses techniques de commande adaptative en boucle fermée qui peuvent être utilisées actuellement pour la commande de tel modèles .

--:--:--

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ESPANA, J.D. LANDAU.- Bilinear Approximation of the Distillation Processes. Ricerche di Automatica, vol.6, n°1, Juillet 1965.
- [2] M. ESPANA, I.D. LANDAU.- Reduced order bilinear models for distillation columns. Automatica, Vol.14, pp.345-355 .
- [3] M. ESPANA, I.D. LANDAU.- Distillations columns. A class of dynamic systems with multiplicative inputs. Trans. A.S.M.E. Journal D.S.M.C. Mars 1979.
- [4] P. D'ALESSANDRO, A. ISIDORI, A. RUBERTI.- Realization and structure theory of bilinear dynamical systems. SIAM J. of Control, vol.12, n°3, 1974.

--:--:--

I.D. LANDAU  
 Laboratoire d'Automatique  
 de Grenoble  
 I.N.P. de Grenoble, B. P.15  
 38040 GRENOBLE CEDEX

M. ESPANA  
 Dept. of Electrical Eng.  
 Centro de Investigation del IPN  
 Apartado Postal 14-740  
 MEXICO 14 D.F.