Astérisque

ABDELHAK FERFERA

Combinatoire du monoïde libre et composition de certains systèmes non linéaires

Astérisque, tome 75-76 (1980), p. 87-93

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__75-76__87_0>

COMBINATOIRE DU MONOÏDE LIBRE

ET

COMPOSITION DE CERTAINS SYSTÉMES NON LINÉAIRES

par

Abdelhak FERFERA

-:-:-:-

INTRODUCTION. - Les séries formelles en variables non commutatives (cf. [6]) constituent un outil remarquable pour l'étude de certains systèmes asservis ; en particulier, les systèmes bilinéaires sont naturellement "codés" par les séries rationnelles (cf. [5]). Les propriétés des systèmes analytiques (décrits par les séries formelles) peuvent être obtenues à partir de propriétés équivalentes de leurs séries génératrices. Ainsi le produit de deux systèmes analytiques est codé par le mélange (ou produit de Hurwitz) de leurs séries génératrices (cf. [5], [4]), et le mélange conservant la rationalité, le produit de deux systèmes bilinéaires et bilinéaires.

Dans le même ordre d'idées, nous nous posons ici la question de savoir quelle est la nature du système composé (ou mise en série) de deux systèmes analytiques (resp. bilinéaire). Pour cela nous introduisons un nouveau produit de séries formelles, que nous appelons aussi produit de composition. Nous montrons par un contrexemple que ce produit ne conserve pas la rationalité, et donnons une condition suffisante pour que la série composée de deux séries rationnelles soit rationnelle. Nous montrons par ailleurs que le composé de deux systèmes analytiques est un système analytique, de série génératrice la série composée des deux séries génératrices. Nous obtenons ainsi un contrexemple prouvant que la famille des systèmes bilinéaires n'est pas close pour l'opération de composition de même qu'une condition suffisante pour que le composé de deux systèmes bilinéaires soit bilinéaire.

Les problèmes d'automatique non linéaires sont très souvent abordés à l'aide d'un autre outil, les séries de Volterra (cf. [1]) qui comportent une difficulté majeure, le calcul des noyaux. L'intérêt d'utiliser ici les séries non commutatives, qui sont en fait très liées aux séries de Volterra (cf. [5]), nous semble résider dans le fait qu'elles sont plus faciles à déterminer, et que les propriétés purement algébriques de certaines de ces séries, telle la rationalité, peuvent être immédiatement interprétée pour obtenir des propriétés analogues sur les systèmes.

I. - RAPPELS ET NOTATIONS. -

Terminologie et notations sont celles de [5] et [3]. Pour simplifier, les systèmes asservis considérés ici sont supposés à entrée et sortie scalaires. Soient $X = \{x_o, x_1\}$ et X^* le monoïde libre engendré par X. K étant le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des complexes $\mathbb{C}$, soient $K\langle X\rangle$ et $K\langle\langle X\rangle\rangle$ les K-algèbres des polynômes et des séries formelles à coefficients dans K, en les indéterminées non commutatives x_o, x_1, et $K\langle (X)\rangle$ la sous-K-algèbre de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries rationnelles. Un élément $s \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est noté :

$$s = \sum_{f \in X^*} (s, f)\, f, \quad \text{où} \quad (s, f) \in K .$$

Soit $K^{N\times M}$ l'ensemble des matrices à coefficients dans K, à N lignes et M colonnes. Une représentation (matricielle) $\mu : X^* \to K^{N\times M}$ est un morphisme du monoïde X^* dans le monoïde multiplicatif des matrices carrées d'ordre N. On montre que (cf. [6]).

THÉORÈME 1.1. (dit de Kleene-Schutzenberger). - Une série $r \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est rationnelle si et seulement s'il existe un entier $N \geq 1$, une représentation $\mu : X^* \to K^{N\times N}$ des matrices ligne $\lambda \in K^{1\times N}$ et colonne $\gamma \in K^{N\times 1}$ tels que : $r = \sum_{w \in X^*} (\lambda\mu(w)\gamma)\, w$.

Soit $F : \mathcal{C}([0,T],K) \to \mathcal{C}([0,T],K)$ $(T \in [0,\infty[)$ une fonctionnelle causale définie sur l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans K. Le système asservi d'entrée $u \in \mathcal{C}([0,T])$ et de sortie y donnée par $y(t) = F[u](t)$ est dit analytique si et seulement s'il est donné par une série formelle non commutative

$s \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ suivant l'expression :

$$(1.1) \qquad \sum_{F \in X^*} (s, F) \int_0^t d\xi_{j_k} \ldots d\xi_{j_0} \quad \text{où} \quad F = x_{j_k} \ldots x_{j_0}$$

où l'intégrale itérée du second membre est définie par :

$$\xi_0(\tau) = \tau, \xi_1(\tau) = \int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma, \quad \text{et} \quad \int_0^t d\xi_{j_k} \ldots d\xi_{j_0} = \int_0^t d\xi_{j_k}(\tau) \int_0^\tau d\xi_{j_{k-1}} \ldots d\xi_{j_0} \, .$$

La série s est dite génératrice du système (ou de la fonctionnelle) qu'elle caractérise de manière unique (cf. [5]). Un système analytique est dit <u>rationnel</u> (resp. polynômial) si sa série génératrice est rationnelle (resp. polynômiale).

Un système asservi est dit <u>régulier</u> (ou bilinéaire) s'il peut se mettre sous la forme :

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \dot{q}(t) = (A_0 + u(t) A_1) \; q(t) \\ y(t) = \lambda \, q(t) \; , \end{cases}$$

où $q(t) \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ étant un K-espace vectoriel (espace d'état) de dimension finie N [$q(o)$ donné], et où $A_0, A_1 \in K^{N \times N}$ et $\lambda \in K^{1 \times N}$. On montre que (cf. [5]) :

PROPOSITION 1.2. - <u>Un système asservi est analytique rationnel si et seulement s'il peut se mettre sous la forme d'un système régulier. Sa série génératrice est alors donnée dans</u> $K\langle(X)\rangle$, <u>à partir de</u> (1.2), <u>par</u> $s = \sum_{f \in X^*} (\lambda \mu f \, q(o)) \, f$, <u>où</u> $\mu : X^* \to K^{N \times N}$ <u>est la représentation définie par</u> : $\mu x_i = A_i \quad (i = 0, 1)$.

II. - COMPOSITION DE SÉRIES FORMELLES NON COMMUTATIVES.

DÉFINITION 2.1. - Soit $s \in K\langle\langle X \rangle\rangle$. Pour tout $f \in X^*$, la série $f \circ s$, composée de f et de s, est définie de manière récurrente par :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} f \circ s = f \, , \text{ si } |f|_{x_1} = 0 \\ f \circ s = x_0^{k+1} [s \,\text{ш}\, (f' \circ s)] \, , \text{ si } f = x_0^k x_1 f' \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ et } f' \in X^* \, , \end{cases}$$

où le symbole ш désigne le mélange dans $K\langle\langle X \rangle\rangle$ (cf. [4]), et $|f|_{x_1}$ est la longueur de f en x_1 (nombre d'occurrences de x_1 dans f). Soit $r \in K\langle\langle X \rangle\rangle$. La série $r \circ s$ est alors définie par :

$$(2.2) \qquad r \circ s = \sum_{f \in X^*} (r, f) \, f \circ s \, .$$

On montre aisément à partir de (2.1) et (2.2) que, pour toutes séries $r, s \in K\langle\langle X\rangle\rangle$:

$$(2.3)\begin{cases} r \circ s = \sum\limits_{i_0 \geq 0} (r, x_0^{i_0})\, x_0^{i_0} + \sum\limits_{i_0, i_1 \geq 0} (r, x_0^{i_1} x_1 x_0^{i_0})\, x_0^{i_1+1} [s \text{ ш } x_0^{i_0}] + \\ + \sum\limits_{i_0, i_1, i_2 \geq 0} (r, x_0^{i_2} x_1 x_0^{i_1} x_1 x_0^{i_0})\, x_0^{i_2+1} [s \text{ ш } x_0^{i_1+1} [s \text{ ш } x_0^{i_0}]] + \dots \end{cases}$$

Remarquons que dans (2.3) le produit de mélange ш peut intervenir un nombre infini de fois. Dans le cas où r et s sont deux séries rationnelles, et bien que le mélange conserve la rationalité, la série $r \circ s$ n'est donc pas, a priori rationnelle. C'est ce que confirme le contrexemple suivant. Considérons la série rationnelle $r \in K\langle(X)\rangle$ donnée par $r = \sum\limits_{n \geq 0} x_1^n = (1-x_1)^{-1}$. On montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(r \circ r, x_0^k x_1^k) = k^k$; les coefficients de mots $x_0^k x_1^k$ croissent donc plus qu'exponentiellement, ce qui ne peut être le cas pour une série rationnelle (cf. [3]).

Notons, par ailleurs, que l'apparition dans (2.3) du mélange est liée à la longueur en x_1 des mots de la série r, et il s'avère que si cette longueur est bornée, alors la rationalité est conservée. Plus précisément, une série $r \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est dite bornée relativement à x_1 s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout mot $f \in \text{supp } r$, on ait : $|f|_{x_1} \leq n$ $(\text{supp } r = \{f \in X^* / (r, f) \neq 0\})$, et on a dans ces conditions (cf. [3]) :

PROPOSITION 2.2. - <u>Soient</u> r <u>et</u> s <u>deux séries rationnelles de</u> $K\langle\langle X\rangle\rangle$. <u>Une condition suffisante pour que la série</u> $r \circ s$ <u>soit rationnelle est que</u> r <u>soit bornée relativement à</u> x_1 .

III. - COMPOSITION (OU MISE EN SÉRIE) DE DEUX SYSTÈMES ASSERVIS ANALYTIQUES.

Soient (Σ_1) et (Σ_2) deux systèmes asservis d'entrée $u \in \mathcal{C}([0, T])$ et de sorties y_1 et y_2 :

$$(\Sigma_j) \ : \qquad y_j(t) = F_j[u](t) \ , \quad t \in [0,T] \ , \ (j = 1,2) \ ,$$

décrits par deux fonctionnelles causales F_1 et F_2. Le système $(\Sigma_2 \circ \Sigma_1)$ composé de (Σ_2) et (Σ_1) est le système d'entrée u et de sortie y :

$$(\Sigma_2 \circ \Sigma_1) \ : \qquad y(t) = F_2[y_1](t) = F_2[F_1[u]](t) \ .$$

Soient $f = x_{j_k} \dots x_{j_o} \in X^*$ $(k \geq 0, j_k, \dots, j_o = 0 \text{ ou } 1)$ et (Σ_f) le système analytique de série génératrice f. Sa sortie est donnée, suivant (1.1) par : $y_f(t) = F_f[u](t) = \int_o^t d\xi_{j_k} \dots d\xi_{j_o}$. De même, si $s \in K \langle\langle X \rangle\rangle$ notons y_s la sortie du système analytique (Σ_s) de série génératrice s. La sortie y du système $(\Sigma_f \circ \Sigma_s)$ est alors donnée par $y(t) = F_f[y_s](t)$ et on montre aisément que :

$$\begin{cases} y(t) = y_f(t) \ , \quad \text{si} \quad |f|_{x_1} = 0 \\ y(t) = \int_o^t d\xi_o^{n+1}(\tau)\, y_s(\tau)\, F_{f'}[y_s](\tau) \quad \text{si} \ f = x_o^n x_1 f' \ \text{avec} \ n \in \mathbb{N} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et} \quad f' \in X^* . \end{cases}$$

L'équivalence entre produit de systèmes analytiques et mélange, et la définition même de la composition dans $K\langle\langle X \rangle\rangle$ par (2.1) conduisent alors à énoncer (cf. [3]) :

PROPOSITION 3.1. - <u>Le composé</u> $(\Sigma_r \circ \Sigma_s)$ <u>de deux systèmes asservis analytiques de séries génératrices</u> r <u>et</u> s <u>dans</u> $K\langle\langle X \rangle\rangle$ <u>est un système asservi analytique de série génératrice</u> $r \circ s$.

On dispose donc, à la suite de la proposition (3.1), d'une opération dans $K\langle\langle X \rangle\rangle$ permettant d'étudier la composition des systèmes analytiques suivant les propriétés de leurs séries génératrices. Considérons, par exemple, le système régulier (ou bilinéaire) :

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} \dot{q}(t) = u(t)\, q(t) \\ y(t) = q(t) \ , \end{cases}$$

où $q(t) \in K$ et $q(o) = 1$. Sa série génératrice est, suivant la proposition (1. 2) : $r = \sum_{n \geq 0} x_1^n = (1-x_1)^{-1}$. Ceci prouve, la série $r o r$ n'étant pas rationnelle, que le système $(\Sigma o \Sigma)$ n'est pas régulier et permet d'affirmer, en réponse à une question soulevée par R. W. BROCKETT [2] , que la famille des systèmes réguliers (ou bilinéaires) de la forme (1. 2) n'est pas close pour l'opération de composition. On peut cependant interpréter la proposition 2. 1 pour obtenir une condition assurant la régularité du composé de deux systèmes réguliers.

Un semi-groupe S de matrices est dit nilpotent relativement à $M \in S$ s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que pour tout entier $k \geq n$ et tout k-uplet $(M_1, \ldots, M_k) \in S^k$, où M se retrouve n fois, on ait $M_1 M_2 \ldots M_k = 0$.

Soit un entier $N \geq 1$. Une représentation $\mu : Z^* \rightarrow K^{N \times N}$ est dite nilpotente relativement à x_1 si le semi-groupe $\{\mu w \ / \ w \in X X^*\}$ est nilpotent relativement à μx_1 .

PROPOSITION 3. 2 (cf. [3]). - <u>Une série</u> $r \in K \langle (X) \rangle$ <u>est bornée relativement à</u> x_1 <u>si et seulement s'il existe un entier</u> $N \geq 1$, <u>une représentation</u> $\mu : X^* \rightarrow K^{N \times N}$ <u>des matrices ligne</u> $\lambda \in K^{1 \times N}$ <u>et colonnes</u> $\gamma \in K^{N \times 1}$, <u>produisant</u> r , <u>tel que</u> μ <u>soit nilpotente relativement à</u> x_1 .

Il vient alors comme conséquence immédiate des propositions (1. 2), (2. 2), (3. 1) et (3. 2) :

PROPOSITION 3. 4. - <u>Soient</u> (Σ_1) et (Σ_2) <u>deux systèmes réguliers. Une condition suffisante pour que le système composé</u> $(\Sigma_2 o \Sigma_1)$ <u>soit régulier, est que</u> (Σ_2) <u>puisse se mettre sous la forme</u> :

$$(\Sigma_2) \qquad \begin{cases} \dot{q}(t) = (A_o + u(t) A_1)\, q(t) \\ y(t) = \lambda\, q(t) \qquad\qquad [q(o) \text{ donné}] , \end{cases}$$

<u>où le semi-groupe engendré par les matrices</u> A_o et A_1 <u>est nilpotent relativement à</u> A_1 .

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARRETT (J. F.). - The use of functionals in the analysis of nonlinear physical systems. J. Electronics Control, 15, 1963, p. 567-615.

[2] BROCKETT (R. W.). - On the algebraic structure of bilinear systems. In "Theory and Applications of variable structure systems". (R. R. Mohler et A. Ruberti, ed.), Academic Press, New-York, 1972, p. 153-168.

[3] FERFERA (A.). - Combinatoire du monoïde libre appliquée à la composition et aux variations de certaines fonctionnelles issues de la théorie des systèmes. Thèse de 3ème Cycle, Université de Bordeaux I, 1979.

[4] FLIESS (M.). - Sur divers produits de séries formelles. Bull. Soc. Math. France 102, 1974, p. 181-191.

[5] FLIESS (M.). - Un outil algébrique : les séries formelles non commutatives. In "Mathematical Systems Theory" (G. Marchesini et S.K. Mitter, ed.), Lect. Notes Econom. Math. Sys. n°131, Springer-Verlag, Berlin, 1976, p. 122-148.

[6] SCHUTZENBERGER (M. P.). - On the definition of a family of automata. Inform. Control, 4, 1961, p. 245-270.

-:-:-:-

Abdelhak FERFERA
Centre Universitaire de Sidi-Bel-Abbes
S.B.A. (ALGÉRIE)